1 Kombinatorik

Kombinatorik går ofte ud på at tælle antallet af kombinationer af et eller andet, og for at kunne tælle antallet af kombinationer smart har man brug for forskellige tællestrategier. Her introduceres helt grundlæggende måder at tælle på som fx multiplikationsprincippet, binomialkoefficienten $\binom{n}{r}$, der er et udtryk for på hvor mange måder man kan vælge r ting ud af n ting, samt skuffeprincippet. I de senere afsnit introduceres desuden væsentligt mere komplicerede måder at tælle på som fx at tælle ved at indsætte skillevægge, tælle rekursivt og tælle vha. princippet om inklusion og eksklusion.

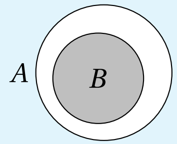
Indhold

1.1 Kombinationer

I dette afsnit ser vi på grundlæggende måder at tælle et antal kombinationer på. Da vi ofte formulerer opgaver med mængder, starter vi med grundlæggende begreber vedrørende mængder.

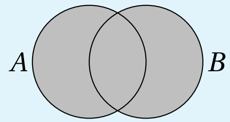
Definition af mængdebegreber

En mængde B er en *delmængde* af en mængde A hvis alle B's elementer tilhører A. At B er en delmængde skrives $B \subseteq A$. En delmængde af A der ikke er hele A, kaldes en *ægte* delmængde af A. Bemærk at enhver mængde har *den tomme mængde* $\emptyset$ som delmængde.



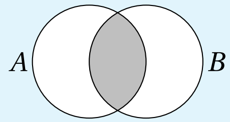
Delmængde $B \subseteq A$

Foreningsmængden $A \cup B$ af to mængder A og B er mængden bestående af alle elementer fra A og alle elementer fra B.



Foreningsmængde $A \cup B$

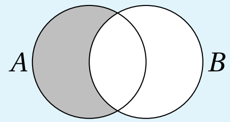
Fællesmængden $A \cap B$ af to mængder A og B er mængden bestående af de elementer som både tilhører A og B.



Fællesmængde $A \cap B$

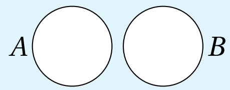
Differensmængden $A \setminus B$ er mængden bestående af de elementer i A som ikke tilhører B.

Hvis A er en delmængde af en mængde M, kaldes $M \setminus A$ for *komplementærmængden* til A.



Differensmængde $A \setminus B$

To mængder A og B kaldes *disjunkte* hvis de ikke har nogen elementer til fælles, dvs. hvis $A \cap B = \emptyset$.



Disjunkte mængder

Hvis $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ og $B = \{1,3,5,7,9\}$, da er $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $A \cap B = \{1,3,5\}$, $A \setminus B = \{2,4,6\}$ og $B \setminus A = \{7,9\}$. Eksempler på delmængder af A er $\emptyset$, $\{1,3\}$, $\{6\}$ og hele A.

Sætning 1.1.1. Multiplikationsprincippet
Ved et valg der består af n forskellige delvalg med henholdsvis $m_1, m_2, \dots, m_n$ valgmuligheder, er der i alt
$$m_1 m_2 \dots m_n$$
valgmuligheder.

Eksempel 1.1.1. Multiplikationsprincippet
Når man fx skal udfylde et spørgeskema med 13 spørgsmål og tre svarmuligheder til hvert spørgsmål, så skal man træffe 13 valg med tre valgmuligheder i hvert delvalg. Man kan altså svare på spørgeskemaet på $3^{13} = 1.594.323$ måder.

Eksempel 1.1.2. Multiplikationsprincippet
Man kan også bruge multiplikationsprincippet til at bestemme hvor mange forskellige delmængder der findes af en mængde med n elementer. Når man skal udtage en delmængde, skal man for hvert element afgøre om det skal med eller ikke med, der er altså to muligheder for hvert element. Derfor er der 2^n forskellige delmængder af en mængde med n elementer. Her er både den tomme mængde og mængden selv talt med.

