1 Polynomier

I dette kapitel får du en introduktion til polynomier, samt en grundlæggende forståelse af grafer for polynomier, polynomiumsdivision og polynomiers rødder og koefficienter. Desuden er der flere afsnit om polynomier med heltallige koefficienter og deres særlige egenskaber mht. delelighed og irreducibilitet.

I de første afsnit bliver mange sætninger postuleret uden bevis fordi de er ret tekniske, og vi her har mere fokus på intuition og grundlæggende forståelse af centrale egenskaber, men i afsnit 1.5 beviser vi mange af de tidligere sætninger. Det allersidste afsnit kræver kendskab til differentialregning.

Undervejs nævner vi de komplekse tal, men du kan sagtens læse kapitlet uden at vide hvad komplekse tal er, og der er ingen opgaver der inddrager komplekse tal.

Indhold

1.1 Polynomier med reelle koefficienter

I dette afsnit får du en introduktion til polynomier med reelle koefficienter hvor formålet i høj grad er at opbygge en intuition om polynomier samt at få teknikker til at regne med polynomier.

Flere sætninger præsenteres uden bevis, simpelthen fordi beviserne er tekniske og svære at forstå før man er mere fortrolig med polynomier. Derfor kommer der et senere afsnit hvor vi beviser mange af sætningerne, men enkelte sætninger påstuleres også uden bevis da de bygger på meget mere omfattende teori end der er plads til her.

Definition af polynomium

Et *polynomium* P med reelle koefficienter er en funktion defineret på de reelle tal med forskriften $P(x)=0$ eller

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

hvor $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbb{R}$ og $a_n\neq 0$.

Graden af polynomiet P er n, pånær hvis $P(x)=0$, da er graden $-\infty$. Fx har polynomiet $P(x)=x^7+x^2-6$ grad 7, mens polynomiet $P(x)=2$ har grad 0.

Definition af rod

Et tal x_0 kaldes en *rod* i P hvis $P(x_0)=0$.

Sætning 1.1.1. Polynomier og rødder

Et polynomium af grad $n\geq 0$ har højst n rødder.

Et polynomium af ulige grad har mindst én rod.

Sætning 1.1.1 bevises i afsnit 1.5.

De næste eksempler giver en intuition om polynomiers graf, og flere egenskaber påstås uden bevis.

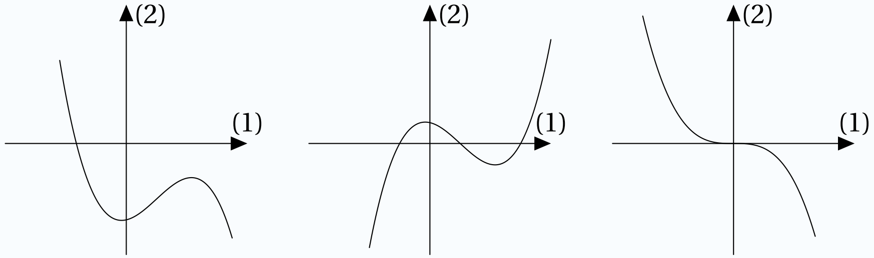
Eksempel 1.1.1. Trejdegradspolynomiers graf

Tredjegradspolynomiets graf skærer ifølge sætning 1.1.1 førsteaksen 1, 2 eller 3 gange da polynomiet har mindst én rod og højst 3 rødder.

Grenene vender hver sin vej, dvs. den ene går opad og den anden nedad.

Tredjegradspolynomiet har 0 eller 2 lokale ekstremumspunkter.

Figuren viser tre forskellige eksempler på forløb for grafen for trejdegradspolynomier der illustrerer disse pointer.



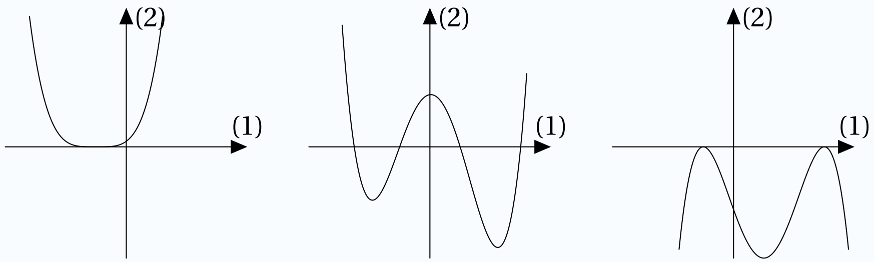
Eksempel 1.1.2. Fjerdegradspolynomiers graf

Fjerde gradspolynomiets graf skærer ifølge sætning 1.1.1 førsteaksen 0, 1, 2, 3 eller 4 gange.

Grenene vender samme vej, dvs. de går begge opad eller begge nedad.

Fjerdegradspolynomiet har 1 eller 3 lokale ekstremumspunkter.

Figuren viser tre forskellige eksempler på forløb for grafen for fjerdegradspolynomier der illustrerer disse pointer.



Sætning 1.1.2. Grafen for et polynomium

Grafen for et polynomium af positiv ulige grad $2m+1$ har mellem 1 og $2m+1$ skæringspunkter med førsteaksen, grenene vender hver sin vej, og polynomiet har et lige antal lokale ekstremumspunkter.

Grafen for et polynomium af positiv og lige grad $2m$ har mellem 0 og $2m$ skæringspunkter med førsteaksen, grenene vender samme vej, og polynomiet har et ulige antal lokale ekstremumspunkter.

Polynomier betragtet som funktioner over de reelle tal er kontinuerte. Her vil vi ikke definere kontinuitet, men vi udnytter flere gange følgende kontinuitetsegenskab, som vi ikke beviser.

Sætning 1.1.3. Mellemværdisætningen

Lad $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, og lad d være et reelt tal mellem $f(a)$ og $f(b)$. Da findes et tal $c\in]a;b[$ så $f(c)=d$.

Eksempel 1.1.3. Rødder i polynomier

Når man skal undersøge hvor mange reelle rødder et polynomium har, behøver man ikke nødvendigvis at finde dem. Man kan i stedet udnytte at et polynomium er en kontinuert funktion, og benytte mellemværdisætningen.

Fx har fjerdegradspolynomiet

$$P(x)=x^4-2x^3-2x^2+3x+1$$

fire reelle rødder da $P(-2)=19$, $P(-1)=-1$, $P(0)=1$, $P(2)=-1$ og $P(3)=19$, dvs. der er ifølge mellemværdisætningen en reel rod i hvert af følgende intervaller: $]-2;-1[$, $]-1;0[$, $]0;2[$ og $]2;3[$. Vi ved desuden at et fjerdegradspolynomium højst har fire rødder, dvs. P har præcis fire rødder.

Opgave 1.1.1. Betragt tredjegradspolynomiet $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + a$, hvor a er en konstant. Find en værdi af a så P har tre forskellige rødder. (Der er mange, og du skal blot finde én).

Opgave 1.1.2. Vis at fjerdegradspolynomiet

$$P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

har fire reelle rødder.

Opgave 1.1.3. Lad $n \geq 1$. Hvor mange rødder har n'te gradspolynomiet

$$P(x) = x(x-2)(x-4)\cdots(x-2n) + (x-1)(x-3)(x-5)\cdots(x-(2n+1))\,?$$

Hint: 18

Opgave 1.1.4. Et polynomium f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

Bevis at der findes et tal a som opfylder at $f(f(a)) = a$ uden at $f(a) = a$. (Georg Mohr-Konkurrencen 2011) *Hint*: 17, 22

Eksempel 1.1.4. Omskriv til anden variabel

Hvis vi ved at x_0 er rod i et polynomium, så kan vi ofte finde et andet polynomium af samme grad med fx x_0^2, $\frac{1}{x_0}$ eller $x_0 + \frac{1}{x_0}$ som rod.

Det reelle tal a er rod i $P(x) = x^3 - x - 1$. Vi ønsker at bestemme et tredjegradspolynomium med heltallige koefficienter som har a^2 som rod.

Da a er rod i P, ved vi at $a^3 - a - 1 = 0$ og derfor $a^3 - a = 1$. Det udnytter vi til at konstruere et tredjegradspolynomium med a^2 som rod:

$$1 = \left(a^3 - a\right)^2 = a^2\left(a^2 - 1\right)^2 = a^2\left(a^4 - 2a^2 + 1\right) = \left(a^2\right)^3 - 2\left(a^2\right)^2 + a^2.$$

Altså er a^2 er rod i

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Opgave 1.1.5. Et tredjegradspolynomium $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ har rødderne a, b og c. Angiv et tredjegradspolynomium med rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$. (Georg Mohr-Konkurrencen 1994) *Hint*: 19

Opgave 1.1.6. Bestem samtlige mulige værdier af $x + \frac{1}{x}$, hvor x tilfredsstiller ligningen $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$, og løs denne ligning. (Georg Mohr-Konkurrencen 2000) *Hint*: 14

1.2 Polynomiumsdivision

Nu skal vi se hvordan man dividerer polynomier med hinanden. Når man dividerer et polynomium med et andet, kan man få resten 0, dvs. at divisionen går op, men man kan også få et andet polynomium som rest. Det svarer lidt til division med rest for hele tal.

