Tip til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Algebra

Her præsenteres idéer til hvordan man løser algebraopgaver til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen. Det er en forudsætning for at arbejde med disse tip til 2. runde at du allerede har arbejdet med *Algebra - Tip til 1. runde*.

For at blive god til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er det allervigtigste ligesom til 1. runde at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor langt de fleste er fra 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen.

Til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er der fem opgaver som skal løses på fire timer. De er alle svære fordi man skal være kreativ og kombinere ting man ikke plejer, og så er det desuden en udfordring at skrive en god besvarelse hvor man argumenterer korrekt matematisk. Der er løsninger til alle opgaver bagerst så du kan se hvordan en fuldstændig besvarelse kan se ud, men læs dem først når du selv har arbejdet længe med en opgave.

Indhold

1 Indfør variable, og opstil ligninger

Eksempel

To tocifrede tal har den egenskab at deres sum er S. Hvis man bytter om på cifrene i dem begge og lægger de to nye tal sammen, så er deres sum $4S$. Bestem S.

For at løse denne opgave bliver vi nødt til at indføre nogle variable. Lad de to tocifrede tal være ab og cd hvor a, b, c og d er cifrene i de to tal. Vi kan nu udnytte viden om deres sum til at opstille ligninger:

$$S = (10a+b)+(10c+d) = 10(a+c)+(b+d)$$
$$4S = (10b+a)+(10d+c) = 10(b+d)+(a+c).$$

Vi har nu to ligninger med fire ubekendte. Vi kan imidlertid nøjes med at betragte det som to ubekendte $a+c$ og $b+d$. Hvis vi ganger den øverste ligning med 4, fås

$$4S = 40(a+c)+4(b+d)$$
$$4S = 10(b+d)+(a+c).$$

Dermed er de to højresider lig hinanden, og vi får

$$39(a+c) = 6(b+d).$$

Vi skal huske at $a+c$ og $b+d$ begge er hele tal som højst er $9+9=18$. Da 13 går op 39, må det også gå op i højresiden, og da 13 er primtal, går det op i $b+d$. Da $b+d$ højst er 18, må $b+d=13$. Det giver $a+c=2$. Dermed er $S = 10\cdot 2+13 = 33$.

Denne sum opnås fx ved $ab = 14$ og $cd = 19$, men der er flere muligheder.

Tip: Sørg for at indføre så få variable som muligt. Som vi så i eksemplet ovenfor, kan man nogle gange slå nogle af dem sammen.

Brug derefter opgavens oplysninger til at opskrive sammenhænge mellem de variable i form af ligninger, uligheder, udtryk, osv.

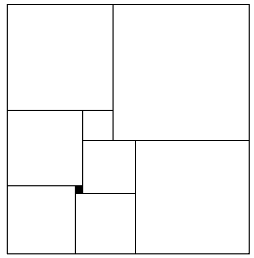
Opgave 1.1. Georg vælger tre forskellige af cifrene $1, 2, \ldots, 9$ og skriver dem på hver sit kort. Når kortene lægges ved siden af hinanden, dannes der et trecifret tal. Georg fortæller sin mor at summen af det største og det næststørste tal der kan dannes på denne måde, er 1732. Kan hun regne ud hvilke tre cifre Georg har valgt?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2014)

Opgave 1.2. Tre kammerater A, B og C har tilsammen 120 kroner. Først giver A lige så mange penge til B som B har i forvejen. Dernæst giver B lige så mange penge til C som C har i forvejen. Til sidst giver C lige så mange penge til A som A nu har. Efter disse transaktioner har A, B og C lige mange penge. Hvor mange penge havde hver af de tre kammerater oprindelig?
(Georg Mohr-Konkurrencen 1993)

Opgave 1.3. En klasse på 24 elever har deltaget i Georg Mohr-Konkurrencens 1. runde, hvor man kunne opnå fra 0 til 20 point. Tre af klassens elever har opnået lige præcis klassens gennemsnit. Hvis alle de elever der scorede under gennemsnittet, hver havde fået 4 point mere, ville gennemsnittet have været 3 point højere. Hvor mange elever scorede over klassens gennemsnit?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2016)

Opgave 1.4. Et tog gennemkører en bestemt strækning med en konstant fart. Hvis farten sættes op med 10 kilometer i timen, kan turen gøres 40 minutter hurtigere. Hvis farten derimod sættes ned med 10 kilometer i timen, tager turen 1 time længere. Hvor lang er den gennemkørte strækning?
(Georg Mohr-Konkurrencen 1994)

Opgave 1.5. Om et rektangel oplyses at det kan deles op i ni kvadrater der er placeret som vist i forhold til hinanden. Det sorte kvadrat har sidelængde 1.



Er der mere end én mulighed for rektanglets sidelængder?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2012)

2 Vurder størrelser

Eksempel

Til en konkurrence kan man højst få 100 point. 5 deltagere fik 100 point, og resten fik mindst 60 point. Gennemsnittet var 76 point. Hvor mange deltog minimum i konkurrencen?