Tællestrategi. Når man skal tælle hvor mange blandt nogle kombinationer der opfylder en bestemt betingelse, er det *altid* en god idé at overveje om det er nemmest at tælle dem der opfylder betingelsen, eller dem der ikke gør. Formuleret med mængder: Hvis T er en delmængde af en mængde M, og man skal bestemme antallet af elementer i T, er det *altid* en god idé at overveje om det er nemmest at tælle antallet af elementer i T eller antallet af elementer i komplementærmængden. Det ene kan være temmelig vanskeligt, mens det andet er overkommeligt.

Eksempel 1.1.3. Tællestrategi
Til en multiple choice-konkurrence er der 20 spørgsmål hver med svarmulighederne a, b, c, d og e. På hvor mange måder kan man svare på de 20 spørgsmål så der er mindst to spørgsmål i træk hvor man har sat kryds ved samme svarmulighed?

Hvis vi forsøger at tælle de kombinationer hvor man sætter kryds ved samme svarmulighed ved to på hinanden følgende spørgsmål, bliver det hurtigt meget kompliceret. Vi kunne fx starte med at tælle de kombinationer hvor vi svarede det samme på de to første spørgsmål. Dem er der 5^{19} af. Tilsvarende er der 5^{19} kombinationer hvor vi svarer det samme i spørgsmål 2 og 3, osv. Problemet er bare at vi her tæller de samme kombinationer med flere gange, og det bliver temmelig kompliceret at holde styr på hvor mange gange den enkelte kombination egentlig tælles med.

Hvis vi i stedet siger at der er 5^{20} svarmuligheder i alt, og trækker de kombinationer fra hvor der *ikke* svares det samme på to på hinanden følgende spørgsmål, så bliver det meget lettere. Der er $5 \cdot 4^{19}$ kombinationer hvor der ikke svares det samme på to på hinanden følgende spørgsmål, fordi vi har fem muligheder for at svare på spørgsmål 1 og derefter fire muligheder for at svare på hvert af de følgende spørsmål da vi blot ikke må svare det samme som på det foregående. Dermed er der i alt
$$5^{20} - 5 \cdot 4^{19}$$
måder at svare på de 20 spørgsmål så der findes mindst to på hinanden følgende spørgsmål hvor man har svaret det samme.

Opgave 1.1.1. En perleplade består af 10×10 perler. Georg har fem forskellige farver perler. Hvor mange forskellige perleplader kan Georg lave når han vil have at den yderste kant er ensfarvet?

Opgave 1.1.2. Hvor mange forskellige syvcifrede positive heltal findes der som ikke indeholder cifferet 7?

Opgave 1.1.3. Hvor mange ticifrede positive heltal er der som ikke indeholder to ens nabocifre?

Opgave 1.1.4. Hvor mange sekscifrede positive heltal findes der som er delelige med 9, og som ikke indeholder cifferet 0? *Hint*: 3

Opgave 1.1.5. Hvor mange ottecifrede tal findes der som består af cifrene 1, 2, 3 og 4, og som indeholder to ens nabocifre?

Opgave 1.1.6. Tallene fra 1 til 100 skal fordeles i tre disjunkte delmængder så ingen af mængderne er tomme, og ingen mængde indeholder to på hinanden følgende tal. På hvor mange måder kan det gøres? *Hint*: 31

Opgave 1.1.7. Tyve kugler nummereret $1,2,\dots,20$ skal fordeles i fire forskellige skåle, en rød, en blå, en gul og en grøn. På hvor mange måder kan det gøres hvis der i mindst en af skålene skal være to kugler hvis numre har differens 1 eller 2? *Hint*: 25

Eksempel 1.1.4. Rækkefølge

I kombinatorik ønsker man ofte at bestemme antallet af måder man kan udtage noget på i en bestemt rækkefølge.

