Tip til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Talteori

Talteori handler om de hele tal, og særligt om hvornår et helt tal går op i et andet helt tal. Derfor spiller primtallene en helt central rolle i talteori.

Her præsenteres idéer til hvordan man løser talteoriopgaver til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen. Det er en forudsætning for at arbejde med disse tip til 2. runde at du allerede har arbejdet med *Talteori - Tip til 1. runde*.

For at blive god til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er det allervigtigste ligesom til 1. runde at løse mange øvelser og opgaver, og derfor er der også en masse øvelser der træner teori, og mere udfordrende opgaver. Mange af opgaverne har været stillet som opgaver til 2. runde.

Til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er der fem opgaver som skal løses på fire timer. De er alle svære fordi man skal være kreativ og kombinere ting man ikke plejer, og så er det desuden en udfordring at skrive en god besvarelse hvor man argumenterer korrekt matematisk. Der er løsninger til alle opgaver bagerst så du kan se hvordan en fuldstændig besvarelse kan se ud, men læs dem først når du selv har arbejdet længe med en opgave.

1 Rest ved division og restklasser

Defintion af rest Når vi dividerer 33 med 7 får vi rest 5 da $33 = 4 \cdot 7 + 5$, og når vi dividerer 20196 med 10 får vi rest 6 da $20196 = 2019 \cdot 10 + 6$.

Mere generelt gælder at hvis m er et helt tal, og n er et positivt helt tal, så er r resten ved division af m med n hvis

$$m = q \cdot n + r,$$

hvor q er et helt tal og $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Hvis $r = 0$, siger vi at n er *divisor* i m, eller at m er *delelig med* n.

I talteori kan det nogle gange betale sig kun at betragte resten af et tal ved division med et bestemt positivt helt tal n og ikke selve tallet.

Eksempel Hvis vi fx kun er interesseret i resten af et positivt heltal når vi dividerer med 10, så betyder det at vi kun ser på sidste ciffer og dermed ikke ser forskel på 2019483 og 13.

Når vi kun er interesseret i resten ved division med 100, kan vi ikke se forskel på 104768, 193868, 168 og -32. Læg mærke til at -32 også har rest 68 ved division med 100 da $-32 = -1 \cdot 100 + 68$.

Mængden af tal der har rest 68 ved division med 100, kalder vi 68-restklassen ved division med 100, og den er

$$\{\dots, -232, -132, -32, 68, 168, 268, 368, \dots\}.$$

Defintion af restklasse Lad n være et positivt helt tal, og r et tal blandt $0, 1, \dots, n-1$.

r-restklassen ved division med n er mængden af tal der har rest r ved division med n, dvs.

$$\{\dots, -2 \cdot n + r, -1 \cdot n + r, 0 \cdot n + r, 1 \cdot n + r, 2 \cdot n + r, 3 \cdot n + r, \dots\}.$$

Øvelse 1.1. Bestem resterne af 11, 100 og -11 ved division med 7.

Øvelse 1.2. Bestem restklassen der har rest 5 ved division med 1000.

Øvelse 1.3. Inddel alle hele tal i tre restklasser ved division med 3.

Øvelse 1.4. Bestem restklassen der har rest 2 ved division med 9.

Øvelse 1.5. Undersøg om 101, 332 og 44444 har samme rest ved division med 11.

Eksempel på regning med restklasser Det smarte ved at inddele i restklasser er at vi kan regne med restklasser. Hvis vi fx har et tal a der har rest 2 ved division med 7, og et tal b der har rest 5 ved division med 7, så kan vi nemt finde resten af $a+b$, $a-b$ og ab selv om vi ikke ved andet om a og b.

Sum Resten af $a+b$ ved division med 7 er resten af summen af deres rester $2+5=7$, dvs. den er 0, da $7=1\cdot 7+0$.

Differens Resten af $a-b$ ved division med 7 er resten af differensen af deres rester $2-5=-3$, dvs. den er 4, da $-3=-1\cdot 7+4$.

Produkt Resten af $a\cdot b$ ved division med 7 er resten af produktet af deres rester $2\cdot 5=10$, dvs. den er 3, da $10=1\cdot 7+3$.

Inden vi beviser hvorfor det er sandt, formulerer vi det som en generel sætning.

Sætning om regning med rester Lad n være et positivt helt tal, og lad a og b være to hele tal som har rest henholdsvis r_a og r_b ved division med n.

Sum Resten af $a+b$ ved division med n er resten af r_a+r_b.

Differens Resten af $a-b$ ved division med n er resten af r_a-r_b.

Produkt Resten af $a\cdot b$ ved division med n er resten af $r_a\cdot r_b$.

Bevis At resterne af a og b ved division med n er henholdsvis r_a og r_b, betyder at

$$a=q_a\cdot n+r_a \quad \text{og} \quad b=q_b\cdot n+r_b,$$

hvor q_a og q_b er hele tal.

Sum Derfor er

$$a+b=(q_a\cdot n+r_a)+(q_b\cdot n+r_b)=(q_a+q_b)\cdot n+(r_a+r_b).$$

Vi kan derfor se af definitionen på rest at vi får samme rest for $a+b$ og r_a+r_b ved division med n.

Produkt Med samme princip fås

$$\begin{aligned} a\cdot b &= (q_a\cdot n+r_a)\cdot(q_b\cdot n+r_b)\\ &= q_a\cdot n\cdot q_b\cdot n+q_a\cdot n\cdot r_b+q_a\cdot n\cdot r_a+r_a\cdot r_b\\ &= (q_a\cdot q_b\cdot n+q_a\cdot r_b+q_a\cdot r_a)\cdot n+r_a\cdot r_b \end{aligned}$$

Da tallet i parentesen i sidste linje er et helt tal, giver definitionen af rest at vi får samme rest for $a\cdot b$ og $r_a\cdot r_b$ ved division med n.

Øvelse 1.6. Lav selv beviset for differens.

Eksempel Hvis vi betragter de fire restklasser ved division med 4, kan vi lave et skema for rest ved sum og produkt:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Hvis man ser på resterne ved produkt, kan man se at resten ved division med 4 af produktet af to tal med rest 3 giver 1, fordi $3\cdot 3=9=2\cdot 4+1$.

Øvelse 1.7. Betragt restklasserne ved division med 5, og lav skemaer for rest ved sum og produkt som ovenfor.

Øvelse 1.8. Et positivt tal n har rest 17 ved division med 100. Bestem resten ved division med 5.

Øvelse 1.9. Et positivt tal n har rest 2 ved division med 4 og rest 1 ved division 3. Er det muligt at afgøre hvilken rest n har ved division med 12, eller er der flere muligheder?

Opgave 1.1. Georg har en plade med tallene fra 1 til 50. Georg må strege et tal ud hvis han kan danne det af tallet 2 ved at udføre én eller flere regneoperationer hvor han enten ganger med 10 eller trækker 3 fra.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	~~26~~	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Hvilke tal på pladen kan Georg strege ud? (Georg Mohr-Konkurrencen 2017)

Opgave 1.2. Georg starter med tallet 17, og han må benytte følgende to regneoperationer så mange gange han vil: Han må gange tallet med 7, og han må trække 6 fra. Er det muligt for Georg at nå frem til tallet 7?

2 Sidste ciffer

Sidste ciffer i talfølge Hvis vi ser på talfølgen

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, \ldots$$

så bliver de enkelte tal ret hurtigt meget store og uoverskuelige at udregne, men det er faktisk ikke svært at finde sidste ciffer, dvs. at finde resten ved division med 10.

Vi ved fra sætningen om regning med rester at hvis vi ganger to store tal sammen og blot ønsker at finde resten af produktet ved division med 10, så kan vi blot gange resterne af hver af faktorerne sammen.