For at løse denne opgave må vi lave en vurdering for hvor mange der mindst har deltaget, dvs. vi skal opstille en ulighed. Kald antal deltagere i konkurrencen for n. Først vurderer vi hvor mange point de n deltagere mindst har fået. Da 5 deltagere fik 100 point, og de resterende $n-5$ fik mindst 60 point, har de n deltagere mindst fået

$$100 \cdot 5 + 60 \cdot (n-5)$$

point. Da gennemsnittet er 76 point, må de samlet have fået $76 \cdot n$ point. Det giver uligheden

$$100 \cdot 5 + 60 \cdot (n-5) \leq 76 \cdot n$$

som kan omskrives til $200 \leq 16 \cdot n$ og dermed $12{,}5 \leq n$.

Vi kan nu se at der mindst her været 13 deltagere til konkurrencen. For at sikre at det er en mulighed, skal vi komme med et eksempel med 13 deltagere: Hvis der er 13 deltagere hvor 5 får 100 point og resten får 61 point, så er gennemsnittet 76. Derfor er det mindste antal deltagere faktisk 13.

Opgave 2.1. En fisker har fanget et antal fisk. De tre tungeste udgør tilsammen 35% af fangstens samlede vægt. Dem sælger han. Herefter udgør de tre letteste tilsammen $\frac{5}{13}$ af vægten af resten. Hvor mange fisk fangede han?
(Georg Mohr-Konkurrencen 1999)

Opgave 2.2. Om tallene a, b, c, d og e oplyses

$$a+b<c+d<e+a<b+c<d+e.$$

Hvilket af dem er mindst, og hvilket af dem er størst?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2015)

3 Ligningssystemer

Eksempel

Bestem alle (x, y) som opfylder

$$\frac{1}{x+y} + x = 3$$
$$\frac{x}{x+y} = 2,$$

hvor x og y er reelle tal. (Georg Mohr-Konkurrencen 2009)

Når vi skal løse et ligningssytem med flere ubekendte, er det en god idé at se om vi kan kombinere dem til en ligning med kun én ubekendt. Hvis vi ganger den første ligning igennem med x, så bliver brøken i denne ligning lig med brøken i den anden ligning, og så kan vi trække dem fra hinanden og få en ligning i x.

Inden vi ganger igennem med x, skal vi sikre os at $x=0$ ikke er en løsning til ligningssystemet. Hvis vi ser på ligning nummer to, er det klart at der ikke findes løsninger hvor $x=0$. Derfor kan vi antage at $x \neq 0$, og få:

$$\frac{x}{x+y} + x^2 = 3x,$$
$$\frac{x}{x+y} = 2.$$

Ved at trække de to ligninger fra hinanden og omskrive fås

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Dette er en andengradsligning med løsningerne $x=1$ eller $x=2$.

Hvis $x=1$, fås ved at indsætte i anden ligning at $\frac{1}{1+y} = 2$, og altså $y = -\frac{1}{2}$. Hvis vi indsætter $x=1$ og $y=-\frac{1}{2}$ i første ligning, ses at $(x, y) = (1, -\frac{1}{2})$ er en løsning til ligningssystemet.

Hvis $x = 2$, er $\frac{2}{2+y} = 2$, og altså $y = -1$. Ved indsættelse ses at $(x, y) = (2, -1)$ også løser ligningssystemet.

Dermed er samtlige løsninger $(x, y) = (1, -\frac{1}{2})$ og $(x, y) = (2, -1)$.

Bemærk at vi ved at omskrive ligningssystemet først finder alle mulige løsninger, men at vi skal indsætte i begge ligninger til slut for at se om de faktisk er løsninger.

Tip: Overvej hvordan du kan kombinere ligningerne så du kun har en ubekendt.

Overvej desuden om det er smart at lave et variabelskift, dvs. i stedet for fx at betragte de variable x og y, så betragter du fx $x + y$, $x - y$ eller $x \cdot y$.

Opgave 3.1. To forskellige tal a og b opfylder at de to ligninger

$$x^{2019} + ax + 2b = 0 \quad \text{og} \quad x^{2019} + bx + 2a = 0$$

har en fælles løsning.
Bestem samtlige mulige værdier af $a + b$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2019)

Opgave 3.2. Bestem alle talsæt (x, y, z) som opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned} xy &= z \\ xz &= y \\ yz &= x, \end{aligned}$$

hvor x, y og z er reelle tal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1996)

Opgave 3.3. Bestem alle talsæt (x, y) som opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{12}{x^2 + y} + y &= 4, \\ \frac{3y}{x^2 + y} + 2y &= 5 \end{aligned}$$

hvor x og y er reelle tal.

