Georg Mohr Konkurrencen
Noter om uligheder

Søren Galatius Smith

11. juli 2000

Resumé

Kapitel 1 gennemgår visse metoder fra gymnasiepensum, som kan bruges til at løse ulighedsopgaver, og indeholder ikke egentligt nyt stof.

I kapitel 2 formuleres de tre vigtige standarduligheder AG-uligheden, Cauchy-Schwarz's ulighed og Jensens ulighed. Disse kan betragtes som (minimalt) pensum i uligheder i konkurrencer ud over Georg Mohr.

For de, som har lyst til at læse mere om middelværdier, er der i kapitel 3 samlet nogle mere avancerede sætninger, som er generalisationer af AG-uligheden. Specielt er Muirheads ulighed værd at lære sig.

I håb om at gøre noterne mere læsbare er de fleste af beviserne flyttet om i appendix.

Jeg vil være meget taknemmelig for kommentarer, rettelser, forslag til forbedringer etc. E-mail: `galatius@imf.au.dk`

Søren Galatius Smith, Juli 2000

Kapitel 1

Grundlæggende metoder

1.1 Algebraiske metoder

Nogle uligheder kan vises ved algebraiske omskrivninger til oplagt sande udsagn. Et hyppigt anvendt trick er, at der for alle $x \in \mathbb{R}$ gælder $x^2 \geq 0$ med lighed hvis og kun hvis $x = 0$.

Eksempel 1.1.1. Vis at der for alle positive reelle tal gælder

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

med lighed hvis og kun hvis $x = y$.

Bevis. Vi har $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. □

Dette er faktisk et specialtilfælde af den såkaldte AG-ulighed, som præsenteres senere.

Eksempel 1.1.2. Vis, at der for alle reelle tal a, b og c gælder $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Bevis. Da $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, fås for alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Ligeledes må der jo gælde

$$b^2 + c^2 \geq 2bc \quad \text{og} \quad a^2 + c^2 \geq 2ac,$$

hvoraf det ønskede følger ved addition og division med 2. □

Bemærkning 1.1.3. Løsningen til det foregående eksempel kan godt virke lidt grebet ud af luften. Hvordan i alverden skulle man finde på at betragte $(a-b)^2$? Når man skal vise en ulighed er det som regel nødvendigt at „regne baglæns“, altså starte med det man skal vise. Man skal selvfølgelig sørge for, at beviset virker den „rigtige vej“. Man vil tit komme ud for en implikation, som kun gælder den ene vej, fx gælder der jo $a > c$ og $b > d \Rightarrow a+b > c+d$ (hvilket vi brugte i det sidste skridt i ovenstående eksempel), men ikke det omvendte. Hvis man skriver beviserne i „baglæns“ rækkefølge, kan det være lettere at se, hvordan man har fundet på beviset, men også lettere at lave forkerte argumenter.

1.2 Analytiske metoder

Som bekendt gælder der for positive tal $x \geq y \Rightarrow x^2 \geq y^2$, man har lov til at „kvadrere på begge sider“. Man kan også overbevise sig om, at man har lov til at „tage kvadratrod på begge sider“. Dette er en vigtig egenskab ved funktionerne $x \mapsto x^2$ og $x \mapsto \sqrt{x}$. Hvis $f : I \to \mathbb{R}$ er en funktion på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$, siger vi generelt

- f er voksende i I, hvis $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in I$
- f er aftagende i I, hvis $x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, $\forall x, y \in I$
- f er strengt voksende i I, hvis $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$, $\forall x, y \in I$
- f er strengt aftagende i I, hvis $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$, $\forall x, y \in I$

Hvis f er strengt voksende, har man altså lov til at „tage f på begge sider“ af et ulighedstegn; hvis f kun vides at være voksende, skal man ændre $>$ til $\geq$ og $<$ til $\leq$. Hvis f er aftagende hhv. strengt aftagende, skal man vende ulighedstegnet. Hvis man ikke umiddelbart kan se, om en funktion er voksende, kan man prøve med

Sætning 1.2.1 (Monotonisætningen)**.** *Lad f være differentiabel på et interval I. Hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in I$, er f voksende i I. Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in I$, er f strengt voksende i I.*

Bemærkning 1.2.2. Heraf udledes let små modifikationer, som fx at det er nok at f er kontinuert og *stykkevist* differentiabel, eller at $f'(x) > 0$ for alle $x \in I$ undtagen endelig mange er tilstrækkeligt til at gøre f strengt voksende. Vi vil ikke i denne note give et bevis for monotonisætningen.

Monotonisætningen kan dels bruges til at retfærdiggøre et (lille) skridt i et bevis, hvor man har brugt en implikation som fx $x > y \Rightarrow e^x > e^y$. I sådanne tilfælde betragtes det som regel som „velkendt“, at den givne funktion (fx eksponentialfunktionen) er voksende, og man behøver ikke skrive, at den afledede er positiv. Man kan imidlertid også forestille sig tilfælde, hvor hele opgaven eller en stor del af den kan formuleres som $f(1) \geq f(2)$ eller lignende, for en passende funktion f. Så kan det være at det er lettere at vise $f'(x) \geq 0$ for $x \in [1;2]$, hvorved monotonisætningen giver det ønskede.

Et lidt mere hi-tech redskab er *maksimering*. En måde at vise, at der for en differentiabel funktion f gælder $f(x) \geq 0$, er at differentiere f, finde kritiske punkter, og undersøge, om f's globale minimum er ≥ 0. I så fald har man jo vist uligheden. I praksis viser det sig sjældent at være farbar vej; hvorfor skulle det være lettere at løse $f'(x_{min}) = 0$ og derefter vise $f(x_{min}) \geq 0$ end at vise $f(x) \geq 0$ en gang for alle? Det er trods alt de færreste funktioner, der bliver pænere af at blive differentieret. En anden hage ved metoden er, at f typisk er en funktion af flere variable, hvor maksimering bliver endnu mere vanskelig.