Eksempel 1.2.1. Polynomiumsdivision

Man dividerer $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 15$ med $Q(x) = x - 3$ sådan:

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
x-3 & x^3 & -2x^2 & +2x & -15 & x^2+x+5 \quad \leftarrow \text{resultat}\\
(x-3)\cdot x^2 \rightarrow & x^3 & -3x^2 & & & \\ \hline
 & & x^2 & +2x & -15 & \\
(x-3)\cdot x \rightarrow & & x^2 & -3x & & \\ \hline
 & & & 5x & -15 & \\
(x-3)\cdot 5 \rightarrow & & & 5x & -15 & \\ \hline
 & & & & 0 & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Da resten er 0, betyder det at

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x^2 + x + 5).$$

Eksempel 1.2.2. Polynomiumsdivision med rest

Man dividerer $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 7$ med $Q(x) = x^2 + 1$ sådan:

$$
\begin{array}{r|rrrr|l}
x^2+1 & x^3 & +3x^2 & -2x & +7 & x+3 \quad \leftarrow \text{resultat}\\
(x^2+1)\cdot x \rightarrow & x^3 & +0x^2 & +x & & \\ \hline
 & & 3x^2 & -3x & +7 & \\
(x^2+1)\cdot 3 \rightarrow & & 3x^2 & +0x & +3 & \\ \hline
 & & & -3x & +4 & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Her er resten $-3x + 4$, og det betyder at

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 7 = (x^2+1)(x+3) - 3x + 4$$

Opgave 1.2.1. Udfør følgende divisioner:

a) Divider $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2$ med $Q(x) = x - 1$.

b) Divider $P(x) = 3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 9x + 4$ med $Q(x) = x^2 + x + 1$.

c) Divider $P(x) = x^n - 1$ med $Q(x) = x - 1$.

d) Divider $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ med $Q(x) = x - 1$.

Sætning 1.2.1. Polynomiumsdivision

Lad P og Q være polynomier med reelle koefficienter af grad henholdsvis n og m med $n \geq m \geq 0$.

Da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ og et entydigt bestemt polynomium R af grad mindre end m, så

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x).$$

Polynomiet R kaldes resten af P ved division med Q.

Sætning 1.2.1 bevises i afsnit 1.5 i en mere generel version.

Bemærkning. Denne sætning svarer til sætningen om hele tal der siger at hvis n og m er hele tal, $m \neq 0$, da findes to entydigt bestemte hele tal d og r, $0 \leq r < m$, så

$$n = dm + r.$$

Her er r resten ved division af n med m. At et polynomium går op i et andet polynomium, vil ligesom for hele tal sige at resten ved division er 0, hvilket følgende definition siger.

Definition af delelighed

Et polynomium Q siges at *gå op i* P, hvis der findes et polynomium D så $P(x) = Q(x)D(x)$. Vi siger også at P er *delelig* med Q.

Eksempel 1.2.3. Delelighed

Vi undersøger for hvilke n polynomiet $Q(x) = x^2 + 1$ går op i

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1.$$

Da $P_3(x) = (x^2+1)(x+1)$, må x^2+1 gå op i

$$x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} = x^m \cdot P_3(x).$$

Dermed vil x^2+1 gå op i $P_{4t+s}(x)$ netop når x^2+1 går op i $P_s(x)$. Da x^2+1 ikke går op i $P_2(x), P_1(x)$ og $P_0(x)$, går x^2+1 op i $P_n(x)$ netop hvis n har rest 3 ved division med 4.

Eksempel 1.2.4. Division med rest

Hvis vi skal finde resten af

$$P(x) = x^{2011} + 16x^{2007} + 1$$

ved division med $Q(x) = x^2 - 4$ uden at udføre selve divisionen, udnytter vi sætningen om division med rest, dvs. vi ved at der findes et polynomium D og hele tal a og b så

$$x^{2011} + 16x^{2007} + 1 = (x^2-4)D(x) + ax + b.$$

For $x = 2$ fås

$$2a + b = 2^{2011} + 16 \cdot 2^{2007} + 1 = 2^{2012} + 1,$$

og for $x = -2$ fås

$$-2a + b = (-2)^{2011} + 16(-2)^{2007} + 1 = -2^{2012} + 1.$$

Ved at løse de to ligninger $2a + b = 2^{2012} + 1$ og $-2a + b = -2^{2012} + 1$ med de to ubekendte a og b ses at resten er

$$ax + b = 2^{2011}x + 1.$$

Opgave 1.2.2. Bestem resten ved division af $x^{100} - 2x^{51} + 1$ med $x^2 - 1$.

Opgave 1.2.3. Vis at $P(x) = x^2 + 2$ ikke er deleligt med et førstegradspolynomium med reelle koefficienter.

Opgave 1.2.4. Bestem a og b så $(x-1)^2$ går op i $ax^4 + bx^3 + 1$. *Hint*: 16, 15

Opgave 1.2.5. Et reelt tal $x_0 \neq 1$ er rod i polynomiet $P(x) = x^6 - 10x + 9$. Bestem $x_0 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 + x_0^5$. (Abelkonkurransen 2010-11) *Hint*: 20

Opgave 1.2.6. Et reelt tal $x_0 \neq -1$ er rod i polynomiet

$$P(x) = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 3x^2 - 18x - 11.$$

Bestem $x_0(x_0^3 + 4x_0^2 + 6x_0 + 4)$. (Abelkonkurransen 2003-04) *Hint*: 3

1.3 Faktorisering med rødder

En helt central egenskab ved polynomier som vi kommer til at udnytte igen og igen, er følgende:

Sætning 1.3.1. Rødder og faktorisering

Lad P være et polynomium af grad n, $n > 0$, med reelle koefficienter.

Hvis det reelle tal x_0 er rod i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-1$ med reelle koefficienter så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Der gælder yderligere at hvis de reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_m$ er rødder i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ med reelle koefficienter så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)D(x).$$

Sætning 1.3.1 bevises i en mere generel version i afsnit 1.5.

Eksempel 1.3.1. Rødder og faktorisering

Polynomiet $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2$ har $x_0 = 1$ som rod. Dermed ved vi at $x - 1$ er divisor i polynomiet, og ved division ses at

$$P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - x + 2).$$

Eksempel 1.3.2. Rødder og faktorisering

Hvis vi betragter polynomiet $P(x) = x^n - a^n$, er det nemt at se at $x_0 = a$ er rod. Dermed går $x - a$ op i P, og ved division ses at

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Opgave 1.3.1. Find en rod i polynomiet $P(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1}$, og udfør polynomiumsdivision som i eksemplet ovenfor.

Opgave 1.3.2. En af de to rødder i polynomiet $P(x) = mx^2 - 10x + 3$ er $\frac{2}{3}$ af den anden rod. Bestem samtlige mulige værdier af m.

Sætning 1.3.1 giver os også viden om sammenhængen mellem et polynomiums keofficienter og rødder:

Korollar 1.3.2. Vietas formler

Koefficienterne til andengradspolynomiet $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ med rødderne x_1 og x_2 er:

$$a_1 = -a_2(x_1 + x_2), \quad a_0 = a_2x_1x_2.$$

Koefficienterne til tredjegradspolynomiet $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ med rødderne x_1, x_2 og x_3 er:

$$a_2 = -a_3(x_1 + x_2 + x_3), \quad a_1 = a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \quad a_0 = -a_3x_1x_2x_3.$$

Kofficienterne til polynomiet $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ af grad n med rødderne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -a_n \sum_{i=1}^{n} x_i, \\
a_{n-2} &= a_n \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j, \\
a_{n-3} &= -a_n \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k, \\
&\vdots \\
a_0 &= (-1)^n a_n x_1 x_2 \cdots x_n.
\end{aligned}$$

Bevis. Ifølge sætning 1.3.1 er

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Formlerne følger direkte ved at gange parenteserne ud. For at nå helt i mål har vi også brug entydighedssætningen 1.5.2 der først kommer senere. Den siger at opskrivning af polynomier er entydig. □

Eksempel 1.3.3. Fjerdegradspolynomiets koefficienter

Betragt fjerdegradspolynomiet $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ med rødderne $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ og $x_4 = 3$.

Vi kan bestemme koefficienterne ved brug af korollar 1.3.2. Her ses hvordan a_2 bestemmes:

$$\begin{aligned} a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ &= (-3)(-1) + (-3)\cdot 1 + (-3)\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 3 = -10. \end{aligned}$$

Opgave 1.3.3. Polynomiet P givet ved $P(x) = x^3+5x^2-20x+14$ har rødderne r_1, r_2 og r_3. Hvad er $P(r_1 + r_2 + r_3)$? (Abelkonkurransen 2013-14)

Opgave 1.3.4. For hele tal a og n har polynomiet $P(x) = x^3 - x^2 + ax - 2^n$ tre heltallige rødder. Bestem a og n.