Opgave 3.4. Bestem alle tal x, y og z som opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^2 + yz &= 1, \\ y^2 - xz &= 0, \\ z^2 + xy &= 1. \end{aligned}$$

(Georg Mohr-Konkurrencen 2015)

4 Skjulte andengradsligninger og variabelskift

Eksempel

Vi har to positive reelle tal x og y, hvor $x < y$. Det aritmetiske gennemsnit mellem x og y er $A = \frac{1}{2}(x+y)$, og det geometriske gennemsnit er $G = \sqrt{xy}$. Hvad er $\frac{y}{x}$ lig med, hvis $3A = 5G$?
(Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2008-2009, 2. runde)

Ligningen $3A = 5G$ svarer til

$$\frac{3}{2}(x+y) = 5\sqrt{xy}.$$

Da vi gerne vil finde størrelsen $\frac{y}{x}$, dividerer vi med x. Desuden ganges med 2 for at slippe af med de halve:

$$3\left(1+\frac{y}{x}\right) = 10\frac{\sqrt{xy}}{x} = 10\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Det kan umiddelbart se grimt ud, men faktisk har vi nu en skjult andegradsligning hvor den variable er $\sqrt{\frac{y}{x}}$:

$$3\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 - 10\sqrt{\frac{y}{x}} + 3 = 0.$$

Ifølge diskriminantformlen er

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 3\cdot 3}}{6} = \frac{10\pm 8}{6}.$$

Vi ved at $y > x$, og dermed specielt $\frac{y}{x} > 1$. Derfor er den eneste mulige løsning $\sqrt{\frac{y}{x}} = 3$, og altså $\frac{y}{x} = 9$.

Tip: Skjulte andengradsligninger er ligninger der umiddelbart ikke ligninger andengradsligninger, men er det hvis vi vælger den variable med omhu. I eksemplet før kunne vi fx lave et variabelskift så vi i stedet for at betragte ligningen som en ligning med ubekendte x og y betragtede den som en ligning med ubekendt $\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Ligningen

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

ligner umiddelbart en fjerdegradsligning, men hvis vi lader den ubekendte være x^2, så er det en andengradsligning:

$$(x^2)^2 - 2x^2 + 1 = 0.$$

Se derfor særligt efter ligninger som kan omskrives til andengradsligninger ved et variabelskift

Opgave 4.1. Bestem samtlige løsninger (x, y) til ligningssystemet

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16}.$$

hvor x og y er reelle tal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1993)

Opgave 4.2. Bestem samtlige mulige værdier af $x + \frac{1}{x}$, hvor det reelle tal x tilfredsstiller ligningen

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

og løs denne ligning.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2000)

5 Kvadratsætninger

Kvadratsætninger

De tre kvadratsætninger er nyttige i mange opgaver:

1. kvadratsætning: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
2. kvadratsætning: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
3. kvadratsætning: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Enhver matematiker ved at så snart hun ser udtryk som fx $a^2 - b^2$ eller $a^2 + b^2 + 2ab$, så er det stort set altid en god idé at omskrive vha. kvadratsætningerne. Hvis man har flere ligninger, kan man forsøge at kombinere dem så man kan udnytte kvadratsætningerne.

Eksempel

De reelle tal x og y opfylder at $x^2 + y^2 + xy = 229$ og $xy + x + y = 77$. Bestem de mulige værdier af x og y?
(Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2007-2008, 2. runde)

Vi bemærker først at hvis vi lægger de to ligninger sammen, så får vi

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + y = 306,$$

og ved at omskrive med første kvadratsætning

$$(x+y)^2 + x + y = 306.$$

Det er smart fordi vi nu kan opfatte ligningen som en skjult andegradsligning i $x+y$:

$$(x+y)^2 + (x+y) - 306 = 0.$$

Ved at løse ligningen med diskriminantformlen, fås

$$x + y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 306}}{2} = \frac{-1 \pm 35}{2},$$

dvs. $x + y = -18$ eller $x + y = 17$.

Hvis vi både kender $x+y$ og $x-y$, så kan vi finde x og y. Derfor betragter vi de to oprindelige ligninger og ser om vi kan kombinere dem så vi får $(x-y)^2$. Ved at tage den første og trække 3 gange den anden fra, fås

$$x^2 + y^2 + xy - 3(xy + x + y) = 229 - 3 \cdot 77 = -2.$$

Ved yderligere at omskrive med anden kvadratsætning og lægge $3(x+y)$ til på begge sider fås

$$(x-y)^2 = -2 + 3(x+y).$$

Hvis $x + y = -18$, så er $(x-y)^2$ negativ, hvilket ikke er muligt.

Hvis $x + y = 17$, da er $(x-y)^2 = -2 + 3 \cdot 17 = 49$, og dermed $x - y = \pm 7$.

Vi har nu $x + y = 17$ og $x - y = \pm 7$. Ved at løse ligningssystemet fås $(x, y) = (12, 5)$ og $(x, y) = (5, 12)$, dvs. der kan ikke være andre løsninger end disse. Ved at indsætte ses at de faktisk også er løsninger.

Tip: Tænk på at omskrive udtryk eller kombinere ligninger så du kan bruge kvadratsætningerne til at omskrive.