Kapitel 2

Generelle sætninger

2.1 Algebraiske metoder

Definition 2.1.1.

- Ved det *aritmetiske gennemsnit* (eller middel) af n reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forstås tallet
$$\mathcal{A} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$
- Ved det *geometriske gennemsnit* (eller middel) af n ikke-negative reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forstås tallet
$$\mathcal{G} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Der gælder nu den vigtige

Sætning 2.1.2 (AG-uligheden)**.** *For vilkårlige n ikke-negative reelle tal x_1, x_2, ..., x_n gælder*
$$\mathcal{A} \geq \mathcal{G}$$
med lighed hvis og kun hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Den næste sætning har en intuitiv geometrisk fortolkning

Sætning 2.1.3 (Cauchy-Schwarz)**.** *For vilkårlige $2n$ reelle tal x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n gælder*
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$
Der gælder lighedstegn, hvis og kun hvis der findes $\sigma, \lambda \in \mathbb{R}$, ikke begge 0, så $\sigma x_i = \lambda y_i$ for alle i.

For $n = 2$ og $n = 3$ siger uligheden, at vinklen θ mellem to vektorer $\vec{x}$ og $\vec{y}$ i $\mathbb{R}^n$ opfylder $\cos\theta \leq 1$. For $n > 3$ er resultatet nødvendigt for overhovedet at kunne definere vinkler. Cauchy-Schwarz er et specialtilfælde af

Sætning 2.1.4 (Hölders ulighed)**.** *Lad $p, q \in \mathbb{R}$ være så $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Lad x_i og y_i være ikke-negative. For $p > 1$ (og dermed $q > 1$) gælder*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

og hvis $p < 1$ (og dermed $q < 1$) gælder den omvendte ulighed. Lighedstegn som i sætning 2.1.3.

I appendix A.3 findes en generalisation af sætning 2.1.4 samt et bevis for den generaliserede version.

2.2 Analytiske metoder

I kraft af monotonisætningen giver fortegnet af f' væsentlig information om f. I dette afsnit skal vi udnytte noget lignende om fortegnet for f''. Først nogle definitioner:

Definition 2.2.1. Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en funktion på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$.

- Hvis der for alle $x, y \in I$ og alle $\lambda \in [0; 1]$ gælder

  $$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda) y),$$

  siger vi, at f er *konveks* i I.

- Hvis der for alle $x, y \in I$ så $x \neq y$ og alle $\lambda \in]0; 1[$ gælder

  $$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) > f(\lambda x + (1 - \lambda) y),$$

  siger vi, at f er *strengt konveks* i I.

- f siges at være (strengt) konkav i I, hvis og kun hvis de omvendte uligheder gælder. Ækvivalent er f (strengt) konkav, hvis og kun hvis $-f$ er (strengt) konveks.

Sagt med ord er f konveks, hvis sekanten gennem to punkter på funtionens graf ligger *over* grafen mellem disse to punkter.

Det ser jo vældig indviklet ud, men heldigvis er der et lettere kriterium:

Sætning 2.2.2. *Lad f være en differentiabel funktion på et interval I. Da er f (strengt) konveks på I hvis og kun hvis f' er (strengt) voksende på I.*

I denne note vil vi ikke give et bevis for sætning 2.2.2. Sætningen er specielt nyttig, hvis f er to gange differentiabel. Så kan man nemlig bruge monotonisætningen til at afgøre, om f' er voksende. Sætter vi 1.2.1 og 2.2.2 sammen, får vi, at en to gange differentiabel funktion er konveks hhv. strengt konveks, hvis $f'' \geq 0$ hhv. $f'' > 0$. (Det er ikke nok, at f er kontinuert og stykkevist to gange differentiabel med $f'' \geq 0$. Prøv fx at tegne $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$ omkring $x = 0$.)

Vi kan nu formulere Jensens ulighed, opkaldt efter danskeren Johan Ludwig William Valdemar Jensen [1859–1925]:

Sætning 2.2.3 (Jensens ulighed)**.** *Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en konveks funktion på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Da gælder*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Hvis f er strengt konveks, gælder der lighedstegn hvis og kun hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Jensens ulighed siger altså, at gennemsnittet af funktionsværdierne er større end eller lig funktionsværdien af gennemsnittet. I appendix A.2 giver vi et bevis for Jensens ulighed.

Bemærk, at da f konveks $\Leftrightarrow$ $-f$ konkav, gælder den omvendte ulighed for konkave funktioner.

Som eksempel på anvendelsen af Jensens ulighed viser vi nu AG-uligheden:

Eksempel 2.2.4. Da $(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ for $x \in \mathbb{R}_+$, er ln strengt konkav på $\mathbb{R}_+$. Jensens ulighed giver nu, at der for alle positive tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gælder

$$\ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \frac{\ln(x_1) + \ln(x_2) + \cdots + \ln(x_n)}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

med lighed hvis og kun hvis x'erne er ens. Da eksponentialfunktionen er strengt voksende, følger AG-uligheden.

2.3 Opgaver til kapitel 2

Opgave 2.3.1 (Harmonisk middel)**.** Det *harmoniske gennemsnit* af n positive tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ defineres ved

$$\mathcal{H} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Vis, at der for vilkårlige n positive tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ gælder

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G},$$

med lighed hvis og kun hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Opgave 2.3.2 (Kvadratisk middel)**.** Det *kvadratiske gennemsnit* af n reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ defineres ved

$$\mathcal{Q} = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{n}}.$$

Vis, at der for vilkårlige n reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ gælder

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{Q},$$

med lighed hvis og kun hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Eksempel 2.3.3 (Trekantsuligheden i $\mathbb{R}^n$)**.** Vis, at der for alle reelle x_i og y_i gælder

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Giv evt. en geometrisk fortolkning af uligheden (noget med sidelængder af en trekant i $\mathbb{R}^n$). Denne ulighed er et specialtilfælde af *Minkowskis ulighed*, som bevises i appendix A.3.