Tallet $3^1 = 3$ har rest 3. Tallet $3^2 = 9$ har rest 9. Tallet $3^3 = 27$ har rest 7. Indtil videre gik det nemt, men for at det skal forsætte simpelt, skal vi nu huske at vi blot kan regne videre med resten og ikke med tallet selv. Tallet $3^4 = 3 \cdot 3^3$ må have samme rest som $3 \cdot 7 = 21$, dvs. rest 1. Tallet $3^5 = 3 \cdot 3^4$ må have samme rest som $3 \cdot 1 = 3$, dvs. rest 3. Tallet $3^6 = 3 \cdot 3^5$ må have samme rest som $3 \cdot 3 = 9$, dvs. rest 9. Vi kan fortsætte på denne måde, men faktisk kan vi allerede nu se at der er et mønster i resterne, nemlig

$$3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 9, \ldots.$$

Der er altså en periode med længde 4 som gentages igen og igen. Hvis vi fx ønsker at finde sidste ciffer i 3^{2019}, ja så skal vi blot konstatere at 2019 har rest 3 ved division med 4, dvs. 3^{2019} må have samme sidste ciffer som 3^3, dvs. 7.

Sidste ciffer i kvadrattal Kvadrattallene er de tal der kan skrives som n^2, hvor n er et helt tal. Dvs. $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$.

For at undersøge hvilke cifre de kan slutte på, dvs. resten ved division med 10, kan vi ifølge sætningen om regning med rester nøjes med at se på sidste ciffer i anden. Der er kun ti muligheder for sidste ciffer, nemlig $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, og hvis vi tager disse i anden fås $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$. Sidste ciffer i et kvadrattal kan altså være $0, 1, 4, 5, 6, 9$, men aldrig $2, 3, 7, 8$.

Øvelse 2.1. Hvilket ciffer slutter tallet 6^{1000} på?

Øvelse 2.2. Hvilke cifre kan fjerdepotenser slutte på? (En fjerdepotens er et tal på formen n^4, hvor n er helt tal.)

Opgave 2.1. Hvad er det sidste ciffer i 2007^{2007}? (Georg Mohr-Konkurrencen 2007)

Opgave 2.2. En følge er givet ved at $a_1 = 2$ og $a_n = a_{n-1}^2 + 1$, for $n = 2, 3, 4, \ldots$. Hvad er sidste ciffer i a_{2020}?

Næstsidste ciffer i kvadrattal Hvis vi i stedet ønsker at undersøge hvilke cifre der kan være det næstsidste i et kvadrattal, så kan vi se på antallet af 10'ere i resten ved division med 100. Der er alt for mange rester ved division med 100 til at vi har lyst til at gå dem alle igennem. Derfor bemærker vi i stedet at resten r af et positivt helt tal n ved division med 100 kan skrives som $r = 10y + x$ hvor $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Altså har kvadrattallene samme rester som

$$r^2 = (10y + x)^2 = 100y^2 + 20xy + x^2.$$

Da $100y^2$ er et helt antal hundreder, bidrager det ikke resten. Man kan få næstsidste ciffer til at være alle de lige cifre $0, 2, 4, 6, 8$ ved at vælge henholdsvis $y = 0, 1, 2, 3, 4$ sammen med $x = 1$.

Hvis det næstsidste ciffer skal være ulige, så skal x^2 bidrage med et ulige antal 10'ere, da $20xy$ bidrager med et lige antal 10'ere. Hvis vi fx vælger $x = 4$, så bidrager $x^2 = 16$ med én 10'er. I dette tilfælde er

$$20xy + x^2 = 80y + 16 = 10(8y + 1) + 6,$$

dvs. næstesidste ciffer er sidste ciffer i $8y + 1$. Det er faktisk muligt at få alle ulige cifre $1, 3, 5, 7, 9$ som næstesidste ciffer i et kvadrattal ved at vælge henholdsvis $y = 5, 4, 3, 2, 1$ og $x = 4$. Næstsidste ciffer i et kvadrattal kan derfor være alle ti cifre i modsætning til sidste ciffer som der er begrænsninger på.

Opgave 2.3. Om et positivt helt tal n vides at næstsidste ciffer i n^2 er 7. Hvad er sidste ciffer i n^2?
(Georg Mohr-Konkurrencen 1996)

3 Primtal og primfaktoropløsning

Primtallene spiller som sagt en helt central rolle i talteori, og derfor genopfrisker vi lige det centrale om primtal fra *Tip til 1. runde* og tilføjer flere regler om primtal.

Definition af primtal Et positivt heltal større end 1 kaldes et primtal hvis de eneste positive divisorer i tallet er 1 og tallet selv. De første ti primtal er derfor 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Definition af primfaktoropløsning At *primfaktoropløse* et tal betyder at skrive det som et produkt af primtal. Fx er primfaktoropløsningen af 60 lig med $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, primfaktoropløsningen af 13 lig med 13 og primfaktoropløsningen af 72 lig med $2^3 \cdot 3^2$.

Generelt er *primfaktoropløsningen* af et postivt heltal n, $n > 1$,

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

hvor p_i' erne er primtal, og α_i'erne er positive heltal.

Sætning

Primfaktoropløsningen Alle positive heltal større end 1 har en primfaktoropløsning, og den er entydig pånær rækkefølgen af faktorerne.

Primtal som divisor Hvis et primtal p går op i produktet $a \cdot b$, hvor a og b er to hele tal, så går p op i mindst en af de to faktorer.

Produkt af primtal Et produkt $p \cdot q$ af to forskellige primtal p og q går op i et tal netop hvis både p og q går op.

Mere generelt: Hvis primfaktoropløsningen af $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ hvor p_i' erne er forskellige primtal, og α_i'erne er positive heltal, så går n op i et tal, netop hvis $p_i^{\alpha_i}$ går op i tallet for alle i.

Sætningen om primfaktoropløsning er for omfattende til at vi beviser den her, men du kan finde beviset i *Talteori. Teori og problemløsning* på Georg Mohr-Konkurrencens hjemmeside.

Eksempel Sætningen fortæller altså at det er muligt at finde en primfaktoropløsning for alle positive hele tal større end 1, og også at den vi finder, er entydig. Når vi først har fundet ud af at primfaktoropløsningen af 180 er

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

så ved vi at der ikke findes andre primfaktoropløsninger af tallet.

Primtal har også den interessante egenskab at hvis et et primtal p går op i et produkt, så ved vi at det går op i mindst en af faktorerne, og det er ret anvendeligt. Det betyder fx at man ved at se på primfaktoropløsningen af 180, nemt kan se at 7 ikke går op i 180, for så skulle 7 indgå i primfaktoropløsningen.

Dette gælder fx ikke altid for sammensatte tal. Fx går 6 op i $20 \cdot 27$, men det går ikke op i hverken 20 eller 27. Det skyldes at 6 er bygget af to primtalsbyggesten nemlig 2 og 3, og de går hver især op i et af tallene, men ikke i det samme.

Hvis vi fx skal undersøge om et tal er deleligt med $6 = 2 \cdot 3$, så skal vi blot tjekke om det både er deleligt med 2 og med 3. Fx kan vi se på primfaktoropløsningen af 180 at 6 går op i 180 da både 2 og 3 indgår i primfaktoropløsningen.

Hvis vi på den anden side ved at både 18 og 20 går op i et tal, så kan vi ikke slutte at $18 \cdot 20 = 360$ går op i tallet. Vi kan til gengæld godt slutte at $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ går op, da vi kan se på primfaktor opløsningerne af $18 = 2 \cdot 3^2$ og $20 = 2^2 \cdot 5$, at både 2^2, 3^3 og 5 går op i tallet, hvis både 18 og 20 går op. Det følger af den sidste mere generelle regel om hvornår et produkt går op i et tal.

Øvelse 3.1. Primfaktoropløs tallene 30, 100, 625, 2002 og 110000000.