Opgave 5.1. Lad a, b, c og d være vilkårlige reelle tal. Bevis at hvis

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da,$$

så er $a = b = c = d$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1991)

Opgave 5.2. Bestem alle talsæt (x, y, z) som opfylder at

$$x + y = 2$$
$$xy - z^2 = 1.$$

hvor x, y og z er reelle tal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2006)

Opgave 5.3. For ethvert reelt tal m har ligningen

$$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$$

to løsninger, som betegnes x_1 og x_2. Bestem m således at $x_1^2 + x_2^2$ er mindst mulig.
(Georg Mohr-Konkurrencen 1998)

Opgave 5.4. Georg undersøger hvilke hele tal der kan skrives på formen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm n^2.$$

For eksempel kan tallet 3 skrives som $-1^2 + 2^2$, og tallet -13 kan skrives som $+1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2$. Kan alle hele tal skrives på denne måde?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2021)

Opgave 5.5. Find alle talsæt (x, y, z) som opfylder

$$x^3 - y^2 = z^2 - x$$
$$y^3 - z^2 = x^2 - y$$
$$z^3 - x^2 = y^2 - z$$

hvor x, y og z er reelle tal.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2004)

6 Udfordringer

I dette sidste afsnit er samlet nogle udfordrende opgaver fra Georg Mohr-Konkurrencen som typisk kræver at du kombinerer flere af teknikkerne vi har set på indtil nu.

Opgave 6.1. Lad $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$ være en følge af reelle tal som for alle $i < j$ opfylder $x_i + x_j \leq 2j$. Bestem den størst mulige værdi af summen $x_0 + x_1 + \cdots + x_{2014}$.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2014)

Opgave 6.2. For hvilke reelle tal p har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{1}{x_1^2} &= p x_2, \\ x_2^4 + \frac{1}{x_2^2} &= p x_3, \\ &\vdots \\ x_{2004}^4 + \frac{1}{x_{2004}^2} &= p x_{2005}, \\ x_{2005}^4 + \frac{1}{x_{2005}^2} &= p x_1 \end{aligned}$$

netop én løsning $(x_1, x_2, \ldots, x_{2005})$ hvor $x_1, x_2, \ldots x_{2005}$ er reelle tal?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2005)

Opgave 6.3. Tallene $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er bestemt ved $a_0 = 0$, og

$$a_n = \begin{cases} 1 + a_{n-1} & \text{når } n \text{ er positiv og ulige,} \\ 3a_{\frac{n}{2}} & \text{når } n \text{ er positiv og lige.} \end{cases}$$

Hvor mange af disse tal er mindre end 2007?
(Georg Mohr-Konkurrencen 2007)

7 Løsninger

Opgave 1.1 Kald cifrene på Georgs tre kort for A, B og C så $A > B > C$. Det største tal der kan dannes, skrives da ABC, og det næststørste skrives ACB da disse to kombinationer har flest mulige hundreder. Vi har altså

$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ +\ A\,C\,B \\ \hline 1\,7\,3\,2 \\ \hline\hline \end{array}$$

Da summen ender på 2, må $B + C = 2$ eller $B + C = 12$. Fordi B og C er to forskellige positive cifre, kan $B + C = 2$ udelukkes, og den eneste mulighed er altså $B+C = 12$. Når man lægger enercifrene sammen, får man altså 1 i mente. Når man lægger tiercifrene sammen og husker menten, får man $1+B+C = 13$. Der er altså igen 1 i mente. Når man lægger hundredecifrene sammen, fås derfor $1 + A + A = 17$, altså $2A = 16$ og dermed $A = 8$. Da $B + C = 12$, og B er større end C, må B være større end 6. Samtidig er B mindre end $A = 8$. Altså må $B = 7$, og af $B + C = 12$ fås så $C = 5$. Georgs mor kan derfor godt regne ud hvilke tre cifre Georg har valgt.

Opgave 1.2 Oprindelig har A, B og C henholdsvis a, b og c kroner. Fordelingen (a, b, c) ændres først til $(a - b, 2b, c)$ når A giver lige så mange penge til B som B har i forvejen. Derefter ændres den til $(a - b, 2b - c, 2c)$ når B giver lige så mange penge til C som C har i forvejen. Til slut ændres den til $(2a - 2b, 2b - c, 2c - (a - b))$ når C giver lige så mange penge til A som A nu har.

Til slut har A, B og C lige mange penge, dvs. 40 kroner hver. Dermed er

$$2a - 2b = 40, \quad 2b - c = 40, \quad 2c - (a - b) = 40.$$

Første ligning viser at $a - b = 20$. Dermed giver tredje ligning at

$$c = \frac{40 + (a - b)}{2} = \frac{40 + 20}{2} = 30.$$

Nu giver anden ligning at

$$b = \frac{40 + c}{2} = \frac{40 + 30}{2} = 35.$$

Til slut giver $a - b = 20$ at $a = 20 + b = 20 + 35 = 55$. Altså er startfordelingen $(a, b, c) = (55, 35, 30)$.

Opgave 1.3 Kald antal elever der scorede under klassens gennemsnit, for a. Hvis de a elever havde scoret hver 4 point højere, ville det øge pointsummen med $a \cdot 4$, og gennemsnittet ville forøges med $\frac{a \cdot 4}{24}$. Altså er $\frac{a \cdot 4}{24} = 3$, og dermed $a = 18$. Da tre elever scorede gennemsnittet, og $a = 18$ scorede under gennemsnittet, må $24 - 3 - 18 = 3$ elever have scoret over gennemsnittet.

Opgave 1.4 Kald farten (målt i km/t) for v, strækningen (målt i km) for s og tiden (målt i timer) for t. Relationen mellem v, s og t er $s = tv$.