Opgave 2.3.4. Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være positive reelle tal så $\prod x_i = 1$. Vis, at

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.$$

Bemærkning 2.3.5. Ovenstående ulighed er et specialtilfælde af flg. resultat: For x_i positive, $\prod x_i = 1$ og $0 < r < s$ gælder

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^r \leq \sum_{i=1}^{n} {x_i}^s.$$

[Vink til den generelle form: For en passende funktion $f(r)$ er det ækvivalent at vise, at f er voksende på $\mathbb{R}$. Idet ln er voksende på $\mathbb{R}_+$, har $({x_i}^r - 1)$ og $(\ln {x_i}^r - \ln 1)$ samme fortegn, så $({x_i}^r - 1)(\ln {x_i}^r - \ln 1) \geq 0$, hvoraf ${x_i}^r \ln x_i \geq \ln x_i$ for vilkårligt $x_i > 0$. Alternativt kan Hölders ulighed anvendes.]

Kapitel 3

Mere om middelværdier

3.1 Potensgennemsnit

I tidligere afsnit og øvelser har vi vist, at for vilkårlige n positive reelle tal gælder $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{Q}$, med lighedstegn hvis og kun hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Disse 4 gennemsnit er specialtilfælde af de såkaldte *potensgennemsnit* $\mathcal{M}_r$, som vi nu vil definere:

Definition 3.1.1. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være positive reelle tal. Da defineres

$$\mathcal{M}_r = \begin{cases} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^r\right)^{\frac{1}{r}} & \text{for } 0 < |r| < \infty, \\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} & \text{for } r = 0, \\ \min x_i & \text{for } r = -\infty, \\ \max x_i & \text{for } r = \infty. \end{cases}$$

Som man kan se, er $\mathcal{H} = \mathcal{M}_{-1}$, $\mathcal{G} = \mathcal{M}_0$, $\mathcal{A} = \mathcal{M}_1$ og $\mathcal{Q} = \mathcal{M}_2$. Generelt gælder

Sætning 3.1.2. *For vilkårlige positive reelle x_i er $r \mapsto \mathcal{M}_r$ en kontinuert og voksende funktion på $[-\infty; \infty]$ i den forstand, at den er kontinuert og voksende på $\mathbb{R}$ og $\lim_{r\to\pm\infty} \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_{\pm\infty}$. Med mindre $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ er den også strengt voksende.*

En del af beviset for denne sætning er i opgave B.0.17.

3.2 Vægtede gennemsnit

Hvis man vil lave et gennemsnit af x og y, hvor x er dobbelt så „vigtig“ som y, kan man bruge $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$. Dette kaldes et *vægtet gennemsnit* af x og y med vægtene $\frac{2}{3}$ og $\frac{1}{3}$. Alle potensgennemsnit kan vægtes:

Definition 3.2.1. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være positive reelle tal så $\sum a_i = 1$. Potensgennemsnittet af de n positive reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ med vægtene a_i defineres nu ved

$$\mathcal{M}_r = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n a_i {x_i}^r\right)^{\frac{1}{r}} & \text{for } 0 < |r| < \infty, \\ \prod_{i=1}^n {x_i}^{a_i} & \text{for } r = 0, \\ \min x_i & \text{for } r = -\infty, \\ \max x_i & \text{for } r = \infty. \end{cases}$$

Man kan nu vise, at sætning 3.1.2 også gælder for vægtede $\mathcal{M}_r$. I appendix A.2 er Jensens ulighed bevist i en udgave om vægtede gennemsnit (men kun for vægtede *aritmetiske* gennemsnit, dvs. det vægtede $\mathcal{M}_1$; se eksempel B.0.18 hvis $r \neq 1$). Jensens ulighed kan da skrives på formen i Københavns Universitets Matematiske Instituts logo:

$$\varphi\left(\frac{\sum a_\nu x_\nu}{\sum a_\nu}\right) \leq \frac{\sum a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum a_\nu}$$

3.3 Muirheads sætning

I dette afsnit skal vi se på endnu en generalisation af AG-uligheden, idet vi vil definere de såkaldte *Muirhead-gennemsnit*, for hvilke der gælder en meget stærk ulighed. Først lidt terminologi.

3.3.1 Permutationer

Først et par generelle definitioner:

Definition 3.3.1. Lad X og Y være mængder. Lad $f : X \to Y$ være en funktion. Vi siger da, at f er *surjektiv*, hvis der gælder

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

Vi siger, at f er *injektiv*, hvis der gælder

$$\forall x_1, x_2 \in X : \big[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big]$$

Vi siger, at f er *bijektiv*, hvis f er både injektiv og surjektiv.

En funktion $f : X \to Y$ er altså surjektiv, hvis hvert element i Y er billedet af *mindst* et element i X; den er injektiv, hvis hvert element i Y er billedet af *højst* et element i X, og bijektiv, hvis hvert element i Y er billedet af *netop* et element i X. Hvis (og kun hvis) $f : X \to Y$ er bijektiv findes en entydig funktion $g : Y \to X$ så $\forall y \in Y : f \circ g(y) = y$ og $\forall x \in X : g \circ f(x) = x$. Den således bestemte funktion betegnes f^{-1} og kaldes den *inverse* til f.

Definition 3.3.2. En *permutation* σ af en mængde X er en bijektiv funktion $\sigma : X \to X$. Mængden af permutationer på X betegnes Σ_X. Når $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ vil vi skrive Σ_n eller P_n for Σ_X. Σ_n kaldes også *den symmetriske gruppe.*

Af notationsmæssige årsager benyttes betegnelsen P_n frem for Σ_n i resten af denne fremstilling.