Øvelse 3.2. a) Vis at hvis 18 og 15 begge går op i n, da går 90 op i n.

b) Hvis 10 og 12 begge går op i et tal n, kan man så slutte at 120 går op?

Øvelse 3.3. a) En familie har fem børn. Når man ganger de fem børns aldre sammen (aldrene er hele tal), så får man 2002. Er det muligt at afgøre alderen på det yngste barn?

b) En familie har fire børn. Når man ganger de fire børns aldre sammen (aldrene er hele tal), så får man 2002. Er det muligt at afgøre alderen på blot et af deres børn?

c) I en klasse af børn hvor ingen endnu er fyldt 18 år, skriver børnene hver især deres alder (helt tal) op på tavlen. Deres matematiklærer ganger herefter alle tallene sammen og får 110000000000000000. Vis at et af børnene er 11 år. Kan man være sikker på at et af børnene er 10 år?

Øvelse 3.4. a) Tre børn har hver en masse bolde. Georg tæller boldene og lægger mærke til at forholdene mellem hvor mange bolde de tre børn har, er $3 : 7 : 8$. Vis at 18 går op i det samlede antal bolde.

b) Fire børn har hver en masse bolde. Georg tæller boldene og lægger mærke til at forholdene mellem hvor mange bolde de fire børn har, er $2 : 3 : 4 : 9$. Kan man slutte at 18 går op i det samlede antal bolde?

Øvelse 3.5. a) Bestem det største tal mindre end 100 der har præcis tre forskellige positive divisorer. (Fx har tallet 4 tre forskellige positive divsorer, nemlig 1, 2 og 4.

b) Bestem det største tal mindre end 100 der har præcis fire forskellige positive divisorer.

c) Bestem det største tal mindre end 100 der har præcis fem forskellige positive divsorer.

Øvelse 3.6. Lad n være et helt tal, og $m = n(n+1)(n+2)$ produktet af tre på hinanden følgende hele tal. Vis at 6 går op i m uanset hvad n er.

Nu er du klar til rigtige Georg Mohr-opgaver, men hold hovedet koldt når du argumenterer. Der var mange som fandt det rigtige svar i den næste opgave, det år opgaven blev stillet, men som manglede mange argumenter.

Opgave 3.1. Tre gamblere spiller mod hinanden om penge. De lægger hver en bunke 1-kroner på bordet til at starte med, og herefter ændrer det samlede antal 1-kroner på bordet sig ikke. Forholdet mellem det antal kroner de hver især har lagt, er $6:5:4$. Når spillet er slut, er forholdet mellem det antal kroner de hver især har, $7:6:5$ i en eller anden rækkefølge. En af gamblerne har til slut tre kroner mere end ved starten af spillet. Hvor mange 1-kroner har denne gambler til slut? (Georg Mohr-Konkurrencen 2014)

Opgave 3.2. Et positivt helt tal n som højst er 500, har den egenskab at når man vælger et tal m blandt tallene $1,2,3,\dots,499,500$, så er sandsynligheden $\frac{1}{100}$ for at m går op i n. Bestem den størst mulige værdi af n. (Georg Mohr-Konkurrencen 2006)

Opgave 3.3. Findes der et positivt helt tal n så $n!$ har præcis 11 nuller til slut? (Med $n!$ betegnes tallet $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$).(Georg Mohr-Konkurrencen 2001)

4 Delelighed

Fra *Tip til 1. runde* kender du allerede disse centrale regler om delelighed:

Sætning

Sum Hvis et heltal d går op i to heltal n og m, da går d også op i deres sum $n+m$. Hvis fx $a = 3b+12c$, da må 3 gå op i a fordi 3 går op i $3b$, og 3 går op i $12c$, og dermed også i summen $3b+12c$.

Differens Hvis et heltal d går op i to heltal n og m, da går d også op i deres differens $n-m$.

Bevis At d går op i både n og m, betyder at der findes hele tal q_n og q_m så $n = d\cdot q_n$ og $m = d\cdot q_m$. Dermed er

$$n+m = d\cdot q_n + d\cdot q_m = d(q_n+q_m),$$
$$n-m = d\cdot q_n - d\cdot q_m = d(q_n-q_m),$$

hvilket viser at d går op i $n+m$, og at d går op i $n-m$.

Eksempel Hvis der om to positive heltal n og m gælder at

$$n+7m^2 = m^5,$$

da kan vi slutte at m må gå op i n fordi m går op både i $7m^2$ og i m^5, og dermed også i deres differens $n = m^5 - 7m^2$.

Eksempel To på hinanden følgende hele tal n og $n+1$ kan ikke have den samme primdivisor, for hvis p går op i både n og $n+1$, så går p også op i deres differens

$$(n+1)-n = 1,$$

og ingen primtal går op i 1.

Øvelse 4.1. Lad n være et ulige helt tal. Vis at n og $n-2$ ikke har nogen fælles primfaktorer.

Øvelse 4.2. Lad n være et helt tal. Vis at n og $n-3$ højst har en fælles primfaktor.

Øvelse 4.3. Lad n være et helt tal. Vis at hvis 49 går op i $n\cdot(n+1000)$, da går det op i n eller $n+1000$.

Øvelse 4.4. Georg har en sæk fyldt med legetøjsmønter. Først putter han mønterne i 100 kasser sådan at der er lige mange i hver, og her har han 6 mønter tilovers. Derefter ombestemmer han sig og fordeler i stedet mønterne i 77 små skrin så der er lige mange i hver, og her har han 21 mønter tilovers. Vis at hvis Georg i stedet fordeler mønterne i 14 små skattekister med lige mange i hver, så får han ikke nogen mønter tilovers.

Opgave 4.1. Et helt tal opfylder at hvis du deler det med 2010, får du 1000 som rest, og hvis du deler det med 2012, får du 100 som rest. Hvad er resten hvis du deler tallet med 12? (Abelkonkurransen 2011-2012)

Opgave 4.2. Tallene $1,2,3,\dots,624$ parres to og to så summen af de to tal i hvert par er 625. For eksempel danner 1 og 624 et par, og 30 og 595 danner et par. I hvor mange af de 312 par går det mindste tal op i det største? (Georg Mohr-Konkurrencen 2015)

Når man løser opgaver i talteori, så får man ofte brug for kvadratsætningerne:

Kvadratsætningerne

1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

3) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Eksempel Kvadratsætningerne bruges her som regel ved at identificere det der står på højresiden og omskrive til det der står på venstresiden, da det i talteori ofte er nemmere at arbejde med produkter end summer.

Hvis vi fx ønsker at bestemme samtlige positive hele tal a og b der opfylder at

$$a^2 = 4b^2 + 37^2,$$

så kan vi omskrive til

$$(a+2b)(a-2b) = 37^2.$$

Da 37 er et primtal, må 37 gå op i mindst en af de to faktorer på højresiden. Hvsi 37 går op i dem begge, så må de begge være lig 37 da deres produkt er 37^2, men det går ikke da $a+2b > a-2b$. Derfor må den største faktor $a+2b = 37^2$ og den mindste faktor $a-2b = 1$. Ved at lægge de to ligninger sammen fås $2a = 37^2+1 = 1370$, dvs. $a = 685$, og ved at trække dem fra hinanden fås $4b = 37^2-1 = 1368$, dvs. $b = 342$. Den eneste løsning er derfor $a = 685$ og $b = 342$.

Øvelse 4.5. Bestem alle positive hele tal n og m der opfylder at

$$n^2 + 101 = m^2.$$

Øvelse 4.6. Bestem alle positive hele tal n og m der opfylder at

$$n^2 = m^4 + 73.$$

Øvelse 4.7. Lad n og m være to hele tal hvor 7 går op i n^2+m^2+16nm. Vis at 7 går op i $n+m$.