Hvis farten sættes op med 10 kilometer i timen, kan turen gøres 40 minutter hurtigere, og det giver relationen $s = (t - \frac{2}{3})(v + 10)$. Når vi ganger ud og erstatter s med tv, fås

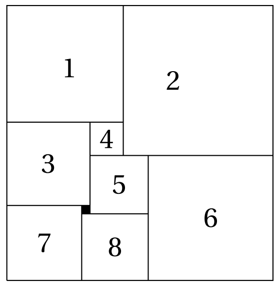
$$10t - \frac{2}{3}v = \frac{20}{3}.$$

Hvis farten derimod sættes ned med 10 kilometer i timen, tager turen 1 time længere, og det giver relationen $s = (t+1)(v-10)$. Når vi ganger ud og erstatter s med tv, fås

$$-10t + v = 10.$$

Nu har vi to ligninger med to ubekendte, og ved at løse dem fås $v = 50$ og $t = 4$, dvs. $s = tv = 4 \cdot 50 = 200$. Den gennemkørte strækning er altså 200 km.

Opgave 1.5 Nummerer kvadraterne fra 1 til 8 som vist på figuren (det sorte kvadrat får intet nummer).



Sidelængden i kvadrat i betegnes x_i. Vi udtrykker nu sidelængderne af kvadraterne ved sidelængden af kvadrat nummer 5. Af figuren ses:

$$\begin{aligned}
x_8 &= x_5+1,\\
x_7 &= x_8+1=(x_5+1)+1=x_5+2,\\
x_3 &= x_7+1=(x_5+2)+1=x_5+3,\\
x_4 &= x_3-(x_5-1)=(x_5+3)-(x_5-1)=4,\\
x_1 &= x_3+x_4=(x_5+3)+4=x_5+7,\\
x_2 &= x_1+x_4=(x_5+7)+4=x_5+11,\\
x_6 &= x_5+x_8=x_5+(x_5+1)=2x_5+1.
\end{aligned}$$

Af figuren ses at $x_5+x_6=x_2+x_4$. Heraf fås ligningen $x_5+(2x_5+1)=(x_5+11)+4$, hvis løsning er $x_5=7$. Hermed bliver alle kvadraters sidelængder kendte, og dermed er der kun én mulighed for rektanglets sidelængder.

Opgave 2.1 De tre letteste udgør $\frac{5}{13}$ af 65%, dvs. $\frac{5\cdot 65}{13}\%=25\%$ af hele fangsten. De mellemste fisk udgør dermed $100\%-(35\%+25\%)=40\%$ af fangsten. I mellemgruppen må der følgelig være mindst fire fisk (da de tre tungeste kun vejer 35% tilsammen). På den anden side kan der heller ikke være mere end fire fisk i mellemgruppen: Hver mellemfisk vejer jo nemlig mindst så meget som gennemsnittet af de tre letteste fisk, altså mindst $\frac{1}{3}\cdot 25\%=8\frac{1}{3}\%$, og fem mellemfisk ville dermed tilsammen veje over 40%. Altså er der præcis fire fisk i mellemgruppen, og dermed i alt $3+4+3=10$ fisk.

Opgave 2.2 Af ulighederne $a+b<b+c$ og $c+d<d+e$ følger henholdsvis $a<c$ og $c<e$, dvs. $a<c<e$. Af ulighederne $e+a<d+e$, $c+d<b+c$ og $a+b<e+a$ følger henholdsvis $a<d$, $d<b$ og $b<e$, dvs. $a<d<b<e$. Af $a<c<e$ sammenholdt med $a<d<b<e$ fremgår at a er det mindste af de fem tal og e det største.

Opgave 3.1 Hvis tallet x er løsning til begge ligninger, er x også løsning til den ligning der fremkommer ved at trække den sidste ligning fra den første, altså

$$ax-bx+2b-2a=0.$$

Denne ligning er ensbetydende med

$$(a-b)x=2(a-b).$$

Da a og b er forskellige, kan vi dividere med $a-b\neq 0$, hvilket giver $x=2$. Indsættes dette i en af de oprindelige ligninger, fås

$$2^{2019}+2a+2b=0,$$

hvoraf

$$a+b=-\frac{2^{2019}}{2}=-2^{2018}.$$

Tallet -2^{2018} er altså den eneste mulighed for $a+b$.
Omvendt kan vi se at når $a+b=-2^{2018}$, så *har* de to ligninger faktisk en fælles løsning (nemlig $x=2$) uanset værdien af a og b: Ved indsættelse af $x=2$ lyder begge ligninger $2^{2019}+2a+2b=0$, og dette er sandt når $a+b=-2^{2018}$.

Opgave 3.2 Hvis vi ganger alle tre ligninger med hinanden, fås $(xyz)^2=xyz$. Altså er $xyz=0$ eller $xyz=1$. Hvis $xyz=0$, er mindst et af tallene 0, men så følger det af det oprindelige ligningssystem at alle tallene er 0.