Det er en god idé at tænke sig et element σ i P_n tabuleret således:

x	1	2	$\ldots$	n
$\sigma(x)$	$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\ldots$	$\sigma(n)$

At $\sigma \in P_n$ skal være bijektiv kommer nu ud på, at hvert af tallene 1, 2, ..., n optræder netop én gang i nederste linie, således at σ bliver en *ombytning* af tallene fra 1 til n. Man ser, at antallet af mulige sådanne ombytninger, og dermed antal elementer i P_n, er $n!$.

3.3.2 Muirhead-gennemsnit

Vi vil nu definere det såkaldte *Muirhead-gennemsnit*:

Definition 3.3.3. Lad $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ være en n-tupel af ikke-negative reelle tal. Da lader vi *Muirhead-gennemsnittet* $[\alpha]$ af tallene $x_i > 0$ være det reelle tal

$$[\alpha] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_{\sigma(i)}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in P_n} \prod_{i=1}^{n} (x_{\sigma(i)})^{\alpha_i} \tag{3.1}$$

Altså: Find produktet $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$, byt på alle mulige måder rundt på eksponenterne, og læg det hele sammen og divider til sidst med antallet af led, $n!$.

For generelle eksponenter ser det ikke særlig handy ud, men i specialtilfældet hvor mange af eksponenterne er ens, fås enkle udtryk; i nedenstående eksemplerne er $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle tal.

Eksempel 3.3.4.

$$[\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}] = x_1{}^{\frac{1}{n}} \ldots x_n{}^{\frac{1}{n}} \tag{3.2}$$

Altså det kendte geometriske gennemsnit af x'erne.

Eksempel 3.3.5.

$$[1, 0, \ldots, 0] = \tfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{3.3}$$

Altså det kendte aritmetiske gennemsnit af x'erne.

AG-uligheden sammen med de to foregående eksempler viser, at der for alle positive reelle x_i gælder $[\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}] \leq [1, 0, \dots, 0]$. Hovedresultatet i dette afsnit er et generelt kriterium for, hvornår to Muirhead-gennemsnit kan sammenlignes på denne måde. Først endnu en definition:

Definition 3.3.6. Lad $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ og $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ være ordnede tupler af ikke-negative reelle tal. Vi skriver da $\alpha \prec \beta$, såfremt α_i'erne og β_i'erne kan omarrangeres så der gælder

(i) $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$

(ii) $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ og $\beta_i \geq \beta_{i+1}$ for alle $i = 1, \dots, n-1$

(iii) $\alpha_1 + \dots + \alpha_i \leq \beta_1 + \dots + \beta_i$ for alle $i = 1, \dots, n$

Punkt (ii) er ikke i sig selv en restriktion, da α og β altid kan omarrangeres så det bliver opfyldt. Men det gør naturligvis en forskel i (iii), at de skal være arrangeret i aftagende rækkefølge.

Vi kan nu formulere

Sætning 3.3.7 (Muirhead)**.** *Lad $[\alpha]$ og $[\beta]$ være to Muirhead-gennemsnit. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at der for alle positive x_i gælder $[\alpha] \leq [\beta]$ er, at $\alpha \prec \beta$. I så fald gælder der lighedstegn hvis og kun hvis $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ eller $\alpha_i = \beta_i$ for alle i.*

I appendix A.1 er et bevis for Muirheads sætning. Ofte kan man bruge Muirheads sætning sammen med flg. korollar af sætning 3.1.2:

Sætning 3.3.8. *Lad $[a]$ være et Muirhead-gennemsnit og lad $0 < \lambda \leq 1$. Da er*

$$[\lambda a] \leq [a]^\lambda.$$

hvor λa betegner $(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$. Der gælder lighedstegn hvis og kun hvis $\lambda = 1$ eller $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Appendix A

Nogen beviser

A.1 Bevis for Muirheads sætning

Sætning A.1.1 (Muirhead)**.** *Lad* $[\alpha]$ *og* $[\beta]$ *være to Muirhead-gennemsnit. En nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at der for alle positive* x_i *gælder* $[\alpha] \leq [\beta]$ *er, at* $\alpha \prec \beta$*. I så fald gælder der lighedstegn hvis og kun hvis* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ *eller* $\alpha_i = \beta_i$ *for alle* i*.*

Bevis. For at vise, at $\alpha \prec \beta$ er *nødvendigt*, antag α og β er ordnet i aftagende rækkefølge. Antag $[\alpha] \leq [\beta]$ for alle positive x_i. Vi skal nu vise, at (i) og (iii) i definition 3.3.6 må være opfyldt. Lad $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. Da er altså $x^{\sum \alpha_i} \leq x^{\sum \beta_i}$. Hvis dette skal gælde for x både større og mindre end 1, må eksponenterne være ens, så krav (i) i definition 3.3.6 er nødvendigt. Sæt dernæst $x_1 = x_2 = \cdots = x_i = x$ og $x_{i+1} = \cdots = x_n = 1$. Skrives uligheden $[\alpha] \leq [\beta]$ nu ud fås på venstre side en sum af potenser af x af hvilke den højeste potens er $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ (husk, at α var ordnet aftagende); på højre side har er den højeste potens $\beta_1 + \cdots + \beta_i$. Hvis venstresiden skal være mindre end højreside for store x, må (iii) i definition 3.3.6 nødvendigvis være opfyldt. Dermed er nødvendigheden bevist.

Vi viser nu tilstrækkeligheden. Antag altså at $\alpha \prec \beta$. Vi kan antage, at α og β allerede er arrangeret i aftagende rækkefølge. Beviset går ud på at finde n-tupler $\beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(m)}$, så $\beta^{(0)} = \beta$ og $\beta^{(m)} = \alpha$, og så det er „let“ at se, at $[\beta^{(i)}] \geq [\beta^{(i+1)}]$. Kan vi det, har vi jo vist det, vi skulle.