Opgave 4.3. I en retvinklet trekant hvori alle sidelængder er hele tal, har den ene katete længden 1994. Bestem længden af hypotenusen. (Georg Mohr-Konkurrencen 1994)

Opgave 4.4. Om de tre hele tal p, q og r gælder at $p+q^2=r^2$. Vis at 6 går op i produktet pqr. (Georg Mohr-Konkurrencen 2008)

Opgave 4.5. Tallene a og b er hele tal hvor 11 går op i a^2+b^2+9ab. Vis at 11 også går op i a^2-b^2. (Georg Mohr-Konkurrencen 2004)

Opgave 4.6. Georg har til en fest købt masser af fyldte chokolader, og da han tæller hvor mange han har, opdager han at antallet er et primtal. Han fordeler så mange af chokoladerne som muligt på 60 fade med lige mange på hvert. Han konstaterer derefter at han har mere end ét stykke tilbage, og at antallet af tiloversblevne stykker ikke er et primtal. Hvor mange stykker chokolade har Georg til overs? (Georg Mohr-Konkurrencen 2009)

Opgave 4.7. Bestem samtlige måder hvorpå brøken $\frac{1}{11}$ kan skrives som

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m},$$

hvor n og m er to forskellige positive hele tal. (Georg Mohr-Konkurrencen 2011)

Opgave 4.8. De positive hele tal a, b og c opfylder at de tre brøker

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{c+100}{b} \quad \text{og} \quad \frac{a+b+169}{2c+200}$$

alle er hele tal.
Bestem samtlige mulige værdier af a. (Georg Mohr-Konkurrencen 2018)

Opgave 4.9. To positive heltal har summen 2002. Kan 2002 gå op i deres produkt? (Georg Mohr-Konkurrencen 2002)

5 Udfordringer

Her til slut er samlet nogle virkelig svære talteoriopgaver fra Georg Mohr-Konkurrencen.

Opgave 5.1. Det positive hele tal a er større end 10, og alle dets cifre er ens. Bevis at a ikke er et kvadrattal. (Georg Mohr-Konkurrencen 2013)

Opgave 5.2. To tocifrede tal a og b opfylder at produktet $a\cdot b$ går op i det firecifrede tal man får ved at skrive de to cifre i a efterfulgt af de to cifre i b.

Bestem samtlige mulige værdier af a og b. (Georg Mohr-Konkurrencen 2012)

Opgave 5.3. På et stykke papir står syv positive hele tal. Ligegyldigt hvilke fem af de syv tal man vælger, så går hvert af de to resterende tal op i summen af de valgte fem tal.
Hvor mange forskellige tal kan der højst være blandt de syv? (Georg Mohr-Konkurrencen 2019)

Opgave 5.4. Find alle de mulige værdier af tallet

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a},$$

hvor a, b, c er positive hele tal, og $\frac{a+b}{c}, \frac{a+c}{b}, \frac{b+c}{a}$ også er positive hele tal. (Georg Mohr-Konkurrencen 2016)

6 Løsninger

Øvelse 1.1 Da $11 = 1 \cdot 7 + 4$, har 11 rest 4 ved division med 7. Da $100 = 14 \cdot 7 + 2$, har 100 rest 2 ved division med 7. Da $-11 = -2 \cdot 7 + 3$, har -11 rest 3 ved division med 11.

Øvelse 1.2 Restklassen med rest 5 ved division med 1000:

$$\{\dots, -1995, -995, 5, 1005, 2005, 3005, 4005, 5005, \dots\}.$$

Øvelse 1.3 De tre restklasser ved division med 3 er

Restklasse 0: $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

Restklasse 1: $\{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$

Restklasse 2: $\{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$.

Øvelse 1.4 Restklassen med rest 2 ved division med 9:

$$\{\dots, -16, -7, 2, 11, 20, 29, \dots\}.$$

Øvelse 1.5 Da $101 = 9 \cdot 11 + 2$, $332 = 30 \cdot 11 + 2$ og $44444 = 4040 \cdot 11 + 4$, har kun de to første tal samme rest ved division med 11.

Øvelse 1.6 Ved differens kan vi tilsvarende se at:

$$a - b = (q_a \cdot n + r_a) - (q_b \cdot n + r_b) = (q_a - q_b) \cdot n + (r_a - r_b).$$

Vi får altså samme rest for $a - b$ og $r_a - r_b$ ved division med n.

Øvelse 1.7 Rest ved division med 5 for sum og produkt:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Øvelse 1.8 At n har rest 17 med division med 100 betyder at der findes et helt tal q så

$$n = 100 \cdot q + 17 = 5 \cdot 20 \cdot q + 5 \cdot 3 + 2 = 5(20 \cdot q + 3) + 2,$$

hvilket viser at n har rest 2 ved division med 5.

Øvelse 1.9 Lad r være resten af n ved division med 12. Da er

$$n = 12 \cdot q + r = 3 \cdot 4 \cdot q + r.$$

Dette viser at hvis vi dividerer n med 4, så får vi samme rest som når vi dividerer r med 4, dvs. resten af r divideret med 4 er 2. Da $r \in \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ kan vi indskrænke værdierne for r til $r \in \{2, 6, 10\}$. Omskrivningen viser yderligere at når vi dividerer n med 3, så får vi samme rest som når vi dividerer r med 3, dvs. resten af r ved division med 3 er 1. Det eneste tal i mængden $\{2, 6, 10\}$ som har rest 1 ved divisioon med 3, er 10. Dermed er $r = 10$ eneste munlighed så det er muligt at afgøre.

Opgave 1.1 Først viser vi at det er muligt for Georg at strege alle tal ud som har rest 2 når man dividerer med 3, dvs. tallene $2, 5, 8, \dots, 50$. Hvis man ganger tallet 2 med 10 to gange, får man 200. Tallet 200 har rest 2 når det divideres med 3. Når man derefter trækker 3 fra igen og igen, får man følgende tal: $197, 194, 191, \dots, 5, 2$, heriblandt altså alle tallene fra 1 til 50 som har rest 2 når de divideres med 3. Dem kan Georg derfor strege ud.

Nu viser vi at Georg ikke kan strege andre tal ud, og her kan vi bruge sætningen om hvordan man regner med rester. Vi starter på 2 som har rest 2 ved division med 3, og vi ønsker at vise at hver gang vi benytter en af de to regneoperationer på et tal med rest 2, så får vi igen et tal med rest 2, da det viser at vi ikke kan komme uden for restklassen 2.

Tallet 10 har rest 1 ved division med 3, dvs. ifølge sætningen så ved vi at når vi ganger et tal med rest 2 med 10, så får vi igen et tal med rest $2 \cdot 1 = 2$. (Hvis man ikke kendte sætningen, kan man argumentere sådan: Et tal har rest 2 ved division med 3 netop hvis det kan skrives som $3n + 2$. Hvis vi ganger det med 10, fås $30n + 20 = 3(10n + 6) + 2$, altså igen et tal med rest 2 ved division med 3.)

Tallet 3 har rest 0 ved division med 3, dvs. når vi trækker 3 fra et tal med rest 2, så får igen et tal med rest 2. Altså kan Georg ikke strege andre tal ud end de nævnte.

Opgave 1.2 Nej, Georg kan kun nå frem til tal med rest 5 ved division med 6.

Georg starter med et tal med rest 5 ved division med 6, da $17 = 2 \cdot 6 + 5$. Når Georg ganger et tal med rest 5 med tallet 7, så giver det igen et tal med rest 5 ifølge sætningen om regning med rester, da $5 \cdot 7 = 35 = 5 \cdot 6 + 5$. Når Georg trækker 6 fra et tal med rest 5 ved division med 6, giver det igen rest 5. Dermed kan Georg kun få tal med rest 5, og altså aldrig 7.

Øvelse 2.1 Tallet 6^{1000} slutter på 6. Det ses ved at bemærke at hver gang vi ganger to tal der slutter på 6, dvs. med rest 6 ved division med 10, så får vi igen et tal der slutter på 6. Derfor slutter 6^n på cifferet 6 for alle positive hele tal n.