Hvis $xyz=1$, er alle tre tal forskellige fra 0, og vi kan gange ligningerne igennem med henholdsvis z, y, x og få

$$\begin{aligned}
xyz &= z^2\\
xzy &= y^2\\
yzx &= x^2,
\end{aligned}$$

hvilket viser at $x^2=1$, $y^2=1$ og $z^2=1$. Dermed er $(x,y,z)=(\pm1,\pm1,\pm1)$ hvor det negative fortegn må optræde et lige antal gange da $xyz=1$. Samtlige løsninger til ligningssystemet er altså at finde blandt talsættene $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ og $(-1,-1,1)$. At alle disse faktisk er løsninger, ses ved at gøre prøve i det oprindelige ligningssystem. Hermed er den fuldstændige løsning bestemt.

Opgave 3.3 Af sidste ligning ses at $y=0$ ikke er en løsning. Antag derfor at $y\neq 0$, og omskriv til

$$\begin{aligned}
\frac{12y}{x^2+y}+y^2 &= 4y,\\
\frac{12y}{x^2+y}+8y &= 20.
\end{aligned}$$

Ved at trække de to ligninger fra hinanden og omskrive fås

$$y^2 - 12y + 20 = 0$$

og altså

$$(y-2)(y-10) = 0.$$

Dermed er $y = 2$ eller $y = 10$. Hvis $y = 2$, er

$$\frac{12}{x^2+2} + 2 = 4,$$

og altså $x = \pm 2$. Hvis $y = 10$, er

$$\frac{12}{x^2+10} + 10 = 4,$$

og altså $x^2 = -12$ hvilket er umuligt. Eneste mulige løsninger er derfor $(x, y) = (\pm 2, 2)$, og ved indsættelse tjekkes at de begge løser ligningssystemet.

Opgave 3.4 Bemærk først at ingen af x, y og z kan være 0. Gang nu ligningerne igennem med henholdsvis z, x og $-y$. Da er

$$\begin{aligned} zx^2 + yz^2 &= z, \\ xy^2 - x^2z &= 0, \\ -yz^2 - xy^2 &= -y. \end{aligned}$$

Ved at lægge de tre ligninger sammen fås $0 = z - y$ og altså $y = z$. Da de oprindelige ligninger er symmetriske i x og z, fås helt tilsvarende $y = x$. Vi ved nu at $x = y = z$ hvis x, y og z skal løse ligningssystemet. Altså viser $x^2 + yz = 1$ at $2x^2 = 1$, og dermed at $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. De to eneste muligheder er derfor $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, og ved indsættelse ses at disse begge er løsninger.

Opgave 4.1 Af første ligning fås $y^2 = 1 - x^2$. Dette indsættes i anden ligning:

$$x^6 + (1-x^2)^3 = \frac{7}{16}.$$

Først omskrives til

$$x^6 + 1 - 3x^2 + 4x^4 - x^6 = \frac{7}{16},$$

og ved at samle leddene og dividere med 3 fås

$$x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = 0.$$

Dette er en andengradsligning med x^2 som den ubekendte og diskriminant $d = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$. Dermed er løsningerne

$$x^2 = \frac{-(-1) - \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{og} \quad x^2 = \frac{-(-1) + \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Hvis $x^2 = \frac{1}{4}$, er $y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, dvs. $x = \pm\frac{1}{2}$ og $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Hvis $x^2 = \frac{3}{4}$, er $y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, dvs. $y = \pm\frac{1}{2}$ og $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Samtlige mulige otte løsninger er dermed

$$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{og} \quad \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right),$$

og ved indsættelse ses at de alle er løsninger.

Opgave 4.2 Vi ønsker at omskrive ligningen til en ligning hvor $1 + \frac{1}{x}$ er den ubekendte. Da $x = 0$ tydeligvis ikke er løsning til ligningen, kan vi dividere med x^2 på begge sider af lighedstegnet:

$$x^2 + 5x - 4 + 5\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Da $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, kan vi yderligere omskrive til

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Nu har vi en skjult andengradsligning i $x + \frac{1}{x}$ med diskriminant

$$d = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49,$$

og løsninger

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-5-7}{2}=-6 \quad \text{og} \quad x+\frac{1}{x}=\frac{-5+7}{2}=1.$$

Hvis $x+\dfrac{1}{x}=-6$, er $x^2+6x+1=0$ med diskriminant $d=6^2-4\cdot 1\cdot 32$, og dermed

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{16\cdot 2}}{2}=\frac{-6\pm 4\cdot\sqrt{2}}{2}=-3\pm 2\sqrt{2}.$$

Hvis $x+\dfrac{1}{x}=1$, er $x^2-x+1=0$ med diskriminant $d=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3$, dvs. denne ligning har ingen løsninger.

Alt i alt fås at de mulige værdier af $x+\dfrac{1}{x}$ er -6, og at løsningerne til den oprindelige ligning er $x=-3\pm 2\sqrt{2}$.

Opgave 5.1 Ved multiplikation med 2 fås

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2=2ab+2bc+2cd+2da.$$

Dette kan omskrives til

$$a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+d^2-2cd+d^2+a^2-2da=0,$$

og yderligere med 2. kvadratsætning til

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0.$$

Venstre side af ligningen består af fire led som hver især er positive eller 0. Da summen er 0, må alle leddene være lig med 0, dvs. $a=b$, $b=c$, $c=d$ og $d=a$, og altså $a=b=c=d$ som ønsket.