Til et stævne er der 14 hold der kæmper om guld, sølv og bronze. Når man skal bestemme på hvor mange forskellige måder medaljerne kan fordeles, har man 14 muligheder for at uddele guld, 13 for sølv og 12 for bronze, dvs. der er i alt $14\cdot 13\cdot 12$ måder at fordele medaljerne på.

Definition af fakultet

For et positivt helt tal n er

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$$

Desuden er $0! = 1$.

Symbolet $n!$ læses n*-fakultet*.

Definition af permutation

En ordnet liste på r forskellige elementer fra en mængde med n elementer kaldes en *permutation* af r elementer fra en mængde med n elementer.

Antallet af permutationer af r elementer fra en mængde med n elementer svarer altså til antallet af måder at vælge r ud af n elementer hvor rækkefølgen af de r elementer har betydning.

Sætning 1.1.2. Permutationer - Udtag med rækkefølge

Antallet af permutationer af r elementer fra en mængde med n elementer er

$$n(n-1)\dots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Bevis. Man har n muligheder for at vælge det første element, $n-1$ muligheder for det næste, osv. Til slut har man $n-(r-1))$ muligheder for at vælge det r'te element. Formlen $n(n-1)\dots(n-(r-1))$ følger derfor af multiplikationsprincippet. For at skrive formlen lidt mere kompakt tænker vi på den som et brøk og forlænger med $(n-r)!$ i tæller og nævner:

$$n(n-1)\dots(n-(r-1)) = \frac{n(n-1)\dots(n-(r-1))\cdot(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}. \qquad \square$$

Definition af kombination

En delmængde med r elementer af en mængde med n elementer kaldes en *kombination* på r elementer fra en mængde med n elementer.

Symbolet $\binom{n}{r}$ betegner antallet af kombinationer på r elementer ud af n elementer, og det svarer til antallet af måder hvorpå man kan udtage r elementer ud af n uden hensyntagen til rækkefølgen af de elementer man udtager.

Vi kalder disse tal for *binomialkoefficienter*, og det kommer der en forklaring på senere.

Nogle benytter betegnelsen $K(n,r)$ i stedet for $\binom{n}{r}$.

Hvis $r<0$ eller $r>n$, er $\binom{n}{r}=0$ per definition.

Sætning 1.1.3. Kombinationer - Udtag uden rækkefølge

Der gælder at

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Bevis. I første omgang husker vi på at man ifølge sætning 1.1.2 kan udtage r elementer i rækkefølge på $\frac{n!}{(n-r)!}$ måder. Desuden kan r elementer ordnes i $r!$ forskellige rækkefølger, dvs. hver delmængde er talt med $r!$ gange når vi udtager de r elementer i rækkefølge. Derfor er

$$\binom{n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad \square$$

Eksempel 1.1.5. Sandsynlighed

Sætning 1.1.3 kan bruges i et utal af sammenhænge når man skal afgøre på hvor mange måder man kan udvælge noget. Fx kan de syv vindertal i lotto når der er 36 tal at vælge imellem, udtrækkes på $\binom{36}{7} = 8.347.680$ forskellige måder. Når man har fundet antallet af kombinationer, kan dette benyttes til at beregne sandsynligheden for at få syv rigtige i lotto. Alle kombinationer af syv vindertal er i lotto lige sandsynlige, og dermed er sandsynligheden for at få syv rigtige $\frac{1}{8.347.680}$.

Eksempel 1.1.6. Kombinationer

Vi ønsker at bestemme på hvor mange måder man kan udtage syv kort af et sæt almindelige spillekort med 52 kort, så man har netop ét par, altså to kort med samme talværdi, og fem kort med fem andre talværdier.