Øvelse 2.2 Vi ved fra eksemplet med kvadrattallene at det sidste ciffer i et kvadrattal n^2 netop kan være $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Betragter vi tallet $n^4 = n^2 \cdot n^2$, så kan vi se at sidste ciffer i n^4 netop fås ved at tage de mulige sidste cifre i n^2 og gange med sig selv. Alstå kan sidste ciffer i n^4 netop være sidste ciffer i følgende tal $0^2, 1^2, 4^2, 5^2, 6^2, 9^2$, dvs. det kan netop være $0, 1, 5, 6$.

Opgave 2.1 Sidste ciffer i 2007^{2007}, er det samme som sidste ciffer i 7^{2007} da sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i hver af faktorerne. Sidste ciffer i $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \cdots$ er $7, 9, 3, 1, 7, \cdots$, og denne periode på fire vil gentage sig fordi $7^n = 7^{n-1} \cdot 7$, og sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i hver af faktorerne. Da $2007 = 501 \cdot 4 + 3$ har rest 3 ved division med 4, er sidste ciffer i 2007^{2007} det samme som i 7^3, dvs. 3.

Opgave 2.2 Vi ved fra vores sætning om regning med rester at sidste ciffer i a_n kun afhænger af sidste ciffer i a_{n-1}. Nu udregner vi de sidste cifre i $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ og får $2, 5, 6, 7, 0, 1, 2$. Vi kan se at vi allerede nu er nået hen til et ciffer vi har mødt før, og da sidste ciffer i næste tal i følgen kun afhænger af sidste ciffer i det foregående, ved vi at dette mønster må forsætte. Vi har denne gang en periode på 6, dvs. a_{2020} må have samme sidste ciffer som a_4 da de begge har rest 4 ved division med 6. Dermed er sidste ciffer i a_{2020} lig med 7.

Opgave 2.3 Lad $r = 10y + x$ være resten af n ved division med 100, hvor $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Da er resten af n^2 ved division med 100, den samme som i

$$r^2 = 100y^2 + 20xy + x^2.$$

Hvis vi skal se på næstsidste ciffer i r^2, så kan vi se bort fra leddet $100y^2$ da det består af et helt antal hundreder. Leddet $20xy = 10 \cdot 2xy$ bidrager med et lige tal til næstsidste ciffer. Hvis næstsidste ciffer skal være 7, må x^2 derfor bidrage med et ulige tal til næstsidste ciffer. Vi ser på mulighederne for x^2:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, , 49, 64, 81.$$

Det er kun $4^2 = 16$ og $6^2 = 36$ der har et ulige ciffer på tiernes plads. Derfor må $x = 4$ eller $x = 6$. I begge tilfælde bliver sidste ciffer i n^2 cifferet 6, da dette netop er sidste ciffer i x^2.

Øvelse 3.1 $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $625 = 5^4$, $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ og $110000000 = 2^7 \cdot 5^7 \cdot 11$.

Øvelse 3.2 a) Hvis $15 = 3 \cdot 5$ og $18 = 2 \cdot 3^2$ går op i et tal n, så må både 2, 3^2 og 5 gå op i n, og dermed går $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ op i n.

b) Hvis 10 og 12 begge går op i et tal n, kan man ikke være sikker på at 120 går op i n. Fx går 10 og 12 begge op i 60, men det gør 120 ikke. Man kan dog være sikker på at 60 går op i n. Kan du regne ud hvorfor?

Øvelse 3.3 a) Da $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ kun har fire faktorer i primfaktoropløsningen, må mindst et af børnene have alder 1, og det må være det yngste da ingen af børnene kan være 0 år da produktet af aldrene ikke er 0.

b) Nej, man kan ikke regne en eneste alder ud. Fx er $\{2, 7, 11, 13\}$ en mulighed, men for hvert af disse tal findes en mulighed hvor dette tal ikke indgår: Aldrene 2 og 7 indgår ikke i $\{1, 11, 13, 2 \cdot 7\}$, alderen 11 indgår ikke i $\{1, 7, 13, 2 \cdot 11\}$, og alderen 13 indgår ikke i $\{1, 7, 11, 2 \cdot 13\}$.

c) Primfaktoropløsningen af 110000000000000000 er $11 \cdot 2^{16} \cdot 5^{16}$. Dermed kan man se at 11 går op i produktet af børnenes alder, og derfor må det også gå op i mindst en af faktorerne da 11 er et primtal. Det betyder 11 går op i alderen på et af børnene, og da ingen af dem er fyldt 18, må dette barn være 11 år gammel.

Man kan derimod ikke være sikker på at et af børnene er 10 år gammel. Der kan fx være 16 børn i klassen der er 2 år gamle, 16 børn i klassen der er 5 år gamle, og et barn der er 11 år gammelt. Det er godt nok en mærkelig blanding af aldre i en klasse, men det kan ikke udelukkes!

Øvelse 3.4 a) Når forholdet mellem antallet af bolde er 3 : 7 : 8, da må børnene have henholdsvis $\frac{3}{18}$, $\frac{7}{18}$ og $\frac{8}{18}$ af boldene da $3+7+8=18$. Lad n være antallet af bolde. Der er altså et barn der har $\frac{7\cdot n}{18}=\frac{7\cdot n}{2\cdot 3^2}$ bolde, og da 7 og $2\cdot 3^2$ ikke har nogen fælles primdivisorer, betyder det at 18 må gå op i n.

b) Ja, det kan man, men det er lidt sværere end før. Når forholdet mellem antallet af bolde er 2 : 3 : 4 : 9, da må børnene have henholdsvis $\frac{2}{18}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{4}{18}$ og $\frac{9}{18}$ af boldene. Lad n være antallet af bolde.

Der er et barn der har $\frac{4\cdot n}{18}=\frac{2\cdot n}{3^2}$ bolde, og da 2 og 3^2 ikke har nogen fælles primdivisorer, betyder det at 3^2 må gå op i n.

Der er også et barn der har $\frac{9\cdot n}{18}=\frac{n}{2}$ bolde, og dermed må 2 gå op i n. Når både 2 og 3^2 går op i n, ved vi at $18=2\cdot 3^2$ går op i n.

Øvelse 3.5 a) Hvis et tal n har netop tre positive divisorer, må det være 1, p og n. Divisoren p må være et primtal, for ellers ville p have en primdivisor mindre end p som også var divisor i n. Tallet $\frac{n}{p}$ må også være divisor i n, og da det er større end 1 og mindre end n, må denne divisor være p, dvs. $p=\frac{n}{p}$, og altså $n=p^2$. De hele tal med netop tre forskellige positive divisorer er altså de hele tal som er et primtal i anden, dvs. et tal blandt $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, \ldots$. Da $7^2<100<11^2$, må 49 være det største tal mindre end 100 med netop tre forskellige positive divsorer.

b) Hvis et tal n har netop fire positive divisorer, må det være 1, p, q og n, så $1<p<q<n$. Divisoren p må med samme argument som før være et primtal. Da tallene

$$\frac{n}{n}<\frac{n}{q}<\frac{n}{p}<\frac{n}{1}$$

alle fire også er divisorer i n, må $\frac{n}{q}=p$, dvs. $pq=n$.

Hvis q er et primtal, så har n netop divisorerne 1, p, q og n, dvs. fire forskellige positive divisorer.

Hvis q ikke er et primtal, så må der være et primtal der går op i q og dermed også i n, men dette primtal må være p da det er den eneste mindre divisor større end 1. Det eneste primtal der går op i q er derfor p, og det betyder at $q=p^2$, og altså $n=p^3$.

