OM BEVISER

Poul Printz

Enhver, der har stiftet bekendtskab med matematik selv på et relativt beskedent niveau, er klar over, at matematiske beviser udgør et meget væsentligt element af matematikken. De opgaver, man træffer på alle trin af matematikundervisningen, kan stort set inddeles i to kategorier: bevisopgaver og beregningsopgaver. I de første opfordres man til - ud fra visse forudsætninger - at bevise en påstand om en geometrisk figur, en talmængde, en funktion eller en anden matematisk begrebsdannelse. I de andre skal man foretage en beregning, der f.eks. resulterer i en talværdi, men også her indgår der principielt et bevis - nemlig et bevis for, at det fundne resultat er korrekt og udtømmende. Beviser indtager altså en helt central plads i matematikken.

1 Hvad er et matematisk bevis

Der er mange andre end matematikere, der taler om beviser. Politiet kan have beviser for, at en bestemt person har begået en forbrydelse. Klimatologer kan hævde at have leveret et bevis for, at freongasser er i færd med at nedbryde luftens ozonlag. Medicinske forskere kan bevise, at AIDSviruset har sin oprindelse i Afrika, og sociologer kan bevise, at der er en sammenhæng mellem socialt miljø og antallet af forbrydelser.

Men alle disse beviser adskiller sig afgørende fra matematikkens beviser. Først og fremmest kan man aldrig føle sig absolut sikker på de ovennævnte typer af beviser, men må slå sig til tåls med forskellige grader af sandsynlighed for deres rigtighed.

Et matematisk bevis er en række overbevisende argumenter, der ud fra nøje definerede forudsætninger fører frem til rigtigheden af et bestemt udsagn. Hvis man fuldt ud forstår og accepterer de logiske principper, der indgår i beviset, vil man aldrig være i tvivl om den absolutte sandhed af det beviste. I det følgende vil der blive givet er række eksempler på matematiske beviser med fremhævelse af en række vigtige bevismetoder og -teknikker.

2 Det direkte bevis

Et bevis vil oftest formuleres således. Bevis, at for det eller det gælder dette eller hint. Eller med en lidt andet formulering: Hvis noget er sandt, så er noget andet også sandt.

En sætning af formen “Hvis A, så B”, hvor A og B er to udsagn, kaldes en *implikation.* For at vise dens rigtighed skal man godtgøre, at i alle tilfælde, hvor A er sand, da er B det også. Derimod kræves der ingen redegørelse for, hvad der sker, når A er falsk.

Eksempel 2.1. Den retvinklede trekant XYZ med sidelængder x, y og z har arealet $\frac{1}{4}z^2$, hvor z er trekantens hypotenuse. Bevis, at trekantens øvrige vinkler er 45°.

Her er udsagnene A og B åbenbart:

A: Trekanten er retvinklet, og dens areal er $\frac{1}{4}z^2$ (z er hypotenusen) og

B: $\angle X = \angle Y = 45°$.

For at føre et bevis af denne art, vil det oftest være hensigtsmæssigt at *analysere* begge udsagnene A og B. Vi ved, at hvis trekanten er ligebenet - altså $x = y$ - så er vinklerne X og Y begge 45°. Vi kan derfor gennemføre beviset ved at godtgøre, at $x = y$ eller, hvad der er det samme, at $x - y = 0$. Det er en vigtig omskrivning af problemet, for ud fra oplysningerne om trekanten kan vi sige noget om længden af x og y. Da trekanten er retvinklet, kan arealet T udtrykkes ved $\frac{1}{2}xy$, og desuden gælder Pythagoras, så $x^2 + y^2 = z^2$. Heraf fås imidlertid ved brug af oplysningen $T = \frac{1}{4}z^2$, at

$$T = \frac{1}{4}z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}xy.$$

Den sidste ligning kan omskrives til

$$x^2 + y^2 = 2xy \quad \text{eller} \quad (x - y)^2 = 0$$

hvoraf vi endelig slutter, at $x = y$.

Bemærk, at vi ved denne “tilbage–frem” slutningsmåde har arbejdet som tunnelbyggere, der starter fra hver sin side om at mødes.