Lad os kalde antallet af i, så $\alpha_i \neq \beta_i$ for *diskrepansen* af β mht. α. Hvis diskrepansen er 0, er vi færdige. I modsat fald er nogen af differenserne $\alpha_i - \beta_i$ altså forskellige fra nul, og da $\sum(\beta_i - \alpha_i) = 0$, må der være både positive og negative differenser. Iflg. krav (iii) i definitionen af $\prec$, må den første ikke-nul differens være positiv. Lad l være mindst mulig, så $\beta_l - \alpha_l < 0$. Lad $k < l$

være størst mulig, så $\beta_k - \alpha_k > 0$. Vi har altså situationen

$$\alpha_k < \beta_k, \quad \beta_{k+1} = \alpha_{k+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_{l-1} = \beta_{l-1}, \quad \alpha_l > \beta_l \tag{A.1}$$

Lad nu σ være den største af tallene $\alpha_k - \frac{\beta_k+\beta_l}{2}$ og $\frac{\beta_k+\beta_l}{2} - \alpha_l$, og lad $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{\beta_k - \beta_l}$. Nu gælder:

$$\alpha_k \leq \frac{\beta_k + \beta_l}{2} + \sigma = \lambda\beta_k + (1-\lambda)\beta_l \tag{A.2}$$

$$\text{og} \quad \alpha_l \geq \frac{\beta_k + \beta_l}{2} - \sigma = (1-\lambda)\beta_k + \lambda\beta_l \tag{A.3}$$

Med lighed i mindst en af ulighederne. Da $\beta_l < \alpha_l \leq \alpha_k < \beta_k$, må $0 < \lambda < 1$.

Vi definerer nu β' ved

$$\beta'_m = \begin{cases} \lambda\beta_k + (1-\lambda)\beta_l & \text{for } m = k \\ (1-\lambda)\beta_k + \lambda\beta_l & \text{for } m = l \\ \beta_m & \text{ellers} \end{cases} \tag{A.4}$$

Af ligheden i (A.2) eller (A.3) ses, at diskrepansen af β' med hensyn til α er 1 eller 2 lavere end diskrepansen af β med hensyn til α.

β' skal nu være kandidat til $\beta^{(1)}$. Vi ønsker at vise, at $\alpha \prec \beta'$, samt at $[\beta'] \leq [\beta]$.

Vi har nu oplagt $\sum \alpha_i = \sum \beta_i = \sum \beta'_i$. Mht. om β' er aftagende har vi, for $k+1 < l$, at

$$\beta'_{k-1} = \beta_{k-1} \geq \beta_k \geq \lambda\beta_k + (1-\lambda)\beta_l \geq \alpha_k \geq \alpha_{k+1} = \beta_{k+1} = \beta'_{k+1} \tag{A.5}$$

$$\text{og} \quad \beta'_{l-1} = \beta_{l-1} = \alpha_{l-1} \geq \alpha_l \geq (1-\lambda)\beta_k + \lambda\beta_l \geq \beta_l \geq \beta_{l+1} = \beta'_{l+1} \tag{A.6}$$

Vi har dermed checket de uligheder, der involverer indicerne l og k. De andre uligheder er automatisk opfyldt, da β er aftagende. Vi har altså, at β' er aftagende. For $k = l-1$ gælder de samme vurderinger, blot overspringes vurderinger angående indices $k+1$, thi da er $\alpha_k = \alpha_{l-1}$.

Vi mangler nu kun at checke, at

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \leq \beta'_1 + \beta'_2 + \cdots + \beta'_m \quad \text{for } m = 1, 2, \ldots, n$$

For $m < k$ kan vi erstatte β' med β på højresiden, så der gælder uligheden. Det kan vi også for $m \geq l$, thi $\beta_k + \beta_l = \beta'_k + \beta'_l$. Da $\alpha_k \leq \beta'_k$, gælder det også for $m = k$. Dermed gælder det også for $k < m < l$, da β' og α er ens her.

Vi ønsker nu at vise, at for vilkårlige x_i'er er $[\beta'] \leq [\beta]$. Til den ende sker der ikke noget ved at omarrangere β og β', så $k = 1$ og $l = 2$. Vi har nu

$$\begin{aligned}
&2n!([\beta] - [\beta']) \\
=&\, 2n!\left([\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n] - [\lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2, (1-\lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n]\right) \\
=&\sum_{\sigma \in P_n} x_{\sigma(3)}^{\beta_3} \cdots x_{\sigma(n)}^{\beta_n} \Big(x_{\sigma(1)}^{\beta_1} x_{\sigma(2)}^{\beta_2} + x_{\sigma(1)}^{\beta_2} x_{\sigma(2)}^{\beta_1} - x_{\sigma(1)}^{\lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2} x_{\sigma(2)}^{(1-\lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - x_{\sigma(1)}^{(1-\lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2} x_{\sigma(2)}^{\lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2} \Big)
\end{aligned}$$

Parentesen kan faktoriseres i

$$\left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}\right)^{\beta_2} \left(x_{\sigma(1)}^{\lambda(\beta_1 - \beta_2)} - x_{\sigma(2)}^{\lambda(\beta_1 - \beta_2)} \right) \left(x_{\sigma(1)}^{(1-\lambda)(\beta_1 - \beta_2)} - x_{\sigma(2)}^{(1-\lambda)(\beta_1 - \beta_2)} \right)$$

der, idet $\lambda > 0$ og $1 - \lambda > 0$, er ikke-negativ, hvoraf det ønskede følger. Med mindre $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, bliver parentesen også strengt positiv for et $\sigma \in P_n$