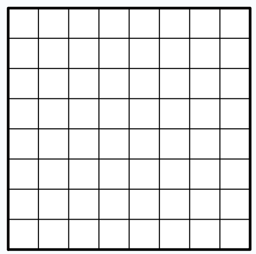
Der er 13 forskellige talværdier, dvs. vi kan udvælge den talværdi parret har, på $\binom{13}{1} = 13$ måder. Desuden kan vi vælge de fem talværdier de fem sidste kort skal have, på $\binom{12}{5} = 792$ måder. For hver talværdi er der fire kort, dvs. vi nu kan vælge de to kort der indgår i vores par, på $\binom{4}{2} = 6$ måder. Desuden kan vi vælge hvert af de fem andre kort på $\binom{4}{1} = 4$ måder. I alt er der altså ifølge multiplikationsprincippet

$$\binom{13}{1}\binom{12}{5}\binom{4}{2}\binom{4}{1}^5 = 63.258.624$$

måder at udtage syv kort på så man har netop et par.

Eksempel 1.1.7. Ruter

På et bræt med 8×8 felter kravler en myre fra det ene hjørne til det diagonalt modsatte hjørne. Den kravler kun på stregerne mellem felterne eller langs kanten af brættet, og den sørger for at turen bliver så kort så mulig. Vi ønsker at bestemme hvor mange forskellige ruter myren kan vælge imellem.



Først bemærker vi at den samlet skal gå otte felter op og otte felter til højre hvis vi forestiller os at den starter i nederste venstre hjørne. Den skal med andre ord vælge præcis hvilke otte af de 16 "skridt" der skal være lodrette, dvs. den har $\binom{16}{8} = 12.870$ forskellige ruter at vælge imellem.

Opgave 1.1.8. Hvor mange firecifrede positive heltal findes der, hvor cifrene står i stigende rækkefølge fra venstre mod højre, og alle fire cifre er forskellige?
Hint: 39

Opgave 1.1.9. En forsamling på 25 personer vil nedsætte et udvalg med fem medlemmer, hvor et af de fem medlemmer er forperson for udvalget. På hvor mange måder kan dette gøres?

Opgave 1.1.10. Bestem på hvor mange måder man kan udtage seks kort fra et sæt spillekort så man netop har to par. (Netop to par ud af seks kort betyder at man har fire forskellige talværdier og to af to af dem.)

Opgave 1.1.11. Fra et kortspil trækkes fire kort. Hvor stor er sandsynligheden for at de fire kort har fire forskellige talværdier?

Opgave 1.1.12. I en by består centrum kun af veje der går nord-syd og øst-vest. Der er syv veje nord-syd og fem veje øst-vest, men pga. vejarbejde er vejkrydset mellem den midterste nord-syd-gående vej og den midterste øst-vest-gående vej totalt spærret så man ikke kan passere det. Jonatan står i det sydvestlige hjørne af centrum og skal til det nordøstlige hjørne, og han ønsker at gå så kort så muligt. Hvor mange forskellige ruter kan han vælge imellem? *Hint*: 26

Opgave 1.1.13. I en skål er der fem røde, tre blå og to grønne bolde. Hvad er sandsynligheden for at der er en rød, en blå og en grøn bold tilbage i skålen, hvis man fjerner syv tilfældige bolde?

Opgave 1.1.14. Lad m, n og k være positive heltal så $n \geq k$ og $m \geq k$. På et $n \times m$ skakbræt skal placeres k tårne (højst et på hvert felt) så ingen tårne truer hinanden. Vis at det kan gøres på $\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$ måder. *Hint*: 36

Opgave 1.1.15. I en konveks n-polygon indtegnes samtlige diagonaler, og det antages at der ikke findes tre diagonaler som skærer hinanden i samme punkt. (Her er en diagonal et linjestykke der forbinder to af polygonens hjørner, men polygonens sider er dog ikke diagonaler.)

i) Vis at antallet af diagonaler er $\binom{n}{2} - n$ for $n \geq 3$

ii) Vis at antallet af skæringspunkter mellem diagonaler er $\binom{n}{4}$ for $n \geq 4$. *Hint*: 5

iii) Vis at antallet af områder som diagonalerne deler polygonen i, er $1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$ for $n \geq 4$. *Hint*: 10

iv) Vis at antallet af trekanter, hvis hjørner er polygonens hjørner eller en skæring mellem to diagonaler, og hvis sider ligger på polygonens sider og diagonaler, er $\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 5\binom{n}{5} + \binom{n}{6}$ for $n \geq 6$. *Hint*: 7