I bevissituationen kan man beskrive processen således: Analysér udsagnet B og find ud fra analysen et nyt udsagn B_1 med den egenskab, at hvis B_1 er sand, så er B det også. Gå eventuelt videre til B_2, B_3, osv. Afvekslende analyseres udsagnet A, og man kan finde et udsagn A_1, der følger af A og dernæst eventuelt udsagn A_2, A_3 osv., til de to slutningskæder mødes i et fælles udsagn. Hvor lange de to slutningskæder bliver, afhænger naturligvis af problemet, men også af den bevisvej, man vælger at følge, og der kan ofte være valg mellem forskellige muligheder.

Når de to slutningskæder mødes, er det væsentlige arbejde overstået, men det egentlige bevis består i påvisning af en matematisk slutningskæde — og matematikere foretrækker den kortest mulige — der fører fra A til B. I matematiske værker og i facitlister til opgavesamlinger præsenteres dette færdige arbejde, og det kan komme til at tage sig mirakuløst ud. Derved kan sådanne fremstillinger komme til at skræmme læsere med en spirende interesse for matematiske problemer bort. Og det er synd. For de oprindelige løsere af opgaverne har ofte haft de samme problemer med dem, som begynderen nu står over for, og de færdige løsninger afslører ikke den arbejdsproces, der ligger bag. Og det er denne proces med overvinding af problemer, der gør det spændende og indsigtsgivende at beskæftige sig med matematikopgaver.

Eksempel 1 fortsat. Ovenfor indså vi, at vi kunne gennemføre beviset. I sin færdige form vil det f.eks. kunne se således ud:

"Da trekanten er retvinklet, er $x^2 + y^2 = z^2$. Tillige er trekantens areal T givet ved $T = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{4}z^2$, hvoraf $2xy = z^2$. Heraf følger, at $x^2 + y^2 = 2xy$ eller $(x - y)^2 = 0$ eller $x = y$. Derfor er trekanten ligebenet og vinklerne ved grundlinjen lige store".

Beviset kan naturligvis udformes mere eller mindre kortfattet afhængigt af det publikum, man skriver for.

For at kunne gennemføre et bevis må man have en vis matematisk baggrundsviden. I eksempel 1 må man således kende den pythagoræiske læresætning, formlen for arealet af en retvinklet trekant, og man må kunne foretage nogle simple algebraiske omskrivninger. Desuden må man kende sætningen, at i en ligebenet trekant er vinklerne ved grundlinjen lige store. Det er klart, at jo mere omfattende ens matematiske viden er, og jo mere opfindsomt man er i stand til at kombinere dens enkelte elementer, jo bedre er man i stand til at føre matematiske beviser.

Eksempel 2.2. Bevis, at i en vilkårlig trekant ABC gælder uligheden

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c),$$

hvor m_a, m_b og m_c er medianernes længder, og a, b og c er sidelængderne.

Udsagnet A udsiger her blot, at punkterne A, B og C danner en trekant. Vi må derfor benytte vor viden om trekanters sider og medianer. I trekanter gælder nogle simple uligheder om sidelængderne kaldet *trekantsulighederne.* Det vil derfor være hensigtsmæssigt at betragte passende trekanter, hvori medianerne indgår.

Betragter vi trekant ACM, hvor M er midtpunktet af linjestykket BC, fås:

$$m_a + \frac{a}{2} > b$$

Vi må kunne udlede ganske lignende udtryk for m_b og m_c:

$$m_b + \frac{b}{2} > c$$

$$m_c + \frac{c}{2} > a$$

Adderer vi disse uligheder, får vi

$$m_a + m_b + m_c > \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Det er en ulighed, der minder om det ønskede. Men det er ikke godt nok. Vi har kun fået vist, at medianernes sum er større end den halve omkreds. Den skulle vises at være større end tre fjerdedele af omkredsen. Der må åbenbart inddrages mere viden om medianerne. Vi kan skæve til, at der fremkommer en ulighed, hvori tallet 3 indgår. En kendt sætning siger, at medianerne i en trekant deler hinanden i forholdet 2 til 1. Betragter vi AOC, hvor O er medianernes skæringspunkt, er $AO = \frac{2}{3}m_a$ og $CO = \frac{2}{3}m_c$, så det gælder, at

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b$$

Ved at betragte COB og BOA fås på samme måde

$$\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a$$

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$$

Ved addition af disse uligheder fås $\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c$ og dermed den forlangte ulighed.