Nu ved vi at et tal med netop fire forskellige positive divisorer er på formen p^3 eller $p\cdot q$ hvor p og q er to forskellige primtal. Hvis vi primfaktoropløser tallene lige under 100, ser vi at $99=3^2\cdot 11$, $98=2\cdot 7^2$, 97 er et primtal, $96=2^5\cdot 3$, $95=5\cdot 19$. Det støreste på den rigtige form er derfor 95.

c) Hvis et tal n har netop fem positive divisorer $1<p<q<r<n$, da må

$$\frac{n}{1}>\frac{n}{p}>\frac{n}{q}>\frac{n}{r}>\frac{n}{n}$$

være de samme fem divisorer, blot i modsat rækkefølge. Derfor er $\frac{n}{p}=r$ og $\frac{n}{q}=q$, dvs. $n=p\cdot r=q^2$. Da p er den mindste divisor større end 1, må p være et primtal. Af $p\cdot r=q^2$ ses at p går op i q^2, og dermed i q da p er et primtal. Da $p<q$ og p går op i q, kan q derfor ikke selv være et primtal. Til gengæld går enhver primdivisor i q også gå op i n, og da p er eneste divisor i n mindre end q og større end 1, da må p være eneste primdivisor i q, dvs. $q=p^2$. Dette giver $n=p^4$. De positive hele tal med netop fem forskellige positive divisorer er derfor alle fjerde potenser af et primtal, dvs. $2^4, 3^4, 5^4, 7^4, 11^4, 13^4, 17^4, \ldots$. Det største af disse som er mindre end 100, er $3^4=81$.

Øvelse 3.6 Hvis vi skal vise at $6=2\cdot 3$ går op i

$$m=n(n+1)(n+2),$$

så er det som sagt nok at vise at 2 og 3 går op da de er to forskellige primtal. Blandt tre på hinanden følgende tal n, $n+1$ og $n+2$ må der være mindst et tal hvor 2 går op, da 2 går op i hvert andet tal. Desuden må der være netop et tal hvor 3 går op, da 3 går op i hvert tredje tal. Blandt n, $n+1$ og $n+2$ er der altså både et tal hvor 2 går op, og et hvor 3 går op (bemærk at det kan være det samme), og dermed må $6=2\cdot 3$ gå op i produktet m.

Opgave 3.1 Til at starte med har de tre gamblere henholdsvis $\frac{6}{15}$, $\frac{5}{15}$ og $\frac{4}{15}$ af det samlede beløb, og til slut har de henholdsvis $\frac{7}{18}$, $\frac{6}{18}$ og $\frac{5}{18}$ af det samlede beløb i en eller anden rækkefølge. Da de kun spiller med enkroner, og $\frac{4}{15}$ og $\frac{5}{18}$ er uforkortelige brøker, betyder det at det samlede beløb er deleligt med både $15=3\cdot 5$ og $18=2\cdot 3^2$. Altså er det samlede beløb deleligt med $2\cdot 3^2\cdot 5=90$. Lad det samlede beløb være $90k$. Til at starte med har de tre gamblere derfor $36k$, $30k$ og $24k$ enkroner, og til slut har de henholdsvis $35k$, $30k$ og $25k$ enkroner i en eller anden rækkefølge. Den gambler der har tre kroner mere til slut, må altså være gået fra $24k$ enkroner til $25k$, $30k$ eller $35k$ enkroner, eller fra $30k$ enkroner til $35k$ enkroner. Da k er et helt tal, er eneste mulighed at gambleren er gået fra $24k$ til $25k$ kroner fordi vedkommende ellers ville have

fået et multiplum af 5 kroner, 6 kroner eller 11 kroner mere. Altså er $k = 3$, og gambleren har derfor $25 \cdot 3 = 75$ kroner til slut.

Opgave 3.2 Når sandsynligheden er $\frac{1}{100}$ for at et tilfældigt tal blandt tallene $1, 2, 3, \ldots, 500$ går op i det hele positive tal n, og n højst er 500, betyder det at n har netop fem positive divisorer inklusive tallene 1 og n. Lad $1, p, q, r, n$ være de fem divisorer i n så $1 < p < q < r < n$. Da p er den mindste divisor i n som er større end 1, må p være et primtal. Tallene $\frac{n}{p}$, $\frac{n}{q}$ og $\frac{n}{r}$ er også divisorer i n med

$$1 < \frac{n}{r} < \frac{n}{q} < \frac{n}{p} < n,$$

så vi må have at $n = pr = q^2$. Af dette ses at primtallet p er divisor i q^2 og dermed også i q, og da der ikke er andre divisorer i n end p som er mindre end q, må $q = p^2$ og $n = q^2 = p^4$. Vi leder altså efter det største tal blandt tallene $1, 2, 3, \ldots, 500$ som er en fjerdepotens af et primtal. Da $3^4 = 81 < 500 < 625 = 5^4$, er $3^4 = 81$ den størst mulige værdi af n.

Opgave 3.3 Antallet af slutnuller svarer til den mindste af eksponenterne af henholdsvis 2 og 5 i primfaktoropløsningen af $n!$. Primfaktoropløsningen af 16! er $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dvs. at eksponenten af 2 allerede her er større end 11. Da eksponenterne af 2 og 5 i primfaktoropløsningen af $n!$ kun bliver større når n vokser, findes der et n så $n!$ slutter på præcis 11 nuller, netop hvis vi kan finde et n så eksponenten af 5 i primfaktoropløsningen af $n!$ er 11.

Tallet 49! ender på 10 nuller da 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45 hver bidrager med et 5-tal, og $25 = 5^2$ bidrager med to 5-taller til primfaktoropløsningen af 49!. Tallet 50! ender derimod på 12 nuller da $50 = 2 \cdot 5^2$ bidrager med yderligere to 5-taller til primfaktoropløsningen. Der findes derfor ikke et n så $n!$ ender på netop 11 nuller.

Øvelse 4.1 Hvis n og $n-2$ skal have en fælles primfaktor, skal denne gå op i deres forskel $n-(n-2) = 2$, men det eneste primtal der går op i 2, er 2. Da n er ulige, går 2 ikke op i n. Dermed har n og $n-2$ ikke nogen fælles primfaktorer.

Øvelse 4.2 Antag at der findes et primtal p som både går op i n og $n-3$. Da går p også op i $n-(n-3) = 3$. Det eneste primtal som går op i 3, er $p = 3$. Dvs. n og $n-3$ har højst en fælles primfaktor, og hvis de har en fælles primfaktor, så er det $p = 3$.

Øvelse 4.3 Lad n være et helt tal hvor $49 = 7^2$ går op i $n \cdot (n + 1000)$. Vi ved at 7 går op i mindst en af faktorerne da 7 er et primtal. Primtallet 7 kan ikke gå op i begge faktorer, for så skulle det også gå op i deres differens 1000, og det gør det ikke. Da 7^2 går op i produktet, og 7 kun går op i en af faktorerne, må $7^2 = 49$ gå op i en af faktorerne, dvs. i n eller $n + 1000$.

Øvelse 4.4 Kald antallet af mønter for n. For at vise at 14 går op i n, viser vi i stedet at 2 og 7 går op da dette er ensbetydende med at 14 går op. Fordelingen af mønterne i kasserne viser at $n = 100 \cdot q_1 + 6$, hvor q_1 er et helt tal. Da 2 går op i både $100 \cdot q_1$ og i 6, går det også op i deres sum n. Fordelingen af mønterne i skrinene viser at $n = 77q_2 + 21$, hvor q_2 er et helt tal. Da 7 går op i både $77 \cdot q_2$ og i 21, går det også op i deres sum n. Altså går 14 op i n.

Opgave 4.1 Da $12 = 2^2 \cdot 3$, finder vi først resten ved division med $2^2 = 4$ og derefter resten ved division med 3. Når man deler tallet n med 2012 får man 100 som rest. Da 4 går op i både 2012 og 100, betyder det at 4 går op i n. Når man deler tallet med 2010 får man 1000 som rest. Dermed er $n = 2010 \cdot q + 1000 = 3(670 \cdot q + 333) + 1$, hvilket viser at n har rest 1 ved division med 3. De eneste rester ved division med 12 hvor 4 går op, er 0, 4 og 8. Den eneste af disse som har rest 1 ved division med 3, er 4. Dermed har n rest 4 ved division med 12.