Sammenfattende har vi, at $\alpha \prec \beta'$, og $[\beta'] \leq [\beta]$. Ved at gentage proceduren kan vi altså lave en følge af $\beta^{(i)}$'er, så for alle positive x_i'er $[\beta] \geq [\beta^{(1)}] \geq [\beta^{(2)}] \geq \cdots \geq [\beta^{(m)}]$ med lighed hvis og kun hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Og $\alpha \prec \beta^{(m)}$. Imidlertid aftager diskrepansen af $\beta^{(i)}$'erne mht. α, så for tilstrækkelig stor m, er $\beta^{(m)} = \alpha$, og beviset for Muirheads sætning er fuldført. $\square$

A.2 Bevis for Jensens ulighed

Vi vil bevise Jensens ulighed for vægtede middelværdier i følgende form:

Sætning A.2.1 (Jensens ulighed)**.** *Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval, og lad $f : I \to \mathbb{R}$ være konveks. Lad $x_1, \ldots, x_n \in I$, og lad $a_1, \ldots, a_n$ være positive reelle tal så $\sum a_i = 1$. Da er*

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i). \tag{A.7}$$

Hvis f er strengt konveks gælder lighedstegn hvis og kun hvis alle x_i'erne er ens.

Bemærkning A.2.2. Det er klart, at $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in I$, da den ligger mellem den største og den mindste af x_i'erne. Dermed giver venstresiden altid mening.

Bevis. Lad os indføre lidt notation. Lad V være mængden af funktioner $I \to \mathbb{R}$, og lad $\mathfrak{G} : V \to \mathbb{R}$ være funktionen givet ved

$$\mathfrak{G}(g) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(x_i)$$

(A.7) kan nu skrives

$$f\left(\mathfrak{G}(\mathrm{id})\right) \leq \mathfrak{G}(f)$$

hvor id betegner funktionen $x \mapsto x$. Ligeledes vil vi skrive 1 for funktionen $x \mapsto 1$. For $g, h \in V$ vil vi skrive $g \leq h$ hvis $\forall x \in I : g(x) \leq h(x)$. Bemærk, at $\mathfrak{G}$ opfylder, at $\mathfrak{G}(g+h) = \mathfrak{G}(g) + \mathfrak{G}(h)$ og $\mathfrak{G}(ag) = a\mathfrak{G}(g)$ for $g, h \in V$ og $a \in \mathbb{R}$ (disse to egenskaber kaldes *linearitet* af $\mathfrak{G}$). $\mathfrak{G}$ opfylder også at hvis $g \leq h$ er $\mathfrak{G}(g) \leq \mathfrak{G}(h)$ (denne egenskab kaldes positivitet), og at $\mathfrak{G}(1) = 1$ ($\mathfrak{G}$ er *normeret*).

Beviset bygger på følgende lemma, hvis bevis vi udskyder:

Lemma A.2.3. *Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være konveks og lad $y \in I$, så y ikke er et endepunkt for I. Da findes en* støttelinie*, dvs. et $c \in \mathbb{R}$, så at for alle $x \in I$:*

$$f(x) \geq f(y) + c(x - y) \tag{A.8}$$

Hvis f er strengt konveks vil der gælde skarp ulighed for $x \neq y$.

Lemmaet siger blot, at der findes en „tangentlinie", som grafen for funktionen ligger over. Nu er det ganske let at bevise Jensens ulighed i den angivne form:

Lad $y = \mathfrak{G}(\mathrm{id})$. Med mindre alle x_i'erne er ens og er endepunkter i I (i så fald er Jensens ulighed triviel), er y ikke et endepunkt i I. Find $c \in \mathbb{R}$ som i lemmaet. Nu gælder for alle $x \in I$

$$f(x) \geq f(y) + c(x - y) \tag{A.9}$$

eller, ækvivalent $f \geq f(y)1 + c(\mathrm{id} - y1)$. Bruges lineariteten og positiviteten af $\mathfrak{G}$ fås

$$\mathfrak{G}(f) \geq \mathfrak{G}(f(y)1 + c(\mathrm{id} - y1)) \tag{A.10}$$
$$= f(y)\mathfrak{G}(1) + c\left(\mathfrak{G}(\mathrm{id}) - y\mathfrak{G}(1)\right) = f(y) + c(y - y) = f\left(\mathfrak{G}(\mathrm{id})\right), \tag{A.11}$$

som viser første del af sætningen. Hvis f er strengt konveks, gælder skarp ulighed i (A.9) undtagen for $x = y$. Med mindre alle x_i'erne er ens er dette tilstrækkeligt til at give skarp ulighed i (A.10). Det er klart, at hvis alle x_i'erne er ens, gælder lighedstegn i Jensens ulighed. Dermed er Jensens ulighed bevist. $\square$

Bemærkning A.2.4. De egenskaber ved $\mathfrak{G}$, vi brugte i beviset, gælder også for andre slags gennemsnit. Specielt gælder beviset også hvis $I = [a, b]$ og V er mængden af *kontinuerte* funktioner $I \to \mathbb{R}$ og $\mathfrak{G}(g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, eller endnu mere generelt $\mathfrak{G}(g) = \int_a^b g(x)v(x)\mathrm{d}x$ hvor $v : I \to \mathbb{R}$ er en ikke-negativ funktion så $\int_a^b v(x)\mathrm{d}x = 1$.

Bevis for lemma A.2.3. Vi får brug for følgende egenskab ved de reelle tal:

Egenskab A.2.5. Lad $A, B \subseteq \mathbb{R}$ være ikke-tomme og antag at $\forall a \in A, b \in B : a \leq b$. Da findes et tal $c \in \mathbb{R}$, så $\forall a \in A, b \in B : a \leq c \leq b$.

Denne egenskab er fundamental for de reelle tal. At bevise den kræver en præcis definition af $\mathbb{R}$, og den kan i denne sammenhæng opfattes som et aksiom.