Øvelse 2.3. Bevis uligheden $m_a + m_b + m_c < a + b + c$.
(Vink: Bestem passende trekanter, hvori to af siderne indgår.)

3 Det indirekte bevis

Ikke sjældent kan det være vanskeligt eller uoverskueligt at gennemføre et direkte bevis for en sætning på formen: Hvis A så B. Man bør så overveje, om det er bekvemmere at gennemføre et *indirekte bevis*

Eksempel 3.1. Bevis, at hvis $2^n - 1$ er et primtal, så er n et primtal.

Umiddelbart er det ikke let at se, hvordan man skal gennemføre et direkte bevis. Vi antager derfor omvendt, at n *ikke* er et primtal, altså n er et sammensat tal, så vi kan skrive $n = n_1 n_2$. Så er imidlertid $2^n - 1 = 2^{n_1 n_2} - 1 = (2^{n_1})^{n_2} - 1$. Men $(2^{n_1})^{n_2} - 1$ er delelig med $2^{n_1} - 1$, så $2^n - 1$ er et sammensat tal. Vi ser altså, at antagelsen af, at n er sammensat, fører til, at $2^n - 1$ er sammensat. Så må vi omvendt kunne slutte, at hvis $2^n - 1$ er et primtal, så er også n et primtal.

Eksempel 3 viser et indirekte bevis. I stedet for at vise sætningen: Hvis A så B eller udtrykt ved *implikationspil* $A \Rightarrow B$, vises i stedet: Hvis B *ikke* gælder, så gælder A *heller ikke*, eller implikationen non$B \Rightarrow$ non$A$.

Ofte udtrykker man det således, at man går ud fra, at B ikke gælder, og ved logiske slutninger når man frem til en modstrid med, at A er gyldig.

Eksempel 3.2. Bevis, at brøken $\frac{21n+4}{14n+3}$, hvor n er et naturligt tal, ikke kan forkortes for nogen værdi af n.

Lad os antage, at brøken kan forkortes for en passsende værdi af n. Så vil brøken

$$\frac{2(21n+4)}{3(14n+3)} = \frac{42n+8}{42n+9}$$

også kunne forkortes. I den fremkomne brøk er tælleren imidlertid netop én mindre end nævneren, og den kan derfor ikke forkortes. Dermed er vi nået til en modstrid, og vi indser, at den oprindelige brøk ikke kan forkortes.

Øvelse 3.3. Vi antager, at n er et helt positivt tal (et naturligt tal). Bevis under denne forudsætning, at hvis n^2 er lige, så er n også lige.

Kan beviset gennemføres, hvis vi stryger forudsætningen om, at n er et naturligt tal?

Øvelse 3.4. I en by kan man komme med bus fra A til B, men man kan ikke komme med bus fra A til C. Bevis, at man ikke kan komme med bus fra B til C.

Øvelse 3.5. Vis, at hvis n^2 kan deles med 3 (hvor n er et naturligt tal), så er n deleligt med 3.

Vink: Et tal, der ikke er deleligt med 3 kan skrives som enten $3m+1$ eller $3m-1$.

Øvelse 3.6. Bevis, at ligningen $x^2 - y^2 = 2$ ikke har heltallige løsninger.

Det indirekte bevis er overordentlig meget anvendt i matematik. Mange af matematikkens "store" sætninger bevises indirekte. Det gælder således Euklids berømte bevis for, at der er uendelig mange primtal, og Cantors bevis for, at reelle tal ikke er tællelige, der begge er medtaget i de fleste elementære lærebøger. Vi vil her give et bevis for en berømt sætning, som normalt ikke ses i sådanne bøger.

