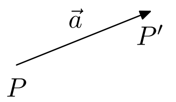
Affine transformationer/afbildninger

Følgende afbildninger (+ sammensætninger af disse) af planen ind i sig selv kaldes affine:

1) parallelforskydning
2) drejning omkring et punkt
3) spejling i en linje
4) multiplikation ud fra et punkt (homoteti)
5) ret affinitet om en akse

Med P' betegnes billedet af punktet P ved en affin transformation.

1) *parallelforskydning*

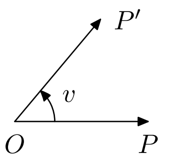


$\vec{a}$ er den samme uafhængig af P.

Specialtilfælde

$P' = P \quad : \quad \vec{a} = 0$ (identiteten)

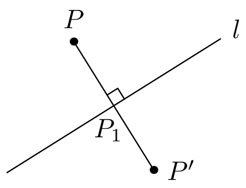
2) *drejning omkring et punkt O*



vinklen v er den samme uafhængig af P.

$|OP'| = |OP|$

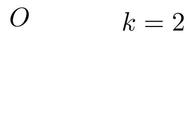
3) *spejling i en linje l*



lad P_1 være den vinkelrette projektion af P på l.

$\overrightarrow{P_1P'} = -\overrightarrow{P_1P}$

4) *multiplikation med k ud fra et punkt O*



$\overrightarrow{OP'} = k\,\overrightarrow{OP}$ hvor k er et givet tal.

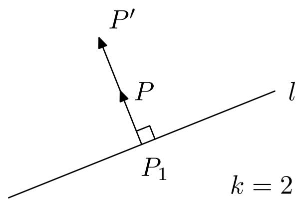
Specialtilfælde

$k = 1$: identiteten

$k = 0$: $P' = O$ for alle P

$k = -1$: drejning på $180°$ om O
(= spejling i O)

5) *ret affinitet med forvandlingstal k om en linje l*



Lad P_1 være den vinkelrette projektion af P på l. Tallet k er givet.

$\overrightarrow{P_1P'} = k\,\overrightarrow{P_1P}$

Specialtilfælde

$k = 1$: identiteten

$k = 0$: den vinkelrette projektion på l

$k = -1$: spejling i l

Flytninger = De affine afbildninger, der fås ved
1) parallelforskydninger
2) drejninger
3) spejling i linjer
samt sammensætninger af disse.

Ligedannetheder = De affine afbildninger, der fås ved
1) parallelforskydninger
2) drejninger
3) spejling i linjer
4) multiplikation ud fra et punkt.
samt sammensætninger af disse.

Isometri = En *afstandsbevarende* afbildning.

Er en *isometri* en *affin* afbildning ?

(Svar senere)

For affine afbildninger gælder

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$$

Derfor kan man til enhver affin afbildning knytte én afbildning φ af planens vektorer ind i planens vektorer ved

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \;\Rightarrow\; \varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{A'B'}$$

Der gælder, at φ er lineær, dvs

$$\varphi(x\,\vec{a} + y\,\vec{b}) = x\,\varphi(\vec{a}) + y\,\varphi(\vec{b})$$

for alle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ samt alle tal x og y.
Givet to egentlige vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som ikke er parallelle, så kan enhver vektor skrives som en linearkombination af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ (dvs på formen $x\,\vec{a}+y\,\vec{b}$). Dermed er afbildningen φ fastlagt, når blot $\varphi(\vec{a})$ og $\varphi(\vec{b})$ er kendte. En affin afbildning er fastlagt, når φ er

fastlagt, og billedet P' af ét punkt P er kendt. Billedet Q' af et vilkårligt punkt Q bestemmes nemlig ved

$$\overrightarrow{P'Q'} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

Koordinatregning

Sæt: $\vec{\imath} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ og $\varphi(\vec{\imath}) = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $\varphi(\vec{\jmath}) = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$P(x,y)$, $P'(x',y')$, $O(0,0)$ og $O'(x_0,y_0)$

Dermed

$$\overrightarrow{O'P'} = \varphi(\overrightarrow{OP}) = \varphi(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}) = x\,\varphi(\vec{\imath}) + y\,\varphi(\vec{\jmath}) = \begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

og

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Altså er *koordinatfremstillingen* for den affine afbildning

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

hvor skrivemåden

$$\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix}$$

er introduceret.