Lad $x, z \in I$ så $x < y < z$. Da kan y skrives som $y = (1-\lambda)x + \lambda z$, $0 < \lambda < 1$. Vi har nu pr. konveksitet:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f((1-\lambda)x+\lambda z)-f(x)}{(1-\lambda)x+\lambda z - x} \leq \frac{\lambda(f(z)-f(x))}{\lambda(z-x)} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \tag{A.12}$$

På samme måde fås, at

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \tag{A.13}$$

Definer nu $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ved

$$A = \left\{ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \,\middle|\, x \in I, x < y \right\}$$
$$B = \left\{ \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \,\middle|\, z \in I, y < z \right\}$$

Da y ikke var et endepunkt er A og B ikke-tomme. Nu viser (A.12) og (A.13), at A og B er som i egenskab A.2.5. Tag derfor et c som i A.2.5. Nu er påstanden, at dette c kan bruges som c i lemmaet. Vi har nemlig for $x < y$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq c$$

og for $x > y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq c$$

I begge tilfælde følger lemmaet ved multiplikation med $x - y$. For $x = y$ er lemmaet trivielt. Tilfældet hvor f er strengt konveks overlades til læseren [Vink: Indirekte bevis. Vis, at hvis konklusionen *ikke* holdt, ville f være en ret linie mellem x og y]. $\square$

A.3 Bevis for Hölders og Minkowskis uligheder

Sætning 2.1.4 for $p > 1$ fås af sætning A.3.1 ved at sætte $m = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = q$, $x_{i1} = x_i$ og $x_{i2} = y_i$:

Sætning A.3.1 (Hölders ulighed)**.** *Lad $p_1, \ldots, p_m$ være positive reelle tal så $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$. Lad x_{ij} være positive reelle tal for $i = 1, \ldots, n$ og $j = 1, \ldots, m$. Da er*

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{ij} \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_{ij}}^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}$$

Vi vil bevise sætning A.3.1 vha. AG-uligheden for vægtede middelværdier (som følger af Jensens ulighed for vægtede middelværdier (Sætning A.2.1) på helt samme måde som i eks. 2.2.4). Vi har nemlig

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{ij}}{\prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_{ij}}^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}}} &= \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{{x_{ij}}^{p_j}}{\sum_{k=1}^{n} {x_{kj}}^{p_j}} \right)^{\frac{1}{p_j}} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \left(\frac{{x_{ij}}^{p_j}}{\sum_{k=1}^{n} {x_{kj}}^{p_j}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_j} \left(\frac{{x_{ij}}^{p_j}}{\sum_{k=1}^{n} {x_{kj}}^{p_j}} \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j \sum_{k=1}^{n} {x_{kj}}^{p_j}} \sum_{i=1}^{n} {x_{ij}}^{p_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} = 1 \end{aligned}$$

hvor ulighedstegnet stammer fra AG-uligheden. Dermed følger det ønskede ved multiplikation med nævneren. □

Tilfældet hvor $0 < p < 1$ kan reduceres til tilfældet hvor $p > 1$ på følgende måde: Vi har $p' = \frac{1}{p} > 1$ og $q' = \frac{1}{1-p} > 1$ og $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. Sæt $a_i' = (a_i b_i)^p$ og $b_i' = b_i^{-p}$. Nu kan Hölders ulighed bruges på disse tal:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^p b_i^{-p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left((a_i b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} \left(b_i^{-p} \right)^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p}$$

Divider denne ulighed med parentes nr. 2 på højresiden:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^p \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Heraf fås det ønskede ved at opløfte til $\frac{1}{p}$. Tilfældet hvor $p < 0$ fås af tilfældet $0 < p < 1$ ved at bytte om på p og q.

Det overlades til læseren at undersøge, hvornår der gælder lighedstegn i Hölders ulighed.

Minkowskis ulighed siger:

Sætning A.3.2 (Minkowskis ulighed)**.** *Lad* $a_1, \ldots, a_n$ *og* $b_1, \ldots, b_n$ *være ikke-negative reelle tal, og lad* $r \geq 1$*. Da gælder*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

For $r \leq 1$, $r \neq 0$ *gælder den omvendte ulighed.*

For $r = 2$ siger uligheden at længden af en side i en trekant er mindre end summen af længderne af de to andre sider.

Bevis. Vi bruger Hölders ulighed: For $r > 1$ har vi

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^r = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{r-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{r-1}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n}((a_i + b_i)^{r-1})^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n}((a_i + b_i)^{r-1})^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^r\right)^{\frac{1}{r}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^r\right)^{1-\frac{1}{r}}$$

hvoraf det ønskede følger. For $r < 1$, $r \neq 0$ skal ulighedstegnet vendes. □

A.4 Tjebysjevs ulighed

Bemærkning A.4.1. Uligheden er opkaldt efter Пафнутий Львович Чебышев (1821-1894). Følger man den af Dansk Sprognævn anbefalede translitteration, hedder han Pafnutij Lvovitj Tjebysjev. Følger man ISO-standarden, hedder han Pafnutij L'vovič Čebyšev. På engelsk skriver man tit Chebyshev, og generelt kan navnet staves på flere måder end man skulle tro.

Definition A.4.2. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og $b_1, b_2, \ldots, b_n$ være reelle tal. Vi siger, at a og b har *samme ordning*, hvis $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ for alle i, j. Vi siger, at a og b er *omvendt ordnede*, hvis der gælder den omvendte ulighed.

Bemærk, at hvis b'erne er givet ved en funktion af a'erne: $b_i = f(a_i)$ har de samme ordning hvis f er voksende og omvendt ordning hvis f er aftagende.