Opgave 1.3.5. Lad x_1 og x_2 være rødderne i $P(x) = x^2 + ax + bc$, og x_2 og x_3 rødderne i $Q(x) = x^2 + bx + ac$. Vis at hvis $ac \neq bc$, da er x_1 og x_3 rødderne i $R(x) = x^2 + cx + ab$.

Eksempel 1.3.4. Delelighed

For at undersøge for hvilke n polynomiet $P(x) = x^n - x^{n-2} + 1$, $n > 3$, er deleligt med $Q(x) = x^3 - x + 1$, bemærker vi at Q går op i P netop hvis Q går op i

$$P(x) - Q(x) = x^n - x^{n-2} - x^3 + x.$$

De reelle rødder i polynomiet

$$P(x) - Q(x) = x^n - x^{n-2} - x^3 + x = x(x^2 - 1)(x^{n-3} - 1)$$

er $x = 0$ og $x = \pm 1$. Polynomiet Q har mindst én reel rod da det er et tredjegradspolynomium, og denne reelle rod er ikke $x = 0$ eller $x = \pm 1$. Polynomiet Q går derfor ikke op i $P - Q$ og dermed heller ikke i P for noget n.

Opgave 1.3.6. Undersøg for hvilke n polynomiet $P(x) = x^n + x^{n-1} - 1$, $n > 4$, er deleligt med $Q(x) = x^4 + x^3 - 1$. *Hint*: 2

Eksempel 1.3.5. Rødder

Om et tredjegradspolynomium P vides at $P(-1) = P(0) = P(1) = 7$ og $P(2) = 19$. Vi ønsker at bestemme P.

For at bestemme P indfører vi et nyt polynomium Q, der har $x = -1, 0, 1$ som rødder. Sæt $Q(x) = P(x) - 7$. Da er $x = -1, 0, 1$ alle rødder i tredjegradspolynomiet Q, og vi ved yderligere ifølge sætningen om rødder og faktorisering 1.3.1 at

$$Q(x) = k(x+1)x(x-1) = kx^3 - kx$$

og dermed $P(x) = kx^3 - kx + 7$. Da $P(2) = 19$, fås $19 = k(2^3 - 2) + 7 = 6k + 7$, og altså $k = 2$. Dermed er $P(x) = 2x^3 - 2x + 7$.

Opgave 1.3.7. Om et fjerdegradspolynomium

$$P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

hvor b, c, d og e er hele tal, gælder at $P(0) = P(1) = P(2) = P(3)$. Bestem samtlige mulige værdier af b. *Hint*: 10

Opgave 1.3.8. Lad P være et polynomium af grad n med $P(k) = \frac{k}{k+1}$ for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Bestem $P(n+1)$. *Hint*: 13

Opgave 1.3.9. Bestem alle polynomier $P(x)$ med reelle koefficienter så

$$(x - 2010)P(x + 67) = xP(x)$$

for alle heltal x. (Baltic Way 2010) *Hint*: 1

Opgave 1.3.10. Lad $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ være et polynomium som har tre forskellige reelle rødder. Lad $q(x) = x^2 + x + 2017$, og antag at $p(q(x))$ ikke har nogen reelle rødder. Vis at $p(2017) > \frac{1}{64}$. *Hint*: 25

1.4 Polynomier med heltallige koefficienter

Vi starter med at gentage sætningen fra forrige afsnit, men denne gang med hele tal i stedet for reelle tal.

Sætning 1.4.1. Rødder og faktorisering

Lad P være et polynomium af grad n, $n > 0$, med heltallige koefficienter. Hvis det hele tal x_0 er rod i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-1$ med heltallige koefficienter så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Der gælder yderligere at hvis de hele tal $x_1, x_2, \ldots, x_m$ er rødder i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ med heltallige koefficienter så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)D(x).$$

Læg mærke til at i denne version af sætningen er vi garanteret at D har heltallige koefficienter, og det skal du udnytte i de næste opgaver.

Opgave 1.4.1. Bestem alle polynomier P med heltallige koefficienter hvor

$$(x-26)P(x+13) = xP(x).$$

Opgave 1.4.2. Lad $p(x)$ og $q(x)$ være to ikke-konstante polynomier med heltallige koefficienter. Det oplyses at polynomiet

$$p(x)q(x) - 2015$$

har mindst 33 forskellige heltallige rødder. Vis at p og q har grad mindst 3.

Opgave 1.4.3. Lad P og Q være polynomier med heltallige koefficienter. Antag at der findes hele tal a og $a+1997$ som er rødder i P, og at $Q(1998) = 2000$. Vis at ligningen $Q(P(x)) = 1$ ikke har heltallige løsninger. (Baltic Way 1997) *Hint*: 4

Opgave 1.4.4. Bestem det mindste heltal $m > 1$ så der findes et polynomium p med følgende egenskaber: p har heltallige koefficienter, $p(x) - 1$ har mindst én heltallig rod, og $p(x) - m$ har præcis 1000 forskellige heltallige rødder. *Hint*: 7

Sætning 1.4.2. Delelighed

For et polynomium P med heltallige koeffcicenter gælder at for to forskellige hele tal a og b vil $a-b$ gå op i tallet $P(a) - P(b)$.

Bevis. Lad $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ og $a \neq b$. Da

$$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right),$$

vil $a-b$ gå op i

$$P(a) - P(b) = a_m\left(a^m - b^m\right) + a_{m-1}\left(a^{m-1} - b^{m-1}\right) + \ldots + a_1(a-b). \square$$

Eksempel 1.4.1. Delelighed

For et polynomium P med heltallige koefficienter er $P(n)$ et trecifret tal for alle $n = 1, 2, 3, \ldots 1998$. Vi vil vise at P ikke har nogle heltallige rødder. (Baltic Way 1998)

For ethvert heltal m findes et $n \in \{1, 2, \ldots, 1998\}$ så $1998 \mid n - m$. Altså må

$$1998 \mid n - m \mid P(n) - P(m).$$

Da $P(n)$ er et trecifret tal, følger det at $P(m) \neq 0$. Dermed har P ikke nogen heltallige rødder.

Opgave 1.4.5. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter så der findes to hele tal a og b hvor $P(a) = 1$ og $P(b) = 3$. Kan ligningen $P(x) = 2$ have to forskellige heltallige løsninger? (Baltic Way 1994) *Hint*: 8

Opgave 1.4.6. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter så der findes et helt tal n hvor $P(-n) < P(n) < n$. Vis at da er $P(-n) < -n$. (Baltic Way 1991)

Opgave 1.4.7. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter. Vis at der ikke findes tre forskellige hele tal a, b og c så $P(a) = b$, $P(b) = c$ og $P(c) = a$. *Hint*: 23

Opgave 1.4.8. Et polynomium P har heltallige koefficienter og grad n. Desuden findes præcis k hele tal som er løsning til ligningen $(P(x))^2 = 1$. Vis at $k - n \leq 2$. (IMO 1974) *Hint*: 5

1.5 Polynomier

Ind til videre har vi set på polynomier med reelle koefficienter eller heltallige koefficienter, og vi har generelt ikke bevist de sætninger vi har brugt. Nu generaliserer vi flere definitioner og beviser en del af de tidligere sætninger i mere generelle versioner.

I det følgende betegner $\mathbb{L}$ en af de fire talmængder $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$. De komplekse tal $\mathbb{C}$ kan beskrives som mængden af alle tal på formen $a+ib$, hvor $i=\sqrt{-1}$ og a og b er reelle tal. Alle opgaver kan regnes uden brug af komplekse tal.

Definition af polynomium

Et *polynomium* P er en funktion med forskriften $P(x)=0$ eller

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

hvor $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbb{L}$ og $a_n\neq 0$. Polynomiet P er her defineret på de reelle tal, men man kan også betragte P defineret på andre talmængder som fx de komplekse tal.

Graden af P er n, pånær hvis $P(x)=0$.

Nulpolynomiet P er polynomiet der er konstant nul, dvs. $P(x)=0$ for alle $x\in\mathbb{R}$, og dets grad sættes per definition til $-\infty$.

Mængden af polynomier med koefficienter i $\mathbb{L}$ betegnes $\mathbb{L}[x]$.

Et polynomium kaldes *normeret* hvis $a_n=1$.

Tallet x_0 kaldes en *rod* i P hvis $P(x_0)=0$.

En hel central egenskab ved polynomier er at opskrivningen er entydig. Det handler de næste to sætninger om.

Sætning 1.5.1. Nulpolynomiet

Nulpolynomiet kan ikke skrives på formen $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, hvor $a_n\neq 0$.