Til den affine afbildning er altså knyttet en 2×2 matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$.

At kende φ er ækvivalent med at kende $\mathbf{A}$.

Eksempel

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Dette beskriver en drejning på $60°$ omkring et punkt S. Punktet $O(0,0)$ afbildes i $O'(2,1)$ Koordinaterne til S bestemmes ved at S er et fixpunkt (dvs $S' = S$)

Løses ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$$

findes koordinaterne til S.
Svar: $S\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$

Eksempler på matricer

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: parallelforskydning

$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}$: drejning med drejningsvinkel v

$\begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ \sin v & -\cos v \end{pmatrix}$: spejling i en linje, der danner vinklen $\dfrac{v}{2}$ med x-aksen

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$: multiplikation med faktor k

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: ret affinitet med forvandlingstal k om y-akse

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$: ret affinitet med forvandlingstal k om x-akse

Udfører man *først* en affin transformation med tilknyttet matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

og *efterfølgende* en affin transformation med tilknyttet matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

så får den *sammensatte* affine afbildning matricen (overvej)

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

Løst sagt : skal man i den sammensatte matrix finde elementer i den i'te række (vandrette) og j'te søjle (lodrette), så tager man tallene i den i'te række i **B** og ganger med tallene i den j'te søjle i **A** og lægger sammen.

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 23 & 53 \end{pmatrix}$$

Bemærk at normalt er $\mathbf{BA}$ og $\mathbf{AB}$ forskellige. Derimod gælder $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

Determinant for en affin afbildning

Sæt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2_2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1\,\vec{\imath} + x_2\,\vec{\jmath}) = x_1\,\varphi(\vec{\imath}) + x_2\,\varphi(\vec{\jmath})$$
$$\varphi(\vec{y}) = \varphi(y_1\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath}) = y_1\,\varphi(\vec{\imath}) + y_2\,\varphi(\vec{\jmath})$$

$$\begin{aligned}\det(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = \widehat{\varphi(\vec{x})} \cdot \varphi(\vec{y}) &= (x_1\,\widehat{\varphi(\vec{\imath})} + x_2\,\widehat{\varphi(\vec{\jmath})})(y_1\,\varphi(\vec{\imath}) + y_2\,\varphi(\vec{\jmath})) \\ &= \widehat{\varphi(\vec{\imath})} \cdot \varphi(\vec{\jmath})\,(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= \det(\varphi(\vec{\imath}), \varphi(\vec{\jmath}))\ \det(\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}$$

(Her er benyttet $\widehat{\varphi(\vec{\imath})} \cdot \varphi(\vec{\imath}) = \widehat{\varphi(\vec{\jmath})} \cdot \varphi(\vec{\jmath}) = 0$ samt $\widehat{\varphi(\vec{\imath})} \cdot \varphi(\vec{\jmath}) = -\widehat{\varphi(\vec{\jmath})} \cdot \varphi(\vec{\imath})$)
Dermed (forudsat $\det(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$)

$$\det(\varphi(\vec{\imath}), \varphi(\vec{\jmath})) = \frac{\det(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))}{\det(\vec{x}, \vec{y})}$$

Det ses heraf, at $\det(\varphi(\vec{\imath}), \varphi(\vec{\jmath}))$ er uafhængig af koordinatsystemet og altså *kun* afhænger af afbildningen φ. Kald den affine afbildning f.
Man skriver

$$\det f = \det\varphi = \det(\varphi(\vec{\imath}), \varphi(\vec{\jmath})) = \det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(Selvom matricen $\mathbf{A}$ er afhængig af koordinatsystemet er det $\mathbf{A}$ det altså ikke!).