Opgave 1.1.16. I en papkasse ligger et stort antal løse sokker. Nogle af sokkerne er røde; de øvrige er blå. Det oplyses at det samlede antal sokker ikke overstiger 1993. Endvidere oplyses det at sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve når man på tilfældig måde udtrækker to sokker fra kassen, er $\frac{1}{2}$. Hvad er efter de foreliggende oplysninger det største antal røde sokker der kan befinde sig i kassen? (Georg Mohr-Konkurrencen 1993) *Hint*: 23

At vælge r elementer ud af n svarer til at splitte de n elementer op i to bunker: en med r elementer og en med $n - r$ elementer. Nogle gange har man imidlertid brug for at fordele de n elementer i mange flere bunker. Eller formuleret med delmængder: dele en mængde i disjunkte delmængder som tilsammen indeholder samtlige elementer.

Definition af udvidet binomialkoefficient

Symbolet

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m}$$

betegner antallet af måder hvorpå man kan dele en mængde med n elementer i m disjunkte delmængder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ med henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_m$ elementer så $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$.

Sætning 1.1.4. Udvidet binomialkoefficient

Der gælder at

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_m!}.$$

Bevis. Når vi skal dele en mængde med n elementer i m disjunkte delmængder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ med henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_m$ elementer så $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$, kan vi tænke på udvælgelsen således: Først vælges r_1 blandt de n elementer. Det kan vi gøre på $\binom{n}{r_1}$ måder. Derefter vælges r_2 blandt de resterende $n - r_1$ elementer. Det kan vi gøre på $\binom{n-r_1}{r_2}$ måder. Vi fortsætter på denne måde indtil vi til slut vælger r_m blandt de resterende $n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}=r_m$ elementer. Dermed er

$$\begin{aligned}\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_m} &= \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}}{r_m}\\ &= \frac{n!}{r_1!(n-r_1)!}\,\frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}\cdots\frac{(n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1})!}{r_m!(n-r_1-r_2-\cdots-r_m)!}\\ &= \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!},\end{aligned}$$

fordi $(n-r_1-r_2-\cdots-r_m)!=0!=1$. □

Eksempel 1.1.8. Gruppeinddeling

En klasse med tolv elever skal deles i tre grupper med fire i hver. På hvor mange måder kan dette gøres?

Hvis grupperne betegnes A, B og C, kan de tolv elever ifølge sætningen fordeles i grupperne A, B og C med fire i hver på $\binom{12}{4,4,4}=34650$ måder. Men i spørgsmålet havde de tre grupper ingen betegnelse og var altså ikke ordnede, dvs. vi har talt hver kombination med $3!=6$ gange. Der er dermed $\frac{34650}{6}=5775$ måder at dele klassen på.

Opgave 1.1.17. En kube er sammensat af $3\times3\times3$ små enhedskuber. På hvor mange måder kan man komme fra det ene hjørne til det diagonalt modsatte hjørne når man kun må gå langs kanterne af enhedskuberne og skal vælge en rute der er så kort så mulig?

Opgave 1.1.18. I en krukke ligger ni bolde nummereret $1,2\ldots,9$. Tre personer trækker tilfældigt tre bolde hver. Hvad er sandsynligheden for at de alle får en ulige sum når de lægger deres tre boldes numre sammen? *Hint*: 1

Opgave 1.1.19. Vis at $((mn)!)^2$ er delelig med $(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}$ for alle positive hele tal n og m. *Hint*: 14

1.2 Skuffeprincippet

Skuffeprincippet bruger de fleste helt intuitivt uden at have hørt om det. Et klassisk eksempel på skuffeprincippet er at hvis 1100 mennesker er forsamlet, så vil mindst fire ifølge skuffeprincippet have fødselsdag samme dag. Der er 366 mulige fødselsdage. Hvis der er over $3\cdot366=1098$ mennesker forsamlet, vil der ifølge skuffeprincippet være mindst fire personer med samme fødselsdag.