Bevis. Først betragter vi et normeret polynomium

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0,\quad n\geq 0,$$

og viser at det ikke er nulpolynomiet. Det vil vi gøre ved at finde et tal der ikke giver 0 ved indsættelse. Idéen er at finde et stort nok tal M så vi kan vise at $(2M)^n$ er større end $\left|a_{n-1}(2M)^{n-1}+a_{n-2}(2M)^{n-2}+\ldots+a_0\right|$, da det viser at $P(2M)\neq 0$. Sæt

$$M=\max\{1,|a_{n-1}|,|a_{n-2}|,\ldots,|a_0|\}.$$

Bemærk at vi har sikret os at $M\geq 1$ sådan at $M^m\geq 1$ for alle ikke negative heltal m. Nu er

$$\begin{aligned}(2M)^n &> \left(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1\right)M^n\\ &\geq M(2M)^{n-1}+M(2M)^{n-2}+\cdots+M(2M)+M\\ &\geq |a_{n-1}|(2M)^{n-1}+|a_{n-2}|(2M)^{n-2}+\cdots+|a_1|2M+|a_0|\\ &\geq \left|a_{n-1}(2M)^{n-1}+a_{n-2}(2M)^{n-2}+\ldots+a_12M+a_0\right|.\end{aligned}$$

Dermed er

$$P(2M)=(2M)^n+a_{n-1}(2M)^{n-1}+a_{n-2}(2M)^{n-2}+\ldots+a_0>0.$$

Betragt nu et polynomium $Q(x)=b_nx^n+\cdots+b_0$ af grad n. Vi ved at $\frac{1}{b_n}Q(x)$ ikke er nulpolynomiet da det er normeret, og dermed er Q heller ikke nulpolynomiet. Altså kan nulpolynomiet ikke skrives på formen $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, hvor $a_n\neq 0$. □

Sætning 1.5.2. Entydighedssætningen

Hvis to polynomier P og Q opfylder at $P(x)=Q(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}$, da er deres koefficienter identiske.

Opskrivningen af polynomier er altså entydig.

Bevis. Antag at $P(x)=Q(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}$. Hvis koefficienterne i P og Q ikke er identiske, da er

$$0=P(x)-Q(x)=a_nx^n+\ldots+a_0,$$

hvor $n\geq 0$ og $a_n\neq 0$, for alle $x\in\mathbb{R}$. Men dette er i modstrid med sætning 1.5.1. Altså er opskrivningen af polynomier entydig. □

Definition af lige og ulige polynomier

Et polynomium kaldes for *lige* hvis $P(x) = P(-x)$ for alle reelle tal x.

Et polynomium kaldes for *ulige* hvis $P(x) = -P(-x)$ for alle reelle tal x.

Opgave 1.5.1. Vis at de lige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af ulige potenser af x er nul. Vis tilsvarende at de ulige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af lige potenser af x er nul. *Hint*: 6

Sætning 1.5.3. Polynomier af ulige grad

Et polynomium af ulige grad med reelle koefficienter har altid mindst én reel rod.

Opgave 1.5.2. Udnyt mellemværdisætningen 1.1.3 til at vise sætning 1.5.3. *Hint*: 11

Sætning 1.5.4. Polynomiumsdivision

Lad P og Q være polynomier i $\mathbb{L}[x]$ af grad henholdsvis n og m med $n, m \geq 0$. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$, antages yderligere at koefficienten til m'tegradsleddet i Q er ± 1.

Da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ (eller $D(x) = 0$ hvis $n < m$), og et entydigt bestemt polynomium R af grad mindre end m, begge med koefficienter i $\mathbb{L}$, så

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x).$$

Polynomiet R kaldes resten af P ved division med Q.

Bevis. Lad $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ og $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$, hvor $a_n, b_m \neq 0$. Først viser vi eksistensen ved induktion efter n. For $n < m$ er eksistensen oplagt med $D(x) = 0$ og $R(x) = P(x)$. Lad $n = N \geq m$, og antag at sætningen er sand for alle $n < N$. Da er

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x)$$

et polynomium af grad mindre end n med koefficienter i $\mathbb{L}$, og dermed findes ifølge induktionsantagelsen polynomier D_1 og R så

$$P_1(x) = Q(x)D_1(x) + R(x)$$

hvor graden af R er mindre end m. Nu er

$$\begin{aligned} P(x) = P_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x) &= Q(x)D_1(x) + R(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x) \\ &= Q(x)\left(D_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\right) + R(x). \end{aligned}$$

Polynomiet

$$D(x) = D_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

har koefficienter i $\mathbb{L}$ da $\frac{a_n}{b_m} \in \mathbb{L}$ når $a_n, b_m \in \mathbb{L}$, og vi har forudsat at $b_m = \pm 1$ hvis $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$. Induktionen er derfor fuldført, og vi har vist at der findes polynomier D og R med de ønskede egenskaber.

For at vise entydigheden antager vi at der findes polynomier D_1, D_2, R_1 og R_2 i $\mathbb{L}[x]$, hvor R_1 og R_2 har grad mindre end m, så

$$P(x) = Q(x)D_1(x) + R_1(x) = Q(x)D_2(x) + R_2(x).$$

Da er

$$Q(x)(D_1(x) - D_2(x)) + R_1(x) - R_2(x)$$

nulpolynomiet. Da Q har grad m, og $R_1 - R_2$ har grad mindre end m, giver entydighedssætningen at $D_1 - D_2$ er nulpolynomiet og altså $D_1 = D_2$. Dermed er $R_1 - R_2$ også nulpolynomiet og $R_1 = R_2$, dvs. D og R er entydigt bestemt. □

Denne sætning giver anledning til en mere generel definition af delelighed:

Definition af delelighed, reducibilitet og irreducibilitet

Lad P og Q være polynomier i $\mathbb{L}[x]$.

Et polynomium Q siges at *gå op i* P i $\mathbb{L}[x]$ hvis der findes et polynomium $D \in \mathbb{L}[x]$ så $P(x) = Q(x)D(x)$. Vi siger også at $P(x)$ er *delelig* med $Q(x)$ i $\mathbb{L}[x]$.

Et polynomium P kaldes *reducibelt* i $\mathbb{L}[x]$ hvis der findes to polynomier $S, T \in \mathbb{L}[x]$ af grad mindst én så $P(x) = S(x)T(x)$.

Et polynomium P kaldes *irreducibelt* i $\mathbb{L}[x]$ hvis det ikke er reducibelt i $\mathbb{L}[x]$.

Sætning 1.5.5. Rødder og faktorisering

Lad P være et polynomium af grad n med koefficienter i $\mathbb{L}$.

Hvis $x_0 \in \mathbb{L}$ er rod i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-1$ med koefficienter i $\mathbb{L}$ så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Der gælder yderligere at hvis $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{L}$ er rødder i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ med koefficienter i $\mathbb{L}$ så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)D(x).$$

Bevis. Antag at x_0 er rod i P og $x_0 \in \mathbb{L}$. Da findes ifølge sætningen om polynomiumsdivision 1.5.4 entydigt bestemte polynomier D og R i $\mathbb{L}[x]$, hvor R har grad højst 0, så

$$P(x) = (x - x_0)D(x) + R(x).$$

Dermed er $R(x_0) = 0$, og da R har grad højst 0, dvs. er konstant, må det være nulpolynomiet. Altså findes et polynomium D i $\mathbb{L}[x]$ så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Bemærk at polynomiet $x - x_0$ er normeret så sætningen om polynomiumsdivision 1.5.4 holder også i tilfældet $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$.

Hvis vi antager at $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{L}$ er rødder i P, fås ved at gentage argumentationen ovenfor at der findes et polynomium D i $\mathbb{L}[x]$ så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_1)\cdots(x - x_m)D(x).$$

□

Korollar 1.5.6. Antal rødder i et polynomium af grad n

Et polynomium af grad n, $n \geq 0$, har højst n reelle rødder.

Korollar 1.5.7. Entydighed

Hvis P og Q er to polynomier af grad højst n, og $P(x) = Q(x)$ for $n+1$ forskellige værdier af x, da er $P = Q$.

Bevis. Antag at P og Q er to polynomier af grad højst n, og $P(x) = Q(x)$ for $n+1$ forskellige værdier af x. Da er $P(x) - Q(x)$ et polynomium af grad højst n med $n+1$ rødder, og dermed er $P(x) - Q(x)$ nulpolynomiet. □

Som afslutning på dette kapitel ser vi på algebraens fundamentalsætning. Den kræver kendskab til komplekse tal og er ikke en sætning vi bruger, men blot ment som perspektivering.

Sætning 1.5.8. Algebraens fundamentalsætning

Lad P være et polynomium af grad n med koefficienter i $\mathbb{C}$. Da har polynomiet n ikke nødvendigvis forskellige rødder $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ så

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

for en konstant a_n.

Vi beviser ikke algebraens fundamentalsætning da det både er meget omfattende og kræver kendskab komplekse tal.