Betydning af $|\det\varphi|$: Lad F være en figur og F' billedet af figuren ved den affine afbildning.

$$|\det\varphi| = \frac{\text{areal af } F'}{\text{areal af } F}$$

Betydning af $\operatorname{sgn}(\det\varphi)$:

$\det\varphi$ er positiv, hvis φ *bevarer* orientering af vinkler (med eller mod uret).
$\det\varphi$ er negativ, hvis φ *vender* orientering af vinkler.

$\det\varphi$ kaldes *afbildningens determinant.*
Der gælder

$$\det\mathbf{AB} = \det\mathbf{A} \cdot \det\mathbf{B}$$

Hvis en affin afbildning f er bijektiv så er den inverse afbildning f^{-1} (f^{-1} kan defineres ved $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$) også en affin afbildning. En affin afbildning f er bijektiv hvis og kun hvis $\det f \neq 0$ (at $\det f \neq 0$ for en bijektiv afbildning får umiddelbart af $1 = \det\mathrm{id} = \det f \circ f^{-1} = \det f \cdot \det f^{-1}$)

Betegnes matricen hørende til den oprindelige afbildning med

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

så har den inverse afbildning matricen

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det \mathbf{A}} & -\dfrac{a_{12}}{\det \mathbf{A}} \\ -\dfrac{a_{21}}{\det \mathbf{A}} & \dfrac{a_{11}}{\det \mathbf{A}} \end{pmatrix}$$

Her er en række resultater om affine afbildninger.

1. Til *enhver* 2×2 matrix er der knyttet en affin afbildning.
2. Affine afbildninger med determinant 0 afbilder planen i en linje eller et punkt. (disse affine afbildninger har ikke så stor geometrisk interesse).

Nedenfor er determinanten forskellig fra 0

3. Affine afbildninger afbilder en linje i en linje.
4. Affine afbildninger afbilder parallelle linjer i parallelle linjer.
5. Affine afbildninger *bevarer* længdeforhold på en linje.
6. Affine afbildninger *bevarer* arealforhold mellem figurer.
7. Givet 6 punkter A, B, C, D, E og F således at A, B og C ikke ligger på linje og tilsvarende D, E og F ikke ligger på linje, så findes der netop én afbildning så $D = A'$, $E = B'$ og $F = C'$.
8. Givet to trekanter så findes der en affin afbildning, der afbilder den ene trekant på den anden (en anden formulering af punkt 7).
9. En isometri og en flytning er det samme.
10. For en flytning er $|\det \varphi| = 1$.
11. Enhver flytning med $\det \varphi = 1$ er enten en drejning eller en parallelforskydning.
12. Enhver flytning med $\det \varphi = 1$ kan sammensættes af to spejlinger.
13. Enhver flytning med $\det \varphi = -1$ er enten en spejling eller en *glidespejling* (dvs en spejling efterfulgt af en parallelforskydning i spejlingslinjens retning).
14. Enhver flytning med $\det \varphi = -1$ kan sammensættes af 3 spejlinger.
15. Sammensætning af to spejlinger med parallelle spejlingsakser giver en parallelforskydning vinkelret på akserne. Forskydningsvektoren er dobbelt så lang som afstanden mellem spejlingsakserne.
16. Sammensætning af to spejlinger med ikke-parallelle spejlingsakser giver en drejning. Drejningsvinklen er dobbelt så stor som vinklen mellem akserne.
17. En ligedannethed bevarer længdeforhold. Der gælder $|A'B'| = \sqrt{|\det \varphi|} \cdot |AB|$.
18. Enhver længdeforholdsbevarende afbildning er en ligedannethed.
19. Enhver ligedannethed kan frembringes ved en multiplikation ud fra et punkt efterfulgt af en flytning.
20. Enhver affin afbildning kan frembringes af en ret affinitet efterfulgt af en ligedannethed.
21. Lad $d(P_1, v_1)$ betegne en drejning omkring punktet P_1 med drejningsvinkel v_1. Drejningen $d(P_2, v_2)$ defineres tilsvarende. Hvis $v_1 + v_2 \neq 360°$ er sammensætningen af $d(P_1, v_1)$ og $d(P_2, v_2)$ en drejning.