Sætning 1.2.1. Skuffeprincippet

Skuffeprincippet siger at hvis man har $n+1$ objekter som man placerer i n skuffer, så findes der mindst én skuffe med mindst to objekter. Tilsvarende gælder at hvis man har $kn+1$ objekter som man placerer i n skuffer, så findes mindst én skuffe med mindst $k+1$ objekter.

Eksempel 1.2.1. Skuffeprincippet

Det er ikke altid helt oplagt hvad man skal vælge som skuffer og objekter. Hvis vi ser på en vilkårlig delmængde af mængden $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$ med 15 elementer, så vil vi gerne vise at der findes to talpar fra delmængden med samme numeriske differens.

I dette tilfælde må de mulige differenser - de hele tal fra 1 til 99 - være skufferne og de mulige talpar være objekterne da vi ønsker at vise at der findes mindst to talpar med samme differens. Hvis skuffeprincippet skal virke, skal vi altså vise at der er flere talpar end differenser.

I en delmængde af M med 15 elementer er der i alt

$$\binom{15}{2}=\frac{15\cdot14}{2}=105$$

forskellige talpar, men der er kun 99 mulige differenser. Dermed siger skuffeprincippet at der findes mindst to talpar med samme differens.

Eksempel 1.2.2. Skuffeprincippet

Skuffeprincippet kan også bruges hvis man har et endeligt antal skuffer og et uendeligt antal objekter. Betragt følgen

$$1,3,6,0,9,5,4,\dots$$

hvor det næste tal i følgen, fra og med det fjerde, er sidste ciffer i summen af de tre foregående. Da der kun findes endeligt mange talsæt af tre cifre, og følgen fortsætter i det uendelige, må der ifølge skuffeprincippet på et eller andet tidspunkt komme tre tal som tidligere har stået i samme rækkefølge, og derfor må følgen være periodisk fra et vist trin. Her er talsæt af tre cifre skufferne, mens objekterne er alle de uendeligt mange talsæt af tre cifre man får ved at vælge tre på hinanden følgende tal i følgen.

Her er nogle eksempler på meget forskellige opgavetyper hvor man kan anvende skuffeprincippet, men det er absolut ikke altid oplagt hvordan man skal konstruere sine skuffer og objekter.

Opgave 1.2.1. Ti venner sender hinanden julekort så hver sender fem julekort til fem forskellige venner. Vis at der findes et par af venner som har sendt hinanden et julekort.

Opgave 1.2.2. Vis at hvis et 2×2-kvadrat indeholder 10 punkter, da vil der findes to punkter med afstand mindre end 1.

Opgave 1.2.3. Lad n være et positivt heltal. Vis at der blandt $n+2$ forskellige positive heltal findes mindst to hvis sum er delelig med $2n$, eller hvis differens er delelig med $2n$. *Hint*: 34

Opgave 1.2.4. Om et kæmpe rundt bord der kan drejes, sidder der 100 personer. Alle har bestilt forskellig forret. Da de trætte tjenere har placeret en forret foran hver person, er der ingen der har den rigtige forret på deres plads. Vis at bordet kan drejes så mindst to personer har den rigtige forret på deres plads. *Hint*: 12

Opgave 1.2.5. I et kvadrat med sidelængde 1 er der 101 røde punkter hvoraf ikke tre ligger på linje. Vis at der findes en trekant med tre røde hjørner hvis areal ikke er større end $\frac{1}{100}$.

Opgave 1.2.6. Ethvert punkt i planen er malet i en af n givne farver. Vis at der findes et rektangel hvis hjørner alle har samme farve.