1.6 Mere om polynomier med heltallige koefficienter

Sætning 1.6.1. Rationale rødder

Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter. Hvis et rationelt tal skrevet som uforkortelig brøk $\frac{p}{q}$ er rod i polynomiet

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

da vil $p \mid a_0$ og $q \mid a_n$. Specielt vil eventuelle rationale rødder i

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

være hele tal.

Opgave 1.6.1. Bevis sætningen.

Eksempel 1.6.1. Rationale rødder

Hvis vi skal bestemme samtlige rationale rødder i

$$P(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 6,$$

så kan vi udnytte sætning 1.6.1 der siger at samtlige rationale rødder i P er hele tal som går op i 6. Ved at tjekke samtlige divisorer i 6 ses at $x = -1$ er den eneste rationale rod.

Sætning 1.6.2. Gauss' lemma

Hvis P er et polynomium med heltallige koefficienter som er irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$, da er det også irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Bevis. Antag at $P(x) = Q(x)R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, hvor $Q, R \in \mathbb{Q}[x]$ har grad mindst 1. Da alle koefficienter i Q er rationale, findes et mindste heltal q så

$$qQ(x) = q_k x^k + \cdots + q_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

og tilsvarende et mindste heltal r så

$$rR(x) = r_m x^m + \cdots + r_0 \in \mathbb{Z}[x].$$

Sæt

$$qrP(x) = qQ(x)rR(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

På baggrund af faktoriseringen

$$qrP(x) = qQ(x)rR(x)$$

vil vi finde en faktorisering af P i $\mathbb{Z}[x]$. Lad p være en primdivisor i q. Da er alle koefficienter i $qrP(x)$ delelige med p. Lad i være det mindste indeks så p går op i $q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}$, men ikke i q_i. Da

$$q_0 r_i + q_1 r_{i-1} + \cdots + q_i r_0 = a_i \equiv 0 \pmod p,$$

må p gå op i r_0. Desuden er

$$q_0 r_{i+1} + q_1 r_i + \cdots + q_i r_1 + q_{i+1} r_0 = a_{i+1} \equiv 0 \pmod p,$$

dvs. r_1 også er delelig med p. Ved at fortsætte på denne måde ser vi at alle koefficienter i R er delelige med p, dvs. at $\frac{r}{p} R \in \mathbb{Z}[x]$. Dermed har vi fået en ny faktorisering

$$\frac{qr}{p} P(x) = qQ(x) \cdot \frac{r}{p} R(x).$$

Ved at fortsætte på denne måde får vi en faktorisering af P med polynomier med heltallige koefficienter. □

Sætning 1.6.3. Eisensteins udvidede irreducibilitetskriterium

Lad

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

være et polynomium med heltallige koefficienter, hvor et primtal p går op i $a_0, a_1, \ldots a_k$ for et $0 < k < n$, mens $p \nmid a_{k+1}$ og $p^2 \nmid a_0$.

Da har P en irreducibel faktor af grad større end k i $\mathbb{Z}[x]$. Specielt er P irreducibel hvis $k = n - 1$, og i dette tilfælde kaldes kriteriet blot for Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Bevis. Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, hvor

$$Q(x) = q_s x^s + \cdots + q_0 \quad \text{og} \quad R(x) = r_m x^m + \cdots + r_0$$

er polynomier med heltallige koefficienter. Da $a_0 = q_0 r_0$ er delelig med p, men ikke med p^2, er netop én af q_0 og r_0 delelig med p. Antag uden tab af generalitet at $p \mid q_0$ og $p \nmid r_0$. Da p går op i a_1 og $a_1 = r_0 q_1 + q_0 r_1$, må $p \mid q_1$. Ved at fortsætte på denne måde ses at p går op i $q_0, q_1, \ldots, q_k$, men at $p \nmid q_{k+1}$. Det følger heraf at Q har grad mindst $k+1$. □

Eksempel 1.6.2. Eisensteins irreducibilitetskriterium

For at undersøge om polynomiet $P(x) = x^5 + 4$ er irreducibelt indenfor $\mathbb{Q}[x]$, kan man bruge Eisensteins irreducibilitetskriterium, men ikke direkte.

Bemærk først at $P(x)$ er irreducibelt netop hvis $P(x+1)$ er irreducibelt. Da $P(x+1) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 5$, er det irreducibelt ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium med primtallet $p = 5$, og dermed er P det også.

Opgave 1.6.2. Vis at $P(x) = x^6 + 3x^4 + 6x^3 + 9x + 3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 1.6.3. Vis at $P(x) = x^p + p^2 x^2 + px + p - 1$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[x]$ for alle ulige primtal p.

Opgave 1.6.4. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være forskellige heltal. Vis at

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) - 1$$

er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$. *Hint*: 21

Opgave 1.6.5. Lad $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, hvor $n > 1$ er et helt tal. Vis at $P(x)$ ikke kan skrives som et produkt af to polynomier med heltallige koefficienter og grad mindst én. (IMO 1993) *Hint*: 24

1.7 Multiple rødder og differentialregning

Definition af multiplicitet

Tallet x_0 siges at være m*-dobbelt* rod eller rod af *multiplicitet* m i et polynomium P hvis $(x - x_0)^m$ går op i P.

Hvis man tæller antallet af rødder i et polynomium med multiplicitet, betyder det at den m-dobbelte rod x_0 tæller m gange.

Vi udnytter i det følgende at polynomier som funktioner over de reelle tal er differentiable.

Sætning 1.7.1. Røddernes multiplicitet

For et polynomium P gælder at x_0 er m-dobbeltrod i P netop hvis

$$P(x_0) = P'(x_0) = P^{(2)}(x_0) = \ldots = P^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

Bevis. Antag at x_0 er m-dobbelt rod i P, altså at $P(x) = (x - x_0)^m Q(x)$. Da er

$$P'(x) = (x - x_0)^{m-1}\big(m \cdot Q(x) + (x - x_0)Q'(x)\big),$$

og x_0 er dermed mindst $(m-1)$-dobbelt rod i P'. Tilsvarende ses at x_0 er mindst $(m-2)$-dobbelt rod i $P^{(2)}$ osv., dvs. at

$$P(x_0) = P'(x_0) = P^{(2)}(x_0) = \ldots = P^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

Antag omvendt at $P(x_0) = P'(x_0) = P^{(2)}(x_0) = \ldots = P^{(m-1)}(x_0) = 0$. Vi viser at hvis x_0 er n-dobbelt rod i et polynomium Q', da er x_0 $(n+1)$-dobbelt rod i den stamfunktion Q til Q' for hvilken $Q(x_0) = 0$, da dette giver det ønskede. Antag at x_0 er n-dobbelt rod i Q', og at Q er den stamfunktion til Q' for hvilken $Q(x_0) = 0$. Antag at x_0 ikke er $(n+1)$-dobbelt rod i Q. Ifølge algebraens fundamentalsætning kan vi faktorisere

$$Q(x) = (x - x_0)^{n_0}(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2}\cdots(x - x_k)^{n_k},$$

hvor $1 \leq n_0 \leq n$. Dermed er

$$Q'(x) = n_0 \frac{Q(x)}{x - x_0} + n_1 \frac{Q(x)}{x - x_1} + n_2 \frac{Q(x)}{x - x_2} + \cdots + n_k \frac{Q(x)}{x - x_k}.$$

Da

$$n_1 \frac{Q(x)}{x - x_1} + n_2 \frac{Q(x)}{x - x_2} + \cdots + n_k \frac{Q(x)}{x - x_k}$$

er delelig med $(x - x_0)^{n_0}$ mens $n_0 \frac{Q(x)}{x - x_0}$ ikke er, er Q' ikke delelig med $(x - x_0)^{n_0}$. Da $n_0 \leq n$, er x_0 ikke n-dobbelt rod i Q', hvilket er en modstrid. □

Eksempel 1.7.1. Dobbeltrod

Betragt polynomiet P givet ved $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Vi vil vise at $(x-1)^2$ går op i P. Ved differentiation får man

$$P'(x) = (n+1)nx^n - (n+1)nx^{n-1},$$

dvs. $P(1) = P'(1) = 0$. Dermed er $x = 1$ dobbeltrod i P, og $(x-1)^2$ går op i P.

Opgave 1.7.1. Bestem a og b så $x = -1$ er dobbeltrod i $P(x) = ax^n + nx^{n-2} + b$, n ulige.

Opgave 1.7.2. Lad P være et sjettegradspolynomium som for to reelle tal a og b, $0 < a < b$, opfylder at $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$ samt $P'(0) = 0$. Vis at $P(x) = P(-x)$ for alle reelle tal x. (Baltic Way 1998) *Hint*: 12

I de sidste to opgaver skal man benytte differentialligning og monotonibetragtninger.