22. Lad $h(P_1, k_1)$ være en homoteti ud fra punktet P_1. Tilsvarende defineres $h(P_2, k_2)$.

    Hvis $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ er sammensætningen af $h(P_1, k_1)$ og $h(P_2, k_2)$ en homoteti.

23. En affin afbildning er en homoteti, hvis og kun hvis enhver ret linje er parallel med billedet af linjen.

24. Enhver ligedannethed, der ikke er en flytning, kan frembringes ved en homoteti ud fra et punkt S, efterfulgt af enten en drejning omkring S eller en spejling i en linje gennem S.

25. Givet to ellipser (herunder cirkler), så findes der en affin afbildning, der afbilder den ene ellipse på den anden. Ved en affin afbildning føres en ellipse i en ellipse.

26. Givet to hyperbler, så findes der en affin afbildning, der afbilder den ene hyperbel på den anden. Ved en affin afbildning føres en hyperbel i en hyperbel.

27. Givet to parabler, så findes der en affin afbildning, der afbilder den ene parabel på den anden. Ved en affin afbildning føres en parabel i en parabel.

28. Givet 2 ikke-kongruente trekanter med parvis parallelle sider, så findes der en homoteti, der afbilder den ene trekant på den anden.

Opgaver

1. Den indskrevne cirkel er den indskrevne ellipse med størst areal i en givet ligesidet trekant. Angiv arealet af den ellipse med størst areal, som er indskrevet i en 3-4-5-trekant.

2. Grafen for $y = A\sin(kx + \varphi_0) + y_0$ fremkommer ved en affin transformation af grafen for $y = \sin x$. Beskriv den affine transformation.

3. d_1 er en drejning på 30° i positiv omløbsretning omkring punktet $O(0,0)$.

   d_2 er en drejning på 60° i positiv omløbsretning omkring punktet $P(2,0)$.

   Bestem koordinaterne til drejningscentrum for $d_2 \circ d_1$.

4. Lad $\triangle ABC$ afbildes i $\triangle A'B'C'$ ved en affin transformation.

   Vis at medianernes skæringspunkt i $\triangle ABC$ afbildes i medianernes skæringspunkt i $\triangle A'B'C'$.

5. Lad $A(3,0)$, $B(7,0)$, $C(4,6)$, $D(6,4)$, $E(-2,-4)$ og $F(0,8)$ være givne punkter.

   Bestem koordinatfremstillingen for den affine afbildning, der afbilder $\triangle ABC$ på $\triangle DEF$.

6. I planen er givet et koordinatsystem. En afbildning af planen på sig selv fører ethvert punkt P i et punkt P', så midtpunktet af PP' ligger på $x-$aksen og så linjen gennem P og P' har hældningskoefficient 2.

   Vis at afbildningen er affin og bestem en koordinatfremstilling for den.

7. $\triangle ABC$ og $\triangle A_1B_1C_1$ er to kongruente trekanter med samme omløbsretninger. Bevis at midtnormalerne for AA_1, BB_1 og CC_1 enten er parallelle eller går gennem samme punkt.

8. $\triangle ABC$ og $\triangle A_1B_1C_1$ er to kongruente trekanter med modsatte omløbsretninger. Bevis at midtpunkterne af AA_1, BB_1 og CC_1 ligger på linje.

9. Lad $\triangle BPC$, $\triangle CQA$ og $\triangle ARB$ være ligesidede trekanter der vender ud af $\triangle ABC$. Vis at AP, BQ og CR går gennem samme punkt og at de er lige lange og danner indbyrdes vinkler på 60°.

   Bestem beliggenheden af det punkt i $\triangle ABC$ hvorfra summen af afstandene til trekantens hjørner er mindst.

   (Husk i denne opgave også tilfældet, hvor én at trekantens vinkler er større end 120°.)

10. Lad C_1, C_2, C_3 og C_4 være midtpunkter i fire kvadrater, som hver har en side fælles med et parallelogram. De fire kvadrater vender ud af parallelogrammet.