Sætning 3.7 (Aritmetikkens fundamentalsætning)**.** *Ethvert helt tal kan på én og kun én måde opløses i primfaktorer.*

Bevis. For de fleste uden dybere indsigt i matematikken lyder sætningen ret indlysende, og det er også rigtigt for første del af den. Det er let at vise, at et tal kan opløses i primfaktorer, altså kan skrives

$$n = p_1 p_2 p_3 \dots p_r,$$

hvor $p_1, p_2, \dots, p_r$ er ikke nødvendigvis forskellige primtal. Vi ræsonnerer således: Hvis n selv er et primtal, er sagen klar. Hvis n ikke er et primtal, findes der primtal, der går op i n. Det kan højst være endelig mange, da intet tal større end n kan gå op i n. Vi betegner det *mindste* primtal, der går op i n med p_1. Så er $n = p_1 m_1$. På denne måde fortsættes til vi har $n = p_1 p_2 p_3 \dots p_r$, og vi så endda har opnået, at p'erne optræder efter størrelse.

Eksempel 3.8. Denne opløsning vil f.eks. for tallet 2100 foregå således:

$$2100 = 2 \cdot 1050 = 2 \cdot 2 \cdot 525 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Det kan se ud, som om vi samtidig har fået bevist den anden del af hovedsætningen, at denne opløsning (naturligvis på nær faktorernes rækkefølge) kun kan foregå på én måde. Vi har fået primfaktorerne frem i rækkefølge. Så simpelt er det imidlertid ikke.

For at belyse dette nærmere vil vi betragte alle hele tal, der kan skrives på formen $3n+1$, dvs tallene $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, \ldots$ eller med andre ord de tal, der giver resten 1 ved division med 3. Vi tænker os, at vi kun kender disse tal og ikke har kendskab til de mellemliggende tal af den naturlige talfølge. Så vil vi kalde alle de tal i rækken, som ikke er delelige med andre tal end 1 og tallet selv, for *primtal*, mens de resterende tal er *sammensatte*. Efter denne definition er tallene $4, 7, 10, 13, 19, 22, 25$ osv. primtal, mens $16, 28, 40, 49$ osv. er sammensatte. Vi kan nu på samme måde som ovenfor bevise, at primtalsopløsning er mulig blandt disse tal. Betragt f.eks. tallet 100. Det mindste tal, der går op, er tallet 4, så $100 = 4 \cdot 25$ er en primtalsopløsning. Men vi kan også opløse $100 = 10 \cdot 10$. Tallet 100 har altså to forskellige primtalsopløsninger, og der er intet i beviset ovenfor, der garanterer, at noget sådant ikke også er muligt blandt de naturlige tal.

Eksempel 3.8 viser, at man meget let snydes af plausible argumenter. Vi kan åbenbart ikke uden videre tillade os at sige, at når vi for et naturligt tal finder primfaktorerne p_1, p_2, p_3 osv. i rækkefølge nede fra, så har vi fundet samtlige primfaktorer.

For at præsentere et bevis må der altså inddrages egenskaber ved de naturlige tal, som talrækken $1, 4, 7, 10, \ldots$ ikke besidder.

Vi vil give et bevis for primtalsopløsningens entydighed. Beviset føres indirekte. Vi tænker os altså, at der findes tal med to forskellige primtalsopløsninger. Findes der sådanne tal, må der også være et *mindste* sådant tal. Lad det være tallet a, hvor altså

$$a = p_1 p_2 p_3 \ldots p_r = q_1 q_2 q_3 \ldots q_m,$$

og alle tallene $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ er primtal. Vi kan nu slutte, at alle p'erne er forskellige fra alle q'erne, for ellers kunne vi forkorte den fælles faktor bort og dermed finde et mindre tal end a med to primtalsopløsninger. Vi tænker os p'erne og q'erne opstillet efter størrelse, og vi tænker os, at $p_1 < q_1$. Så er p_1 det mindste primtal, der fremkommer i de to primfaktoropløsninger. Dividerer vi p_1 op i $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$, fås en række divisionsligninger med rest

$$q_1 = s_1 p_1 + r_1, q_2 = s_2 p_1 + r_2, \cdots, q_m = s_m p_1 + r_m.$$

Her er alle r'erne mindre end p_1. Multiplicerer vi de fremkomne ligninger, får vi

$$a = q_1 q_2 q_3 \cdots q_m = (s_1 p_1 + r_1)(s_2 p_1 + r_2) \cdots (s_m p_1 + r_m) = p_1 p_2 p_3 \cdots p_r.$$