Opgave 4.2 Når a og $b = 625 - a$ danner par, er betingelsen at a går op i b ensbetydende med at a går op i 625. Hvis nemlig a går op i b, vil a også gå op i summen $a + b = 625$; og hvis a går op i 625, vil a også gå op i differensen $625 - a = b$. Da $625 = 5^4$, og 5 er et primtal, er tallene 1, 5, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$ og $5^4 = 625$ de eneste tal der går op i 625. Altså må a være et af tallene 1, 5, 25 eller 125. Der er altså fire par af den ønskede slags.

Opgave 4.5 De positive hele tal n og m skal opfylde at

$$(m + n)(m - n) = 101.$$

Da 101 er et primtal, betyder det at den største faktor $m + n = 101$ og den mindste $m - n = 1$. Ved at løse ligningssystemet fås at $n = 50$ og $m = 51$ er eneste løsning.

Opgave 4.6 De positive hele tal n og m skal opfylde at

$$(n + m^2)(n - m^2) = 73.$$

Da 73 er et primtal, betyder det at den største faktor $n+m^2=73$ og den mindste $n-m^2=1$. Ved at løse ligningssystemet fås at $n=37$ og $m=6$ er eneste løsning.

Opgave 4.7 Lad n og m være hele tal sådan at 7 går op i

$$n^2+m^2+16nm=(n+m)^2+14nm.$$

Da 7 går op i $14nm$ og i $(n+m)^2+14nm$, betyder det at 7 også går op i deres differens $(n+m)^2$. Og da 7 er et primtal der går op i produktet $(n+m)^2$, må 7 gå op i $n+m$.

Opgave 4.3 Kaldes den ukendte katete a og hypotenusen c, gælder ifølge Pythagoras' sætning at

$$1994^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a).$$

Bemærk at tallene $c+a$ og $c-a$ begge er lige: Da deres produkt er lige, er nemlig mindst et af dem lige, og da deres differens $(c+a)-(c-a)=2a$ er lige, må det andet også være det. Ved division med 2^2 fås

$$997^2=\frac{c-a}{2}\cdot\frac{c+a}{2},$$

hvor faktorerne på højre side er hele tal, og den første faktor er mindre end den anden. Da 997 er et primtal, er $1\cdot 997^2$ den eneste mulige opspaltning som et produkt af den ønskede art. Vi får altså

$$c-a=1 \quad \text{og} \quad c+a=997^2.$$

Ved at lægge ligninger sammen fås at hypotenusens længde er

$$c=1+997^2=1+(1000-3)^2=1+1000000+9-6000=994010.$$

Opgave 4.4 Ligningen omformes til

$$p=r^2-q^2=(r+q)(r-q).$$

For at vise at $6=2\cdot 3$ går op i produktet pqr, viser vi at både 2 og 3 går op.

Tallet 2 går op i produktet pqr hvis mindst et af tallene er lige. Hvis både r og q er ulige, bliver $r+q$ lige, og dermed vil $p=(r+q)(r-q)$ være lige. Derfor er mindst et af tallene p, q og r lige, og 2 går op i pqr.

Tallet 3 går op i produktet pqr netop hvis 3 går op i mindst et af tallene p, q og r. Antag at 3 hverken går op i q eller r. Når man dividerer dem med 3, har de derfor en rest på enten 1 eller 2. Hvis q og r har samme rest ved division med 3, går 3 op i $r-q$, og hvis de har forskellig rest ved division med 3, dvs. at den ene har rest 1 og den anden rest 2, da går 3 op i $r+q$. I begge tilfælde går 3 op i $p=(r+q)(r-q)$. Derfor må 3 gå op i mindst et af tallene p, q og r og altså også i deres produkt pqr. Samlet har vi vist at både 2 og 3 og dermed også 6 går op i pqr.

Opgave 4.5 Vi skal vise at 11 går op i a^2-b^2. Det er meget nemmere at se hvad der går op, når man har et produkt, så derfor omskriver vi til produkt vha. kvadratsætningerne:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Hvis vi kan vise at 11 går op i $a+b$ eller i $a-b$, så har vi vist at 11 går op i a^2-b^2. Vi ved at 11 går op i a^2+b^2+9ab. Igen tænker vi i kvadratsætninger og omskriver

$$a^2+b^2+9ab=a^2+b^2-2ab+11ab=(a-b)^2+11ab.$$

Vi ved at 11 går op i summen $(a-b)^2+11ab$, og at 11 går op i sidste led $11ab$. Derfor må 11 også gå op i $(a-b)^2$. Da 11 er et primtal, betyder det at 11 også går op i $a-b$, og derfor i $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Opgave 4.6 Kald antallet af fyldte chokolader for n, antallet af fyldte chokolader på et fad for m og det overskydende antal for r. Da er

$$n=60\cdot m+r=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot m+r,$$

hvor $1<r<60$. Da n er et primtal, og r ikke er det, må n være større end r. Hvis et af primtallene 2, 3 eller 5 går op i r, går det også op i summen

$$n=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot m+r$$

da det går op i begge led, men dette er umuligt da n er et primtal større end r. Primtallet 7 er derfor det mindst mulige primtal som går op i r. Hvis en af primfaktorerne i r er større end 7, er den mindst 11 da 11 er mindste primtal større end 7. I dette tilfælde bliver r større end 60 da r er et produkt af mindst to primtal, og $7 \cdot 11 > 60$. Dette kan ikke lade sig gøre, og derfor er 7 eneste primfaktor i r, og dermed $r = 7^2 = 49$ eneste mulighed. Der er altså 49 fyldte chokolader tilovers.

Opgave 4.7 Lad
$$\frac{1}{11} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$
hvor n og m er forskellige positive hele tal. Dette omformes til
$$nm = 11(n+m).$$
Heraf følger at 11 går op i nm, og da 11 er et primtal, går 11 op i n eller m. Vi kan uden tab af generalitet antage at 11 går op i n. Dermed findes et positivt helt tal k så $n = 11k$. Dette indsættes i ligningen $nm = 11(n+m)$, og vi får.
$$11km = 11(11k - m) \quad \Leftrightarrow \quad km = 11k - m \quad \Leftrightarrow$$
$$m(k-1) = 11k \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{11k}{k-1}.$$
Da k og $k-1$ ikke har fælles faktorer (udover 1), må $k-1$ gå op i 11 (m er et helt tal); dvs. k er 2 eller 12. Sammenfattende har vi at $(n,m) = (11k, \frac{11k}{k-1})$ med k lig 2 eller 12. Med $k = 2$ fås $(n,m) = (22,22)$, og med $k = 12$ fås $(n,m) = (132,12)$. Da n og m skal være forskellige, er $(n,m) = (132,12)$ eneste mulighed. Da
$$\frac{1}{132} + \frac{1}{12} = \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{11}{11 \cdot 12} = \frac{1+11}{11 \cdot 12} = \frac{1}{11},$$
er der netop én måde at skrive brøken $\frac{1}{11}$ som $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, hvor n og m er to forskellige hele tal, nemlig $\frac{1}{132} + \frac{1}{12}$.

Opgave 4.8 At de tre brøker er hele tal, betyder at a går op i b, b går op i $c+100$, og $2c+200$ går op i $a+b+169$. Da a går op i b, og b går op i $c+100$, går a op i $c+100$ og dermed også i $2c+200 = 2(c+100)$. Heraf fås videre at a går op i $a+b+169$ fordi $2c+200$ går op i $a+b+169$. Da a går op i både a, b og $a+b+169$, følger det at a går op i 169. Da $169 = 13^2$, og 13 er et primtal, må a være enten 1, 13 eller 169.