Opgave 5.2 Af den første ligning følger at $y=2-x$. Ved at kombinere dette med den anden ligning fås

$$z^2=xy-1=x(2-x)-1=2x-x^2-1=-(x-1)^2.$$

Da z^2 ikke er negativ og $-(x-1)^2$ ikke er positiv, må de begge være 0, dvs. at $z=0$ og $x=1$. Det giver yderligere $y=2-x=2-1=1$. Hvis der findes en løsning, må den derfor være $(x,y,z)=(1,1,0)$, og ved indsættelse i begge ligninger ses at dette faktisk er en løsning.

Opgave 5.3 I andengradsligningen $x^2+bx+c=0$ med rødderne x_1 og x_2 er det kendt at $b=-(x_1+x_2)$ og $c=x_1x_2$. Altså er $x_1+x_2=-(m-2)$ og $x_1x_2=-(m+3)$.

Desuden kan $x_1^2+x_2^2$ omskrives ved hjælp af første kvadratsætning:

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Dette kan kombineres med udtrykkene ovenfor til

$$x_1^2+x_2^2=(-2)^2+2(m+3)=m^2-2m+10.$$

Dette udtryk er et andengradspolynomium i m. Det bliver mindst muligt når m er førstekoordinaten for toppunktet, dvs. når $m=1$.

Opgave 5.4 Svaret er ja. Bemærk først at tallene 1, 2, 3 og 4 kan opnås, for eksempel således: $1^2=1$, $2=-1^2-2^2-3^2+4^2$, $3=-1^2+2^2$, $4=1^2-2^2-3^2+4^2$. Bemærk dernæst at der for enhver værdi af a gælder at $a^2-(a+1)^2-(a+2)^2+(a+3)^2=a^2-(a^2+2a+1)-(a^2+4a+4)+(a^2+6a+9)=4$, og tilsvarende, med det omvendte valg af fortegn, $-a^2+(a+1)^2+(a+2)^2-(a+3)^2=-4$. Det betyder at hvis man kan skrive et tal m på den ønskede form, så kan man også opnå tallene $m+4$ og $m-4$ ved blot at medtage fire yderligere led i summen, med passende valg af fortegn. Ved at gentage dette argument ser man at hvis m kan skrives på den ønskede form, så gælder det samme for alle tal $m+4k$, hvor k er et helt tal. Med udgangspunkt i $m=1,2,3,4$, kan alle hele tal fremkomme som $m+4k$, hvormed Georg kan skrive alle hele tal på den ønskede form.

Opgave 5.5 En omskrivning af første ligning

$$x^3+x=y^2+z^2\geq 0$$

viser at $x\geq 0$. Hvis $x=0$, da må også $y=0$ og $z=0$. De to øvrige ligninger giver tilsvarende resulater, dvs. hvis en af de tre ubekendte er 0, da er de alle 0. Det er oplagt at $(x,y,z)=(0,0,0)$ faktisk er en løsning.

Nu antager vi at x, y og z alle er positive. Ved at lægge de tre ligninger sammen fås

$$(x^3+y^3+z^3)-(x^2+y^2+z^2)=(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z).$$

Dette kan omskrives til

$$(x^3-2x^2+x)+(y^3-2y^2+y)+(z^3-2z^2+z)=0$$

og yderligere ved anden kvadratsætning til

$$x(x-1)^2+y(y-1)^2+z(z-1)^2=0.$$

Alle led på venstreiden er ikke-negative, og de må derfor være 0. Da vi har antaget at x, y og z alle er positive, fås $(x,y,z)=(1,1,1)$, og ved indsættelse i det oprindelige ligningssystem ses at det faktisk er en løsning. Altså er de eneste løsninger $(x,y,z)=(0,0,0)$ og $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Opgave 6.1 Vi viser først at $x_0+x_1+x_2\le 5$:

$$\begin{aligned} x_0+x_1+x_2 &= \frac{1}{2}(x_0+x_1)+\frac{1}{2}(x_0+x_2)+\frac{1}{2}(x_1+x_2) \\ &\le \frac{1}{2}(2\cdot 1)+\frac{1}{2}(2\cdot 2)+\frac{1}{2}(2\cdot 2)=5 \end{aligned}$$

ifølge betingelsen $x_i+x_j\le 2j$ for $i<j$. Vi har derfor

$$\begin{aligned} x_0+x_1+\cdots+x_{2014} &= (x_0+x_1+x_2)+(x_3+x_4)+(x_5+x_6)+\cdots+(x_{2013}+x_{2014}) \\ &\le 5+2\cdot 4+2\cdot 6+\cdots+2\cdot 2014 \\ &= 1+2\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 6+\cdots+2\cdot 2014 \\ &= 1+2\cdot 2\cdot(1+2+3+\cdots+1007)=1+2\cdot 2\cdot\frac{1007\cdot 1008}{2} \\ &= 1+2\cdot 1007\cdot 1008=2030113. \end{aligned}$$

Summen er altså højst 2030113.