Opgave 1.7.3. I et tredjegradspolynomium $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ er $b < 0$ og $ab = 9c$. Vis at P har tre forskellige reelle rødder. (Baltic Way 1992) *Hint*: 9

Opgave 1.7.4. Bestem alle fjerdegradspolynomier P som opfylder følgende:

i) $P(x) = P(-x)$ for alle x.

ii) $P(x) \geq 0$ for alle x.

iii) $P(0) = 1$.

iv) $P(x)$ har præcis to lokale minima i x_1 og x_2 således at $|x_1 - x_2| = 2$.

(Baltic Way 1992)

2 Hints

1. Vis at $n \cdot 67$ er rødder i P for alle $n = 1, 2, \ldots, 30$.
2. Læg mærke til at Q har en rod mellem 0 og 1.
3. Betragt $(x+1)^6$ og $(x+1)^4$.
4. Undersøg pariteten af $P(n)$ for alle hele tal n.
5. Faktoriser $(P(x))^2 - 1$.
6. For lige polynomier betragt $P(x) - P(-x)$.
7. $m = (500!)^2 + 1$.
8. Hvad ved du om $a - b$, $a - c$ og $b - c$?
9. Betragt rødderne i $P'(x)$.
10. Betragt $Q(x) = P(x) - e$.
11. Betragt et normeret polynomium P, og lad M være defineret som i beviset for 1.1.3. Benyt idéen i beviset for sætning 1.5.1 til at vise at $P(2M)$ og $P(-2M)$ har forskelligt fortegn.
12. Betragt $P(x) - P(-x)$.
13. Indfør et smart nyt polynomium Q af grad $n+1$.
14. Hvad er $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$?
15. Divider P med $(x-1)$, og udnyt at $x_0 = 1$ er rod i resultatet.
16. Udnyt at $x_0 = 1$ er rod i P til at bestemme b udtrykt ved a.
17. Betragt $h(x) = f(f(x)) - x$.
18. Vis at $P(0), P(1), P(3), P(5), \ldots, P(2n+1)$ har alternerende fortegn.
19. Divider P med x^3.
20. Brug opgave 1.2.1 c) til at omskrive P.
21. Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, og betragt $Q(x) + R(x)$.
22. Se på $h(1)$ og $h(2)$.
23. Betragt den største forskel mellem to af tallene a, b og c.
24. Udnyt af P ikke har en heltallig rod.
25. Udnyt at $q(x) \geq 2016 + \frac{3}{4}$.

3 Løsninger

Opgave 1.1.1. For $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + a$ er $P(-2) = -8 + a$, $P(0) = a$, $P(1) = -2 + a$ og $P(2) = a$. Hvis vi vælger $a = 1$, er $P(-2) < 0$, $P(0) > 0$, $P(1) < 0$ og $P(2) > 0$. Der er altså en reel rod i hvert af intervallerne $]-2;0[$, $]0;1[$ og $]1;3[$ ifølge mellemværdisætningen. Da P er et tredjegradspolynomium, har P højst tre forskellige rødder, dvs. P har netop tre forskellige rødder.

Opgave 1.1.2. Polynomiet $P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6)+(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ har fire reelle rødder da $P(0) > 0$, $P(1) < 0$, $P(3) > 0$, $P(5) < 0$ og $P(7) > 0$, dvs. der er en reel rod i hvert af intervallerne $]0;1[$, $]1;3[$, $]3;5[$ og $]5;7[$ ifølge mellemværdisætningen.

Opgave 1.1.3. Polynomiet

$$P(x) = x(x-2)(x-4)\cdots(x-2n)+(x-1)(x-3)(x-5)\cdots(x-(2n+1))$$

har $n+1$ reelle rødder da $P(0)$, $P(1)$, $P(3)$, …, $P(2n-1)$ og $P(2n+1)$ har alternerende fortegn, dvs. der er en reel rod i hvert af intervallerne $]0;1[$ og $]m-1;m+1[$ for $m = 2,4,\ldots,2n$ ifølge mellemværdisætningen. Polynomiet P kan ikke have flere reelle rødder da et polynomium af grad $n+1$ maksimalt har $n+1$ rødder, altså har P præcis $n+1$ rødder.

Opgave 1.1.4. Lad $h(x) = f(f(x))-x$. Vi skal vise at der findes et tal a så $h(a) = 0$ og $f(a) \neq a$. Der gælder:

$$h(1) = f(f(1))-1 = f(-1)-1 = 3-1 = 2 > 0$$

og

$$h(2) = f(f(2))-2 = f(0)-2 = 0-2 = -2 < 0.$$

Da $h(1)$ og $h(2)$ har forskelligt fortegn, og h er kontinuert, følger det af mellemværdisætningen at der findes et tal a mellem 1 og 2 så $h(a) = 0$. Da grafen for f er en parabel der vender grenene opad, og $f(1) = -1 < 0$ og $f(2) = 0$, ved vi at $f(x) < 0$ for alle x mellem 1 og 2; specielt $f(a) < 0 < a$. Dermed er det ønskede vist.

Opgave 1.1.5. Bemærk at

$$P(x) = x^3\left(1+2\cdot\frac{1}{x}-3\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\left(\frac{1}{x}\right)^3\right),$$

dvs. $Q(x) = 1+2x-3x^2-5x^3$ har rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$.

Opgave 1.1.6. Da $x = 0$ ikke er løsning til ligningen, kan vi dividere begge sider med x^2 og omskrive til en andengradsligning i $x + \frac{1}{x}$.

$$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6 = 0.$$

Rødderne i polynomiet $Q(y) = y^2+5y-6$ er $y = -6$ og $y = 1$. Dermed er $x+\frac{1}{x} = -6 \vee x+\frac{1}{x} = 1$. Disse to ligninger omskrives til $x^2+6x+1 = 0 \vee x^2-x+1 = 0$. Af første ligning fås $x = -3\pm 2\sqrt{2}$, mens den sidste ikke har nogen løsninger.

Opgave 1.2.1.

a) $P(x) = x^4-2x^2+3x-2 = (x-1)(x^3+x^2-x+2)$.

b) $P(x) = 3x^4+8x^3+12x^2+9x+4 = (x^2+x+1)(3x^2+5x+4)$.

c) $P(x) = x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$.

d) $P(x) = nx^{n+1}-(n+1)x^n+1 = (x-1)(nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x-1)$.

Opgave 1.2.2. Vi ved at $x^{100}-2x^{51}+1 = (x^2-1)Q(x)+ax+b$. Ved at indsætte henholdsvis $x = 1$ og $x = -1$ får man $a+b = 0$ og $-a+b = 4$, dvs. resten er $-2x+2$.

Opgave 1.2.3. Antag at der findes et førstegradspolynomium Q med reelle koefficienter så $P(x) = Q(x)\cdot D(x)$ for et polynomium D med reelle koefficienter. Førstegradspolynomiet Q har en reel rod, og den er også rod i P. Men det er en modstrid, for $P(x) = x^2+2 > 0$ for alle reelle tal x. Dermed er P ikke deleligt med et førstegradspolynomium med reelle koefficienter.

Opgave 1.2.4. Sæt $P(x) = ax^4+bx^3+1$. Antag at $(x-1)^2$ går op P. Da findes et polynomium Q med heltallige koefficienter så

$$P(x) = (x-1)^2Q(x).$$

Altså er $x = 1$ rod i P. Det betyder at $0 = P(1) = a+b+1$ og altså $b = -a-1$. Ved division ses at $P(x) = ax^4+bx^3+1 = (x-1)(ax^3-x^2-x-1)$. Dermed er $(x-1)Q(x) = ax^3-x^2-x-1$. Altså er $x = 1$ også rod i ax^3-x^2-x-1, dvs. at $a-3 = 0$. Dette giver samlet $a = 3$ og $b = -4$.

Opgave 1.2.5. Vi udnytter at

$$(x_0+x_0^2+x_0^3+x_0^4+x_0^5)(x_0-1)=x_0^6-x_0=P(x_0)+9x_0-9=9(x_0-1).$$

Da $x_0 \neq 1$, må $x_0+x_0^2+x_0^3+x_0^4+x_0^5=9$.

Opgave 1.2.6. Bemærk først at

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)^6-12(x^2+2x+1)=(x+1)^2\big((x+1)^4-12\big)\\&=(x+1)^2\big(x(x^3+4x^2+6x+4)-11\big).\end{aligned}$$

Da $x_0 \neq -1$ er rod i P, er $x_0(x_0^3+4x_0^2+6x_0+4)-11=0$, dvs. $x_0(x_0^3+4x_0^2+6x_0+4)=11$.

Opgave 1.3.1. Bemærk først at $x_0=-a$ er rod i $P(x)=x^{2n+1}+a^{2n+1}$. Dermed går $x+a$ op i P. Ved division ses at

$$P(x)=(x+a)(x^{2n}-ax^{2n-1}+a^2x^{2n-2}-\cdots-a^{2n-1}x+a^{2n}).$$

Opgave 1.3.2. Kald rødderne i P for $2a$ og $3a$. Da er

$$P(x)=m(x-2a)(x-3a)=mx^2-5max+6ma^2.$$

Altså er $5ma=10$ og $6ma^2=3$. Ved at løse ligningssystemet fås $a=\frac{1}{4}$ og $m=8$.