Ganges parentserne ud, fås en række led, der alle indeholder p_1, pånær leddet $r_1r_2r_3\cdots r_m$. Samles disse led til leddet p_1S har vi

$$a = r_1r_2r_3\cdots r_m + p_1S = p_1p_2p_3\cdots p_r$$

eller

$$R = r_1r_2r_3\cdots r_m = p_1(p_2p_3\cdots p_r - S)$$

Tallet R er mindre end a. Opløser vi r'erne i primfaktorer, kan ingen af disse være p_1, da alle r'er er mindre end p_1. I $p_1(p_2p_3\cdots p_r - S)$ fremkommer imidlertid p_1 som faktor. Dermed har vi bevist, at tallet R har to forskellige primtalsopløsninger, og det er i modstrid med, at a var det mindste tal med denne egenskab.

Øvelse 3.9. Overvej på hvilket punkt argumenterne i beviset ovenfor for primtalsopløsningens entydighed svigter for talmængden $1, 4, 7, 10, \ldots$

4 Induktion

For nylig blev der sat verdensrekord i dominobrikvæltning, og rekordsætteren sikrede sig en plads i Guiness' rekordbog. Han havde stillet i tusindvis af dominobrikker på højkant og omhyggeligt sørget for, at det for hver eneste brik gjaldt, at hvis den væltede, så væltede dens nabo også. Da alle brikker efter flere dages arbejde var stillet op, væltede han den første brik, og efter 13 minutters forløb var alle brikker væltet.

En række dominobrikker, der vælter, illustrerer udmærket grundideen i det matematiske induktionsbevis. Kun behøver matematikere ikke som dominospilleren at nøjes med et et endeligt antal brikker.

Eksempel 4.1. Bevis, at for ethvert helt positivt tal gælder formlen

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (2n-1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

Beviset skal føres for alle n - altså for uendelig mange værdier - og det lyder jo ret uoverkommeligt. Men vi kan jo prøve for nogle værdier og se, om det lyder rimeligt.

For $n = 1$ har vi $1 \cdot 1 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

For $n = 2$ har vi $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 7$

For $n = 3$ har vi $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 22 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11 = 22$

Formlen passer altså "i begyndelsen", men der er jo langt til uendelig, så det er åbenbart uoverkommeligt at prøve alle værdier af.

Man kan imidlertid nå til et almengyldigt bevis ved at gennemføre et bevis for det "n'te skridt". Det forløber således:

Vi antager, at formlen er gyldig for $n = p$, dvs.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + p(2p-1) = \frac{1}{6}p(p+1)(4p-1).$$

For $n = p + 1$ gælder da

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + p(2p-1) + (p+1)(2(p+1)-1) \\
=&\frac{1}{6}p(p+1)(4p-1) + (p+1)(2(p+1)-1) = \frac{1}{6}(p+1)(4p^2 - p + 12p + 6) \\
=&\frac{1}{6}(p+1)(p+2)(4p+3) = \frac{1}{6}(p+1)(p+2)(4(p+1)-1)
\end{aligned}$$

Det sidste er imidlertid formlen, vi ønsker at bevise, for $n = p + 1$. Formlen gælder altså for $n = p + 1$, hvis den gælder for $n = p$. Dermed er induktionsskridtet udført og formlens almengyldighed bevist.

Et induktionsbevis består altså af to dele: Man beviser, at formlen gælder "i begyndelsen". Dernæst beviser man, at når den gælder for en tilfældig værdi, så gælder den *altid* for den næste værdi. Ganske som ved analogien med dominobrikkerne har man dermed sikret sig, at den gælder for alle værdier.

Eksempel 4.2. Man vil måske være tilbøjelig til uden bevis at tro på gyldigheden af en sætning, hvis den gælder for et stort antal n, men man kan naturligvis aldrig føle sig sikker.

Matematikeren Goldbach fremsatte i 1752 den hypotese, at ethvert *ulige* tal større end 1 kan skrives som en sum af et primtal og 2 gange et kvadrat tal, altså $n = p + 2 \cdot a^2$.

Han kunne ikke bevise det, men det stemte så højt op i talrækken, han orkede at prøve efter. Det viser sig, at antagelsen holder for ulige tal op til 5777. For 5777 gælder den imidlertid ikke, hvad man relativt let kan afgøre selv, da man kan afprøve kvadrattallene op til 53^2. Det viser sig imidlertid, at 5777 og 5993 er de eneste undtagelser fra reglen op til 121000.