Opgave 1.2.7. I et bjerg dybt under jorden gemmer syv drager en mægtig skat. For at få fingre i skatten skal man igennem ti store stendøre der hver er låst med tre store låse. Hver drage har nøgle til nogle af låsene, og vilkårlige fire drager har tilsammen nøgler til alle låsene. Vis at der findes tre drager som tilsammen har nøgler til alle låsene. *Hint*: 42

Opgave 1.2.8. Lad A være en vilkårlig mængde af 23 positive hele tal mellem 1 og 1000. Vis at der findes to disjunkte delmængder af A hvis elementer har samme sum. *Hint*: 4

Opgave 1.2.9. Vis at blandt tallene $a, 2a, \dots, (n-1)a$, hvor $a \in \mathbb{R}$, er der mindst ét af tallene der har en afstand på højst $\frac{1}{n}$ til et helt tal. *Hint*: 28

Opgave 1.2.10. Vis at uanset hvordan 15 punkter afsættes inden for en cirkel med radius 2 (cirkelranden medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius 1 (cirkelranden medregnet) som indeholder mindst tre af de 15 punkter. (Georg Mohr-Konkurrencen 1991) *Hint*: 11

1.3 Pascals trekant og binomialkoefficienter

Binomialkoefficienterne $\binom{n}{r}$ viser sig at kunne frembringes på en interessant måde, og for at vise dette har vi behov for følgende formel.

Sætning 1.3.1. Lad n og k være ikke-negative heltal med $n \geq k+1$. Da er

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bevis. Hvis man skal udtage $k+1$ elementer ud af $n+1$, kan man enten udtage $k+1$ ud af de n første af de $n+1$ elementer, eller man kan udtage k elementer blandt de n første samt udtage det sidste ud af de $n+1$ elementer. Dermed er

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bemærk at man når frem til lighedstegnet ved at tælle det samme på to forskellige måder. Dette er en meget anvendelig metode når man fx skal vise at to udtryk er lig hinanden, men mere om det i et senere afsnit.

Alternativt kan man også blot regne, men det er ikke helt så elegant:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}((n-k)+(k+1)) \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \quad \square
\end{aligned}$$

Sætning 1.3.2. Pascals trekant

Binomialkoefficienterne kan opstilles i det man kalder *Pascals trekant* så en binomialkoefficient hele tiden er summen af de to ovenfor:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Bevis. Det følger direkte af sætning 1.3.1. $\square$

Sætning 1.3.3. Binomialformlen

Lad n være et ikke-negativt heltal. Da er

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Det er denne sammenhæng der er grunden til at binomialkoefficienter hedder binomialkoefficienter. Et *binom* er en to-leddet størrelse, og binomialkoefficienterne er dermed netop koefficienterne der fremkommer når man tager en potens af en to-leddet størrelse.

Bevis. Når man ganger $(x+y)^n$ ud, får man netop $x^{n-k}y^k$ ved at gange x'et fra $n-k$ af parenteserne med y'et fra de resterende k parenteser. Vi kan vælge de k parenteser med y'er ud af de n parenteser på $\binom{n}{k}$ måder, dvs. leddet $x^{n-k}y^k$ optræder $\binom{n}{k}$ gange i resultatet. Dette viser sætningen. □

Sætning 1.3.4. Binomialformlen

Lad n være et ikke-negativt heltal. Da er

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Bevis. Ifølge binomialformlen er

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Sættes $x = y = 1$, fås

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Rigtig mange sammenhænge om binomialkoefficienter kan vises ved at se på koefficienter i polynomier. I dette tilfælde og mange andre med binomialkoefficienter kan man også benytte tricket med at tælle det samme på to forskellige måder da begge sider af lighedstegnet angiver antallet af delmængder af en mængde med n elementer: Vi har tidligere set at der findes netop 2^n delmængder af en mængde med n elementer. Man kan også tælle delmængderne ved at summere antal delmængder med henholdsvis $0, 1, \ldots, n$ elementer, og det er netop det der står på højresiden. □