Med valget $x_{2n-1}=2n-1$ og $x_{2n}=2n+1$, altså

$$(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,\dots,x_{2013},x_{2014})=(1,1,3,3,5,5,7,\dots,2013,2015),$$

er kravet $x_i+x_j\le 2j$ for $i<j$ opfyldt da $x_i+x_j\le x_{j-1}+x_j=2j$. Der gælder desuden lighedstegn i alle vurderingerne ovenfor, dvs. summen af disse tal er 2030113, som altså er den maksimale sum.

Opgave 6.2 Da ligningssystemets venstresider alle er positive, er der ingen løsninger når $p=0$. Desuden er $(x_1,x_2,\dots,x_{2005})$ en løsning for p netop hvis $(-x_1,-x_2,\dots,-x_{2005})$ er en løsning for $-p$. Det er derfor tilstrækkeligt at se på tilfældet hvor p er positiv. Først overvejer vi hvad der sker hvis $x_1=x_2=\cdots=x_{2005}=x$. I dette tilfælde er alle ligningerne $x^4+\frac{1}{x^2}=px$, og hvis denne ligning har mere end en løsning, har det oprindelige ligningssystem også. Ligningen kan omformes til en andengradsligning i x^3 ved at gange med x^2 på begge sider af ligningstegnet (bemærk at $x\neq 0$):

$$(x^3)^2-px^3+1=0.$$

Denne ligning har mere end en løsning hvis diskriminanten $d=(-p)^2-4\cdot1\cdot1=p^2-4$ er positiv, dvs. hvis $p>2$. Vi kan derfor slutte at $p\le 2$ hvis det oprindelige ligningssystem højst skal have en løsning. Hvis $0<p\le 2$ og $(x_1,x_2,\dots,x_{2005})$ er en løsning, er

$$px_{i+1}=x_i^4+\frac{1}{x_i^2}=\left(x_i^2-\frac{1}{x_i}\right)^2+2x_i\ge 2x_i$$

og dermed

$$x_{i+1}\ge\frac{2}{p}x_i\ge x_i$$

for alle $i=1,2,\dots,2005$ med skarpt ulighedstegn hvis $0<p<2$ (bemærk at her opfattes $x_{2005+1}=x_1$). Altså er $x_1\le x_2\le\cdots\le x_{2005}\le x_1$, med ligningstegn netop hvis $p=2$. Der er derfor ingen løsninger til ligningssystemet for $0<p<2$, og hvis $p=2$ er $x_1=x_2=\cdots=x_{2005}=x$ løsninger til ligningen $(x^3)^2-2x^3+1=0$, dvs. $x_1=x_2=\cdots=x_{2005}=1$. Der er altså netop en løsning til ligningssystemet for $p=\pm 2$.

Opgave 6.3 Først vises at følgen er voksende, dvs. at $a_0<a_1<a_2<\dots$, ved at vise at det modsatte er umuligt. Antag nemlig at følgen ikke er voksende, dvs. at der findes et n så $a_n\le a_{n-1}$, og lad M være det mindste sådanne n. For ulige n gælder klart $a_n>a_{n-1}$ ifølge definitionen af a_n, så tallet M må være lige. Vi skriver $M=2k$ og bemærker at $a_M=3a_k$, $a_{M-1}=1+a_{M-2}$ og $a_{M-2}=3a_{k-1}$. Da M var det mindste tal n med egenskaben $a_n<a_{n-1}$, og da k er mindre end

M, gælder $a_k > a_{k-1}$. Da a_k og a_{k-1} er hele tal, følger at $a_k \geq a_{k-1} + 1$. Heraf fås videre $3a_k \geq 3 + 3a_{k-1}$ og

$$a_M = 3a_k \geq 3 + 3a_{k-1} = 3 + a_{M-2} = 2 + 1 + a_{M-2} = 2 + a_{M-1} > a_{M-1}$$

hvilket er i modstrid med $a_M \leq a_{M-1}$. Dermed er antagelsen om at der findes et n så $a_n \leq a_{n-1}$, forkert, og vi har derfor vist at følgen er voksende.

Antallet af tal a_n som er mindre end 2007, kan nu tælles ved at finde det største tal m for hvilket $a_m < 2007$, for da er $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ mindre end 2007, mens $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ er større end 2007. For $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 128$ er $a_n = 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187$ hvor det sidste tal er større end 2007, dvs. at $m < 128$. Tallet a_{127} beregnes:

$$\begin{aligned} a_{127} &= a_{126} + 1 = 3a_{63} + 1 = 3a_{62} + 4 = 9a_{31} + 4 = 9a_{30} + 13 \\ &= 27a_{15} + 13 = 27a_{14} + 40 = 81a_7 + 40 = 81a_6 + 121 \\ &= 243a_3 + 121 = 243a_2 + 364 = 729a_1 + 364 = 1093. \end{aligned}$$

Da dette tal er mindre end 2007, er $m = 127$, dvs. at $a_0, a_1, \ldots, a_{127}$ er mindre end 2007 mens resten er større, og dermed er antallet af a_n mindre end 2007 lig med 128.