Opgave 1.3.3. Da r_1, r_2 og r_3 er rødder i P, er

$$P(x)=x^3+5x-20x+14=x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x-r_1r_2r_3.$$

Dermed er $r_1+r_2+r_3=-5$, og $P(-5)=-5^3+5^3+20\cdot 5+14=114$.

Opgave 1.3.4. Kald de heltallige rødder for x_1, x_2 og x_3. Da er $x_1x_2x_3=2^n$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a$ og $x_1+x_2+x_3=1$. Af sidste ligning ses at en eller tre af rødderne skal være ulige, og da $x_1x_2x_3=2^n$, kan vi uden tab af generalitet antage at $x_1=\pm 1$. Hvis $x_1=1$, skal $x_2+x_3=0$ og $x_2x_3=2^n$ hvilket er umuligt. Altså er $x_1=-1$ og $x_2x_3=-2^n$, $x_2+x_3=2$ og $-2+x_2x_3=a$. Heraf ses at x_2 og x_3 er henholdsvis 4 og -2, dvs. $a=-10$ og $n=3$.

Opgave 1.3.5. Oplysningerne giver at $a=-(x_1+x_2)$, $bc=x_1x_2$, $b=-(x_2+x_3)$ og $ac=x_2x_3$, og vi skal vise at $c=-(x_1+x_3)$ og $ab=x_1x_3$. Af ligningerne ses at $a-b=x_3-x_1$ og $c(a-b)=x_2(x_3-x_1)$. Da $ac \neq bc$, får vi at $c=x_2$, $a=x_3$ og $b=x_1$. Ved at kombinere dette ses at $c=-(x_1+x_3)$. Det betyder at x_1 og x_3 er rødder i R.

Opgave 1.3.6. Polynomiet $Q(x)=x^4+x^3-1$ går op i $P(x)=x^n+x^{n-1}-1$ netop hvis $Q(x)$ går op i $P(x)-Q(x)=x^n+x^{n-1}-x^4-x^3=x^3(x-1)(x^{n-4}-1)$. Polynomiet Q har en reel rod mellem 0 og 1 da $Q(0)=-1$ og $Q(1)=1$, men denne rod er ikke rod i $P(x)-Q(x)$. Dermed går Q ikke op i P for noget n.

Opgave 1.3.7. Vi ved at $e=P(0)=P(1)=P(2)=P(3)$. Dermed har

$$Q(x)=P(x)-e=x^4+bx^3+cx^2+dx$$

rødderne 0, 1, 2 og 3, dvs.

$$Q(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)=x^4-6x^3+11x^2-6x.$$

Her af ses at $b=-6$.

Opgave 1.3.8. Da $P(k)-\frac{k}{k+1}=0$ for $k=0,1,2,\dots,n$, vil $n+1$'te grads polynomiet $Q(x)=P(x)(x+1)-x$ have rødderne $0,1,2,\dots,n$. Dermed er

$$Q(x)=a(x-0)(x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Da $Q(-1)=1$, må $a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, og dermed

$$P(n+1)=\frac{Q(n+1)+n+1}{n+2}=\frac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}=\begin{cases}1 & \text{for ulige } n\\ \frac{n}{n+2} & \text{for lige } n\end{cases}.$$

Opgave 1.3.9. Ved at indsætte $x=0$ i $(x-2010)P(x+67)=xP(x)$, ses at $-2010P(67)=0$, dvs. $P(67)=0$. For alle hele tal n, hvor $1 \leq n < 30$ og $P(67n)=0$, følger det ved at indsætte $x=67n$ at

$$(67n-2010)P(67(n+1))=0.$$

Fordi $67n<2010$ for $n<30$, betyder det at $P(67(n+1))=0$. Dermed er $P(67n)=0$ for alle $n=1,2,3,\dots,30$. Vi har altså

$$P(x)=(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)Q(x)$$

for et polynomium Q.

Ved at indsætte dette i den oprindelige ligning fås

$$\begin{aligned}(x-2010)x(x-67)\cdots(x-29\cdot 67)Q(x+67)\\ = x(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)Q(x),\end{aligned}$$

hvilket viser at $Q(x)=Q(x+67)$ for alle $x \neq 0, 67, 2\cdot 67, \dots, 30\cdot 67$. Det betyder at Q er konstant. Altså er$P(x)=k(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)$ for $k\in\mathbb{R}$, og alle disse polynomier opfylder betingelsen.

Opgave 1.3.10. Lad r_1, r_2, r_3 være de tre forskellige reelle rødder i p. Bemærk desuden at

$$q(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2016+\frac{3}{4}\geq 2016+\frac{3}{4}.$$

Vi ved yderligere at

$$p(q(x))=(q(x)-r_1)(q(x)-r_2)(q(x)-r_3)>0$$

da $p(q(x))$ ikke har nogen reelle rødder og positiv højestegradskoefficient. Da q antager alle værdier større end eller lig med $2016+\frac{3}{4}$, må $r_1, r_2, r_3 < 2016+\frac{3}{4}$. Dermed er

$$p(2017)=(2017-r_1)(2017-r_2)(2017-r_3)\geq\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}.$$

Opgave 1.4.1. Sæt først $x=0$ ind i ligningen

$$(x-26)P(x+13)=xP(x).$$

Da er $26P(13)=0$, dvs. $x=13$ er rod i P. Ved at indsætte $x=13$ i ligningen fås $-13P(26)=13P(13)=0$. Dermed er $x=26$ også en rod i P. Ifølge sætningen om rødder og faktorisering 1.4.1 findes et polynomium Q med heltallige koefficienter så

$$P(x)=(x-13)(x-26)Q(x).$$

Den oprindelige ligning kan dermed omskrives til

$$(x-26)x(x-13)Q(x+13)=x(x-13)(x-26)Q(x)$$

for alle $x\in\mathbb{Q}$. Dermed er $Q(x+13)=Q(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}\backslash\{0,13,26\}$, hvilket viser at Q er konstant. Altså er de eneste polynomier P der opfylder det ønskede,

$$P(x)=k(x-13)(x-26),$$

hvor $k\in\mathbb{Z}$.

Opgave 1.4.2. Vælg 33 forskellige heltallige rødder i $p(x)q(x)-2015$, og kald dem $a_1, a_2, \dots, a_{33}$. Vi ved at

$$p(a_i)q(a_i)=2015=5\cdot 13\cdot 31$$

for alle $i=1,2,\dots,33$. Altså er både $p(a_i)$ og $q(a_i)$ heltallige divisorer i 2015 for alle $i=1,2,\dots,33$. Da der er $2\cdot 2^3=16$ forskellige heltallige divisorer i 2015, må der ifølge skuffeprincippet findes mindst tre forskellige rødder a_j, a_k, a_l så $p(a_j)=p(a_k)=p(a_l)$ og $q(a_j)=q(a_k)=q(a_l)$ hvilket viser at p og q har grad mindst 3 da de ikke er konstante.

Opgave 1.4.3. Da a og $a+1997$ er heltallige rødder i P, er

$$P(x)=(x-a)(x-a-1997)R(x),$$

hvor R er et polynomium med heltallige koefficienter. For et vilkårligt helt tal b har de hele tal $b-a$ og $b-a-1997$ forskellig paritet, og derfor må

$$P(b)=(b-a)(b-a-1997)R(b)$$

være lige. Fordi $Q(1998)=2000$, må konstantleddet i Q være lige. Dermed er $Q(P(b))$ lige for alle hele tal b.

Opgave 1.4.4. Lad $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ være rødderne i $p(x)-m$. Da er

$$p(x)-m=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{1000})q(x)$$

for et polynomium q med heltallige koefficienter. Lad n være rod i $p(x)-1$. Da er

$$m=1-(n-x_1)(n-x_2)\cdots(n-x_{1000})q(n).$$

Da $m>1$, betyder det at $(n-x_1)(n-x_2)\cdots(n-x_{1000})q(n)<0$. Udtrykket $(n-x_1)(n-x_2)\cdots(n-x_{1000})$ består af 1000 forskellige heltallige faktorer som ikke er 0, og derfor er

$$|(n-x_1)(n-x_2)\cdots(n-x_n)|\geq(500!)^2$$

Det betyder at $m \geq (500!)^2+1$. Det er faktisk muligt at realisere dette minimum. Sæt $m = (500!)^2 + 1$ og

$$p(x) = m - \Big((x-500)(x-499)\cdots(x-1)\Big)\Big((x+1)(x+2)\cdots(x+500)\Big).$$

Da opfylder p det ønskede.