Sætning A.4.3 (Tjebysjevs ulighed)**.** *Lad* a *og* b *have samme ordning. Da er*

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}$$

Hvis a og b er omvendt ordnede gælder den omvendte ulighed. Der gælder lighedstegn hvis og kun hvis alle a'erne er ens eller alle b'erne er ens

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j b_j}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} (a_i b_i - a_i b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} (a_j b_j - a_j b_i) \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} ((a_i b_i - a_i b_j) + (a_j b_j - a_j b_i)) \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0
\end{aligned}$$

Hvis a og b er omvendt ordnede gælder den omvendte ulighed. □

En anden sætning af samme skuffe:

Sætning A.4.4. *Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og $b_1, b_2, \ldots, b_n$ være reelle tal. Lad $c_1, c_2, \ldots, c_n$ være en permutation af b'erne. Den største værdi af udtrykket*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i$$

opnås hvis a og c har samme ordning, og den mindste værdi opnås hvis de har omvendt ordning.

Bevis. Antag, at der findes i, j så $(a_i - a_j)(c_i - c_j) < 0$. Da vil $a_i c_i + a_j c_j < a_i c_j + a_j c_i$. Dvs. udtrykket bliver *større* ved at ombytte c_i og c_j. Dvs. hvis a og c ikke har samme ordning, har udtrykket ikke den størst mulige værdi. Da der kun er endeligt mange permutationer af b'erne, er der nødvendigvis en permutation der giver en maksimal værdi, og det må følgelig være en permutation der giver a og c samme ordning. Ligeledes for mindsteværdien. □

Appendix B

Supplerende eksempler & opgaver

Eksempel B.0.5. Vis, at for alle $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ gælder $\tan x + \cot x \geq 2$

Eksempel B.0.6. Vis at der for alle $x \in \mathbb{R}$ og $y \in \mathbb{R}_+$ gælder

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{og} \quad \ln y \leq y - 1.$$

Eksempel B.0.7. Vis, at hvis A, B og C er vinklerne i en trekant, gælder

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq 4$$

Eksempel B.0.8. Vis, at blandt trekanter med fast omkreds, har den ligesidede størst areal.

Eksempel B.0.9. Vis at der for alle positive reelle a, b og c gælder

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

Eksempel B.0.10. Lad $x_1, \ldots, x_n$ være positive reelle tal. Vis, at

$$\frac{{x_1}^2}{x_1 + x_2} + \frac{{x_2}^2}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{{x_n}^2}{x_n + x_1} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2}$$

Eksempel B.0.11. Lad x, y, z være positive reelle tal. Vis, at

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z)$$

Eksempel B.0.12. Vis at der for alle positive reelle a, b og c gælder

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Eksempel B.0.13 (IMO 1995, Toronto)**.** Lad a, b og c være positive reelle tal, så $abc = 1$. Vis, at der gælder

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Eksempel B.0.14 (IMO 1964)**.** Lad a, b, c være sidelængder i en trekant. Vis, at

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

Eksempel B.0.15 (IMO 1983)**.** Lad a, b, c være siderne i en trekant. Vis, at

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

Eksempel B.0.16. Regn opgaverne B.0.9 og B.0.12 vha. Muirheads sætning.

[Muirheads sætning er ikke nødvendigvis den smarteste angrebsvinkel på disse opgaver, men de illustrerer et par standardteknikker man kan bruge til at få uligheder på en form hvor Muirheads sætning kan anvendes. Derfor et par hints:

- Multiplicer med abc i B.0.9 for at få uligheden på en form hvor Muirheads sætning kan anvendes.
- B.0.12 er sværere. Problemet er at der står en sum i nævneren. Man kan enten multiplicere uligheden med alle nævnerne og gange ud eller man kan substituere noget passende så summerne forsvinder.]

Eksempel B.0.17. Vis følgende del af 3.1.2: For $0 < r < s < \infty$ gælder $\mathcal{M}_r \leq \mathcal{M}_s$, med lighedstegn hvis og kun hvis alle x_i'erne er ens.

[Vink: Brug Jensens ulighed. Man *kan* bruge monotonisætningen, men så skal man have god tid ...

Hvis du har lyst til at vise resten af 3.1.2 er her et par vink: Brug l'Hospitals regel til at vise at $r \mapsto \ln(\mathcal{M}_r)$ er kontinuert fra højre i 0. For $r \to \infty$ kan man (vise og) bruge vurderingen $n^{\frac{-1}{r}}\mathcal{M}_\infty \leq \mathcal{M}_r \leq \mathcal{M}_\infty$. Brug kontinuiteten og monotonien på $[0;\infty]$ til at slutte kontinuitet og monotoni på $[-\infty; 0]$ og dermed på $\mathbb{R}$.]

Eksempel B.0.18. I ord siger Jensens ulighed: „Hvis f er konveks er det aritmetiske gennemsnit af funktionsværdierne større end funktionsværdien af det aritmetiske gennemsnit“. Hvad nu, hvis man gerne vil erstatte „aritmetisk“ med fx „geometrisk“? Vis, at hvis $\ln \circ f$ er konveks, da er

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)}$$

for alle positive x_i. Vis, at hvis $f \circ \exp$ er konveks, da er

$$f\left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots f(x_n)}{n}$$

Hvad sker der mon, hvis $\ln \circ f \circ \exp$ er konveks? Hvad sker der mon, hvis $x \to f(\frac{1}{x})$, $x \to \frac{1}{f(x)}$ eller $x \to \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$ er konveks?

Eksempel B.0.19. Vis, at der for alle positive, reelle tal a, b og c gælder

$$\sqrt[3]{abc}+1 \leq \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} \leq \left(\frac{\sqrt[3]{a+1} + \sqrt[3]{b+1} + \sqrt[3]{c+1}}{3}\right)^3 \leq \frac{a+b+c}{3}+1$$

Prøv så vidt muligt at formulere beviserne så de generaliserer til flere variable end 3.

Eksempel B.0.20. Lad a, b, c være positive reelle tal, så $abc = 1$. Vis, at

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1$$

Eksempel B.0.21.

(i) $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$. Højresiden er *ikke* symmetrisk, så Muirhead kan ikke umiddelbart anvendes.

(ii) $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{9}$

(iii) $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z}) \geq 64$ hvis $x + y + z = 1$