I 1919 fremsatte matematikeren Polya en anden formodning. Når man opløser et tal i primfaktorer - f.eks. $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ - er der enten et lige antal faktorer eller et ulige antal. Når man prøver talrækken nedefra, opdager man, at der hele tiden er flest tal med et ulige antal primfaktorer, og Polya fremsatte den formodning, at dette ville gælde vilkårligt højt op i talrækken. I 1960 lykkedes det ved forenet brug af avanceret talteori og store computere at vise, at af tallene op til 906180359 har præcis halvdelen et lige antal primfaktorer, så Polyas formodning er altså forkert.

Eksempel 4.3. En følge af positve hele tal $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ er givet ved, at $a_1 = 0, a_2 = 6$ og $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$. Vis, at det almindelige element a_n kan udtrykkes ved formlen

$$a_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n.$$

Dette vises ved induktion. I "begyndelsen" finder man, at

$$a_1 = 2^1 + 2 \cdot (-1)^1 = 0 \quad \text{og} \quad a_2 = 2^2 + 2\dot{(} - 1)^2 = 6,$$

så formlen passer der. Antages formlen at være rigtig for $n = p$ og $n = p + 1$, fås

$$\begin{aligned}
a_{p+2} = a_{p+1} + 2a_p = & \quad 2^{p+1} + 2\cdot(-1)^{p+1} + 2\cdot(2^p + 2\cdot(-1)^p) \\
= & \quad 2\cdot 2^{p+1} + 2\cdot(-1)^{p+1} - 4\cdot(-1)^{p+1} \\
= & \quad 2^{p+2} - 2\cdot(-1)^{p+1} \\
= & \quad 2^{p+2} + 2\cdot(-1)^{p+2}.
\end{aligned}$$

Hermed er induktionsskridtet gennemført; formlen er altså rigtig for $n = p+2$, hvis den er rigtig for $n = p$ og $n = p+1$. Da den tillige er rigtig for $n = 1$ og $n = 2$, er den gyldig for alle n.

Øvelse 4.4. Formlen $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ siges at bestemme følgen $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ ved *rekursion*. Et eksempel af lignende art er den berømte Fibonaccifølge, der dukker op mange steder i matematikken. Her er $a_1 = a_2 = 1$ og $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Bevis ved induktion, at det almindelige led kan skrives $a_n = \alpha r^n + \beta s^n$, hvor r og s er rødderne i andengradspolynomiet $x^2 = 1 + x$. Vis dernæst, at $\alpha = \sqrt{5}/5$ og $\beta = -\sqrt{5}/5$.

Øvelse 4.5. Overvej, om følger givet ved en rekursionsformel af typen

$$a_{n+2} = m_1 \cdot a_{n+1} + m_2 \cdot a_n,$$

hvor m_1 og m_2 er vilkårlige hele tal, altid har det almindelige led bestemt ved en formel af typen $\alpha r^n + \beta s^n$.

Eksempel 4.6. Det er ved et induktionsbevis vigtigt, at man foruden induktionsskridtet sikrer sig gyldigheden i "begyndelsen". Vi betragter formlen

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n \geq n!$$

Vi antager, at formlen er gyldig for n og har derefter

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \\
\frac{n+1}{2}n!(1+\frac{1}{n})^n = (n+1)!\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n \geq (n+1)!
\end{aligned}$$

hvor vi ved den sidste vurdering har benyttet, at for ethvert n er $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, der let kan bevises ved differentialregning (eller binomialformlen) og kendes fra de fleste lærebøger. Induktionsskridtet lader sig altså gennemføre, men for $n = 1, n = 2$ og $n = 3$ har vi, at

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 \geq 1! \quad ; \quad 1^2 \geq 2! \quad ; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 \geq 3!$$

der alle er falske. Det samme gælder for $n = 4$ og $n = 5$. Det lover jo ikke godt, men for $n = 6$ har vi, at $3^6 = 729 > 6! = 720$.