At hver af disse tre værdier for a faktisk er mulige, ses ved at angive værdier af b og c så forudsætningerne er opfyldt. Det kan f.eks. gøres således: I hvert af tilfældene $a=1$, $a=13$, $a=169$ sættes $b = a+169$. Herved går a op i b, så den første brøk er hel. Videre sættes $c = b - 100$ (muligt da $b > 100$), og den anden brøk bliver $\frac{c+100}{b} = 1$, altså hel. Endelig bliver også den sidste brøk 1 og dermed hel, idet
$$\frac{a+b+169}{2c+200} = \frac{a+a+169+169}{2(a+169)} = 1.$$

Opgave 4.9 Svaret er nej, og dette bevises indirekte ved at antage at det er muligt, og herefter vise at dette fører til en modstrid.

Antag at der for to positive hele tal a og b gælder at $a+b = 2002$, og at 2002 går op i $a \cdot b$. Da $a \cdot b = a(2002-a) = 2002a - a^2$, og 2002 går op i både $a \cdot b$ og $2002a$, vil 2002 også gå op i a^2. Desuden er $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dvs. at primtallene 2, 7, 11 og 13 vil gå op i a^2 og dermed også i a. Altså vil $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ også gå op i a, hvilket er umuligt da $a < 2002$.

Opgave 5.1 Ethvert positivt helt tal n kan skrives som $n = 10x + y$, hvor x og y er hele tal og $0 \le y \le 9$. Altså kan ethvert kvadrattal skrives som
$$n^2 = (10x+y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2 = 10 \cdot 2(5x^2 + xy) + y^2.$$
Antag at $a = n^2$. Hvis n^2 slutter på et ulige ciffer, da slutter n også på et ulige ciffer y. Altså er $y^2 = 1, 9, 25, 49, 81$, og antallet af 10'ere i y^2 er dermed lige. Antallet af 10'ere i $n^2 = 10 \cdot 2(5x^2 + xy) + y^2$ er derfor lige, og næstsidste ciffer i n^2 er derfor også lige. Et kvadrattal kan altså ikke have to ulige cifre til slut, og vi kan udelukke at c er ulige.

Nu mangler vi kun at udelukke $c = 2, 4, 6, 8$. Hvis $c = 2$ eller $c = 6$, er $a = c \cdot 11\ldots1$. Dette tal kan ikke være et kvadrattal, da 2 går op i tallet, mens 2^2 ikke gør fordi $11\ldots1$ er ulige. Hvis $c = 4$, er $a = 2^2 \cdot 11\ldots1$. Dette tal kan ikke være et kvadrattal, for da ville $11\ldots1$ også være et kvadrattal, og det har vi tidligere udelukket. For $c = 8$ har vi tilsvarende $a = 2^2 \cdot 22\ldots2$, og det kan heller ikke være et kvadrattal da vi tidligere har udelukket at $22\ldots2$ er et kvadrattal. Nu har vi udelukket alle ni muligheder for c og altså vist at a ikke kan være et kvadrattal.

Opgave 5.2 De to tocifrede tal a og b opfylder at ab går op i $100a+b$. Altså går a op i $100a+b$ og dermed i b. Der findes dermed et helt tal s så $b=sa$, og da a og b er tocifrede, gælder $1 \le s \le 9$. Da

$$100a+b=a(100+s),$$

og ab går op i dette tal, så går $b=sa$ op i $100+s$. At s går op i $100+s$ og dermed i 100, begrænser yderligere de mulige værdier for s. De mulige værdier for s skal søges blandt tallene $1,2,4,5$.

Hvis $s=1$, går b op i 101, men dette er umuligt da primtallet 101 ikke har nogle tocifrede divisorer.

Hvis $s=2$, er b et lige tocifret tal der går op i $102=2\cdot3\cdot17$. Eneste mulighed er $b=34$ og følgelig er $a=\frac{b}{2}=17$. Den mulighed er brugbar da $\frac{1734}{17\cdot34}=3$.

Hvis $s=4$, er b et tocifret tal i 4-tabellen der går op i $104=2^3\cdot13$. Eneste mulighed er $b=52$ og følgelig er $a=\frac{b}{4}=13$. Den mulighed er også brugbar da $\frac{1352}{13\cdot52}=2$.

Hvis $s=5$, er b et tocifret tal i 5-tabellen der går op i $105=5\cdot21$. Et sådant tal b eksisterer ikke.

Altså er de mulige værdier $a=17$, $b=34$ og $a=13$, $b=52$.

Opgave 5.3 Tallene 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5 opfylder betingelsen, hvilket viser at der *kan* være to forskellige tal blandt de syv. Vi beviser nu at der ikke kan være mere end to forskellige tal.

Kald tallene $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Da x_1 går op i $x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ og i $x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$, vil x_1 også gå op i $(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)-(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)=x_2-x_7$. På tilsvarende måde ses at ethvert af tallene går op i differensen mellem to vilkårlige andre af tallene. Antag nu at der findes tre forskellige tal med $a<b<c$. Så vil c gå op i $b-a$, hvilket er umuligt fordi $b-a$ er positiv og mindre end c. Der er altså højst to forskellige tal på papiret.

Opgave 5.4 Da a, b og c indgår symmetrisk i summen

$$S=\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a},$$

kan vi uden tab af generalitet antage at $a \ge b \ge c$. Antag altså at a, b og c er positive hele tal med $a \ge b \ge c$ som opfylder at alle de tre brøker der indgår i summen S, også er hele. Da $a \ge b \ge c > 0$, er $2a \ge b+c > 0$, og da $\frac{b+c}{a}$ er et helt tal, må $\frac{b+c}{a}=1$ eller $\frac{b+c}{a}=2$.

Hvis $\frac{b+c}{a}=1$, er $a=b+c$. Altså er $\frac{a+c}{b}=\frac{b+c+c}{b}=1+\frac{2c}{b}$. Da brøken $\frac{a+c}{b}$ er et helt tal, må $\frac{2c}{b}$ også være et helt tal, og da $b \ge c$, må $\frac{2c}{b}=1$ eller $\frac{2c}{b}=2$. Dermed er $b=2c$ eller $b=c$. Altså er $(a,b,c)=(3c,2c,c)$ eller $(a,b,c)=(2c,c,c)$.

Hvis $\frac{b+c}{a}=2$, er $2a=b+c$. Sammenholdt med $a \ge b \ge c$ medfører dette at $a=b=c$. Altså er $(a,b,c)=(c,c,c)$.

Vi har nu vist at alle talsæt (a,b,c) der opfylder opgavens betingelser, er af formen $(a,b,c)=(3c,2c,c)$ eller $(a,b,c)=(2c,c,c)$ eller $(a,b,c)=(c,c,c)$, hvor c er et positivt helt tal. Omvendt viser vi nu at alle sådanne talsæt faktisk opfylder opgavens betingelser. Hvis $(a,b,c)=(3c,2c,c)$, er $\frac{a+b}{c}=\frac{3c+2c}{c}=5$, $\frac{a+c}{b}=\frac{3c+c}{2c}=2$, $\frac{b+c}{a}=\frac{2c+c}{3c}=1$, og $S=5+2+1=8$. Hvis $(a,b,c)=(2c,c,c)$, er $\frac{a+b}{c}=\frac{2c+c}{c}=3$, $\frac{a+c}{b}=\frac{2c+c}{c}=3$, $\frac{b+c}{a}=\frac{c+c}{2c}=1$, og $S=3+3+1=7$. Hvis $(a,b,c)=(c,c,c)$, er $\frac{a+b}{c}=\frac{c+c}{c}=2$, $\frac{a+c}{b}=\frac{c+c}{c}=2$, $\frac{b+c}{a}=\frac{c+c}{c}=2$, og $S=2+2+2=6$.

De mulige værdier for summen S er altså 6, 7 og 8.