    Vis at $C_1C_2C_3C_4$ er et kvadrat.

11. Vis, at i en 6-kant, hvori de modstående sider er parallelle og lige lange, vil diagonalerne fra modstående punkter gå gennem samme punkt.

12. Givet $\triangle ABC$. Konstruer et kvadrat med den ene side liggende på BC og de to hjørner i kvadratet som ikke ligger på BC ligger på henholdsvis AC og AB

13. Lad A være et givet punkt.

    Hvilke punkter vil midtpunktet af AB gennemløbe når B gennemløber en cirkel?

14. Lad M være et punkt på den bue AB på $\triangle ABC$'s omskrevne cirkel som ikke indeholder C. Antag at projektionerne af M på AB og BC ligger på linjestykkerne AB og BC (og ikke på deres forlængelser). Kald disse projektioner for henholdsvis X og Y. Lad K og N være midtpunkterne af henholdsvis AC og XY. Vis at $\angle MNK$ er ret.

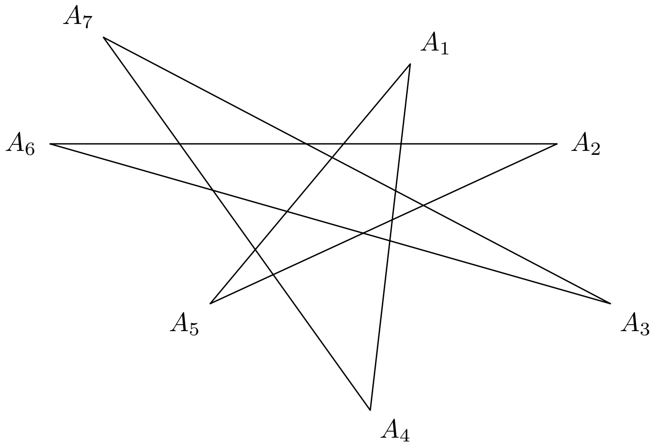
Ekstra geometriopgaver

1. En cirkel går gennem hjørnet C på et rektangel $ABCD$ og cirklen tangerer siderne AB og AD i henholdsvis M og N.

   Find arealet af $\square ABCD$, når afstanden fra C til MN er 2.

2. Lad D være et punkt på siden BC i $\triangle ABC$. Lad Γ_1 og Γ_2 være de indskrevne cirkler i henholdsvis $\triangle ABD$ og $\triangle ACD$. Lad l være den fælles ydre tangent for Γ_1 og Γ_2 som er forskellig fra BC. Lad P være skæringspunktet mellem AD og l.

   Vis $2|AP| = |AB| + |AC| - |BC|$.

3. 

   På syvstjernen findes ikke tre linjer som går gennem samme punkt.

   Find vinkelsummen $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7$.

4. Linjestykkerne BC, CA og AB er sider i kvadrater med centrene O_1, O_2 og O_3. Kvadraterne ligger uden for $\triangle ABC$.

   Vis at O_1O_2 står vinkelret på CO_3 og $|O_1O_2| = |CO_3|$.

5. Ligedannetheden bestående af en multiplikation med tallet k ud fra P efterfulgt af en drejning om P med vinklen v kaldes $P(k, v)$ (overvej at rækkefølgen i øvrigt er ligegyldig).

   Vis at hvis P_1, P_2, k_1, k_2, v_1 og v_2 er givet, og $v_1 + v_2 \neq 0^\circ \pmod{360^\circ}$, så findes der et punkt S, så $S(k_1k_2, v_1 + v_2) = P_1(k_1, v_1) \circ P_2(k_2, v_2)$.

6. Lad M være midtpunktet af linjestykket AB og lad l være en given linje. Lad R og S betegne de vinkelrette projektioner af henholdsvis A og B på l. Antag at R og S ikke ligger på linjen gennem A og B.

   Vis at de omskrevne cirkler til $\triangle ARM$ og $\triangle BSM$ har samme radius.