Sætningen gælder altså for $n = 6$, og vi har derfor bevist, at den gælder for alle $n \geq 6$.
Også for formlen $(n/3)^n \geq n!$ kan man gennemføre induktionsskridtet, men alligevel er denne formel falsk for alle n.

Eksempel 4.7. Vi vil med induktion bevise, at enhver tællelig mængde $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ består af lige store tal.
For $n = 1$ er der kun ét tal, så her er sætningen rigtig. Antag dernæst, at enhver talmængde på $n = p$ elementer består af lige store tal, så vi vil vise, at enhver talmængde med $n = p + 1$ elementer også består af lige store tal. Vi betragter hertil illustrationen nedenfor:

$$\overbrace{a_1 a_2 \ldots a_p}^{p}\, a_{p+1} \quad \text{og} \quad a_1\, \overbrace{a_2 a_3 \ldots a_{p+1}}^{p}$$

Hver af de markerede mængder på p elementer indeholder lige store tal ifølge induktionsantagelseen. Men disse mængder lapper over hinanden, derfor må alle tallene være lige store. Dermed er induktionsskridtet gennemført og beviset tilendebragt.
Resultatet er åbenlyst forkert, så der må være noget galt i ræsonnementet. Fejlen er, at man ikke har sikret sig, at induktionsargumentet gælder for hvert n. For skridtet fra $n = 1$ til $n = 2$ gælder det ikke, da de to mængder i dette tilfælde ikke lapper over hinanden.

$$\overbrace{a_1}^{1}\, a_2 \quad \text{og} \quad a_1\, \overbrace{a_2}^{1}$$

Det svarer til, at den anden dominobrik ikke vælter, når den første gør det, og så nytter det naturligvis ikke noget, at alle de følgende ville vælte, hvis den foregående gjorde det.
Hvis vi om en talmængde ved, at to vilkårlige af dens tal er lige store, kan vi derimod slutte, at alle tallene er lige store.

En af talteoriens grundpiller er den såkaldte *Fermats lille sætning*. Den siger, at for ethvert primtal p og for ethvert naturligt tal n er $n^p - n$ deleligt med p. Med kendskab til binomialformlen kan vi bevise denne sætning ved induktion (den er ellers ikke nem at bevise uden nærmere kendskab til talteori). For $n = 1$ fås $1^1 - 1 = 0$, hvori selvfølgelig p går op.
Vi antager dernæst at $n^p - n$ er delelig med p og betragter dernæst $(n+1)^p - (n+1)$. Ifølge binomialformlen er

$$(n+1)^p = n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} n + 1^p,$$

hvor alle binomialkoefficienterne $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}$ er delelige med p. Vi kan derfor skrive

$$(n+1)^p = n^p + 1^p + p \cdot f(n)$$

hvor $f(n)$ er et polynomium med heltallige koefficienter. Men dermed er

$$(n+1)^p - (n+1) = n^p - n + p \cdot f(n).$$

Her går p op i $p \cdot f(n)$ og ifølge induktionsantagelsen også i $n^p - n$. Dermed er induktionsskridtet fuldført, og sætningen er bevist.
Det er måske ikke klart, at vi i ovenstående bevis har benyttet, at p er et primtal. Det har vi imidlertid i bemærkningen om, at binomialkoefficienterne $\binom{p}{q} = \frac{p!}{q! \cdot (p-q)!}, 0 < q < p$, alle er delelige med p. Binomialkoefficienten $\frac{p!}{q! \cdot (p-q)!}$ er et helt tal, og p er større end q. Derfor kan faktoren p i tælleren ikke forkortes væk af nogen faktor i nævneren. Den må derfor indgå som faktor i binomialkoefficienten. Beviset kan således ikke bruges for et sammensat tal.
F.eks. er $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$ ikke delelig med 6.

Øvelse 4.8. Vis ved induktion, at for alle naturlige tal n gælder
a) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ er delelig med 7
b) $3^n + 4^{2n+3}$ er delelig med 13.

Øvelse 4.9. Vis, at for $n > 1$ gælder

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Øvelse 4.10. Vis, at for ethvert naturligt tal n gælder

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Øvelse 4.11. En talfølge er bestemt ved $a_1 = 2$ og $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ for $n \geq 2$.
Vis, at for $n > 1$ gælder

$$1 < a_n < 1 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$