Opgave 1.4.5. Da $a \neq b$, vil $b-a \mid P(b)-P(a) = 3-1 = 2$. Antag at $P(c) = 2$. Da vil $c-a \mid P(c)-P(a) = 1$ og $b-c \mid P(b)-P(c) = 1$. Vi ved altså at $c = a \pm 1$, $c = b \pm 1$ samt at $a = b \pm 2$ eller $a = b \pm 1$. Der findes højst ét tal c der opfylder dette.

Opgave 1.4.6. Vi ved at $2n = n-(-n) \mid P(n)-P(-n)$, dvs. at $P(n)-P(-n) \geq 2n$. Dermed er $P(n)-2n \geq P(-n)$, og vi ved yderligere at $P(n) < n$. Samlet giver dette $P(-n) \leq P(n)-2n < n-2n = -n$.

Opgave 1.4.7. Antag at der findes tre forskellige hele tal a, b og c så $P(a) = b$, $P(b) = c$ og $P(c) = a$. Lad fx uden tab af generalitet $a-c$ være den numerisk største differens mellem de tre tal, dvs. at $|a-c| > |b-a|$. Vi har nu at $a-c$ går op i $P(a)-P(c) = b-a$, hvilket er en modstrid.

Opgave 1.4.8. Bemærk først at $(P(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (P(x)-1)(P(x)+1) = 0$. Antag at $P(a) = 1$ og $P(b) = -1$ for to hele tal a og b. Da vil $a-b \mid P(a)-P(b) = 2$, dvs. at $b = a \pm 1 \vee b = a \pm 2$.
Antag nu at m er den mindste heltallige løsning til $(P(x)-1)(P(x)+1) = 0$, og antag fx at $P(m)-1 = 0$. Da findes højst to heltallige løsninger til $P(x)+1 = 0$, nemlig $m+1$ og $m+2$. Polynomiet $P(x)-1$ er af n'te grad og har derfor højst n rødder. Dermed har $(P(x)-1)(P(x)+1) = 0$ højst $n+2$ heltallige løsninger, dvs. $k \leq n+2$.
Opgave 1.5.1. Lad $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ være et lige polynomium, dvs. at $P(x) = P(-x)$. Dermed er

$$0 = P(x)-P(-x) = 2(a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \ldots a_1 x),$$

hvor m er det største hele tal så $n \geq 2m+1$. Da det eneste polynomium der er nul for alle $x \in \mathbb{R}$, ifølge sætning 1.5.1 er nulpolynomiet, består $P(x)$ kun af led af lige potens af x.

At et ulige polynomium kun indeholder led af ulige potens af x, vises på tilsvarende måde ved at betragte $P(x)+P(-x)$.

Opgave 1.5.2. Lad $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ være et normeret polynomium af ulige grad. Sæt $M = \max\{1, |a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}$. Som i beviset for sætning 1.5.1 ses at $P(2M) > 0$. Desuden er

$$\begin{aligned}
(-2M)^n &\leq -\big(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1\big)M^n \\
&\leq -\big(M(2M)^{n-1} + M(2M)^{n-2} + \cdots + M(2M) + M\big) \\
&\leq -\big(|a_{n-1}||-2M|^{n-1} + |a_{n-2}||-2M|^{n-2} + \cdots + |a_1||-2M| + |a_0|\big) \\
&\leq -\Big|a_{n-1}(-2M)^{n-1} + a_{n-2}(-2M)^{n-2} + \ldots + a_1(-2M) + a_0\Big|.
\end{aligned}$$

Dermed er $P(-2M) = -(2M)^n + a_{n-1}(-2M)^{n-1} + a_{n-2}(-2M)^{n-2} + \ldots + a_0 < 0$. Ifølge mellemværdisætningen findes dermed et $c \in \mathbb{R}$ så $P(c) = 0$. Altså har alle reelle normerede polynomier af ulige grad en reel rod.

Betragt nu et polynomium Q af ulige grad n og højestegradskoefficient b_n. Da har Q samme rødder som $\frac{1}{b_n}Q$, og da $\frac{1}{b_n}Q$ har en reel rod fordi det er et normeret polynomium af ulige grad, har Q en reel rod.

Opgave 1.6.1. Antag at $\frac{p}{q}$ er rod i P, og at $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Da er

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n = 0,$$

og derfor må q gå op i $a_n p^n$ og dermed i a_n, og desuden må p gå op i $a_0 q^n$ og dermed i a_0.

Opgave 1.6.2. Polynomiet $P(x) = x^6 + 3x^4 + 6x^3 + 9x + 3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium, hvor man benytter $p = 3$.

Opgave 1.6.3. Polynomiet $P(x) = x^p + p^2x^2 + px + p - 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ for alle ulige primtal p, netop hvis

$$P(x+1) = \left(x^p + \binom{p}{p-1}x^{p-1} + \ldots + \binom{p}{1}x + 1\right) + p^2\left(x^2 + 2x + 1\right) + (px + p) + p - 1$$

er irreducibelt. Da $\binom{p}{i}$ er delelig med p for alle $i = 1, 2, \ldots, p-1$, når p er et primtal, er alle koefficienterne på nær højestegradskoefficienten til $P(x+1)$ delelige med p. Desuden er konstantleddet $p^2 + 2p$ ikke delelig med p^2, når p

er et ulige primtal. Dermed er $P(x+1)$, og altså også $P(x)$, irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Opgave 1.6.4. Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, hvor Q og R er polynomier med heltallige koefficienter. Da er $Q(x_i) = -R(x_i) = \pm 1$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$. Dermed er $Q(x) + R(x)$ et polynomium med n forskellige rødder $x_1, x_2, \dots, x_n$, dvs. enten har $Q(x) + R(x)$ grad mindst n, eller også er det nulpolynomiet. Antag at $Q(x) + R(x)$ er nulpolynomiet. Da er $P(x) = -Q(x)^2$ i modstrid med at koefficienten til højestegradsleddet i P er 1. Dermed har $Q(x) + R(x)$ grad mindst n, dvs. et af dem har grad mindst n. Da $P(x) = Q(x)R(x)$ er et polynomium af grad n, følger at enten Q eller R har grad n. Altså er P irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$ og ifølge Gauss' lemma også i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 1.6.5. Ifølge Eisensteins udvidede irreducibilitetskriterium med $p = 3$ og $k = n-2$ har P en irreducibel faktor i $\mathbb{Z}[x]$ af grad mindst $n-1$. Dvs. hvis P er reducibelt, må det have en rod. En rod i P er et helt tal som går op i 3, og det ses derfor nemt at P ikke har nogen heltallig rod. Dermed er P irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

Opgave 1.7.1. Når $x = -1$ er dobbeltrod i $P(x) = ax^n + nx^{n-2} + b$, n ulige, er $0 = P(-1) = -a - n + b$ og $0 = P'(-1) = an + n(n-2)$, dvs. $a = 2 - n$ og $b = 2$.

Opgave 1.7.2. Polynomiet $Q(x) = P(x) - P(-x)$ har grad højst 5 samt fem forskellige rødder $-b$, $-a$, 0, a og b. Desuden er $Q'(0) = 0$, hvilket viser at 0 er dobbeltrod. Dermed må $Q(x)$ være nulpolynomiet, dvs. at $P(x) = P(-x)$ for alle x.

Opgave 1.7.3. For $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ vil diskriminanten være positiv da $b < 0$, dvs. $P'(x)$ har to forskellige reelle rødder x_1 og x_2. Da $P(x)$ er et tredjegradspolynomium, vil det have tre forskellige reelle rødder netop hvis $P(x_1)$ og $P(x_2)$ har forskellige fortegn, dvs. netop hvis $P(x_1)P(x_2) < 0$. Ved at udnytte at $ab = 9c$, får man ved division af $P(x)$ med $P'(x)$ at resten er $x\left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)$. Da

$$P(x) = P'(x)\frac{1}{3}x + x\left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)$$

og $x_1x_2 = \frac{b}{3} < 0$, er

$$P(x_1)P(x_2) = x_1x_2\left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)^2 < 0.$$

Opgave 1.7.4. Lad $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Ifølge i) er $b = d = 0$, og ifølge iii) er $e = 1$. Yderligere giver ii) at $a > 0$, dvs. $P(x) = ax^4 + cx^2 + 1$, hvor $a > 0$.

Da $P(x)$ har to lokale minima, må $P'(x) = 4ax^3 + 2cx = 2x(2ax^2 + c)$ have tre forskellige reelle rødder, og da $a > 0$, giver dette at $c < 0$. Rødderne i $P'(x)$ er $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{-c/(2a)}$, dvs. P har lokalt minimum i $x = \pm\sqrt{-c/(2a)}$. Ifølge iv) betyder det at $2\sqrt{-c/(2a)} = 2$ og dermed $c = -2a$. Endelig giver ii) at $P(x) = ax^4 - 2ax^2 + 1 = a(x^2-1)^2 + 1 - a > 0$, dvs. at $0 < a \leq 1$. Det er nemt at tjekke at alle sådanne polynomier opfylder de fire betingelser.

Stikordsregister