Sætning 1.3.5. Binomialkoefficienter

Der gælder følgende om binomialkoefficienter:

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

ii) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

iii) $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$.

iv) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

v) $\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{n} = 2^{2n}$.

vi) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

vii) For et primtal p er $\binom{p}{k}$ delelig med p for $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Opgave 1.3.1. Vis sætning 1.3.5. *Hint*: vii): 17

1.4 Skillevægge

Binomialkoefficienterne fortæller på hvor mange måder man kan udtage r elementer ud af n elementer. Man kan også med binomialkoefficienter lave en formel for på hvor mange måder man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse. Da objekterne er ens, er det lige meget hvilke der havner i hvilke bokse; det interessante er kun hvor mange der er i hver boks.

Sætning 1.4.1. Objekter i nummererede bokse

Man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse på

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

måder, hvis nogle af boksene gerne må være tomme.

Man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse på

$$\binom{n-1}{m-1}$$

måder, hvis alle bokse skal indeholde mindst ét objekt.

Bevis. Sæt de n objekter op på en række. At fordele dem i m nummererede bokse svarer til at sætte $m-1$ skillevægge op i rækken, så man putter objekterne før den første skillevæg i første boks osv.

$$\bullet \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet \quad | \quad | \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad |$$

Eksempel med $n=9$ objekter og $m=7$ bokse.
Der er henholdsvis $2,2,0,1,3,1,0$ objekter i de syv bokse.

Det svarer til at fordele n objekter og $m-1$ skillevægge på en række med $n+m-1$ pladser, hvilket kan gøres på $\binom{n+m-1}{m-1}$ måder. □

Opgave 1.4.1. Bevis sidste del af sætning 1.4.2.

Sætning 1.4.2. Tupler af heltal med fast sum

Antallet af m-tupler $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, hvor x_i'erne er ikke-negative heltal med $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, er

$$\binom{n+m-1}{m-1}.$$

Antallet af m-tupler $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, hvor x_i'erne er positive heltal med $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, er

$$\binom{n-1}{m-1}.$$

Bevis. Sætningen følger direkte af sætning 1.4.1 hvor $x_1, x_2, \dots, x_m$ er antallet af objekter i henholdsvis boks 1, boks 2, osv. □

Eksempel 1.4.1. Objekter i nummererede bokse

I et supermarked er der fem forskellige slags slikposer. Når man skal udregne på hvor mange måder man kan vælge ti slikposer, kan man bruge sætning 1.4.1. Det svarer nemlig til at fordele ti objekter i fem nummererede bokse der hver repræsenterer en bestemt slags slikpose, dvs. ifølge sætningen er der $\binom{10+5-1}{5-1} = 1001$ måder at vælge på.

Eksempel 1.4.2. Objekter i nummererede bokse med ekstra boks

I en isbutik sælges vaffelis med op til fem kugler, og der er vanille-, jordbær- og chokoladeis. Når man skal udregne hvor mange forskellige vaffelis man kan lave, kan man bruge sætningen om at fordele n objekter i m bokse. Vi antager at kuglernes rækkefølge er underordnet. Antallet af vaffelis svarer nu til at fordele fem kugler i fire bokse hvor den ene boks repræsenterer vanille, den anden jordbær, den tredje chokolade og den fjerde ingenting. På denne måde får man alle kombinationer inklusiv den uden kugler. Hvis man trækker den fra, er der derfor $\binom{5+4-1}{4-1} - 1 = \binom{8}{3} - 1 = 55$ forskellige kombinationer.

Opgave 1.4.2. I et supermarked er der fem forskellige slags slikposer at vælge imellem, men supermarkedet har kun seks poser tilbage af tre af slagsene samt syv poser af de to sidste slags. Vis at man kan vælge ti slikposer på 866 måder.

Opgave 1.4.3. Vis at der er netop 462 måder at lægge ti 2-kroner og seks 5-kroner på en række så der mellem to 5-kroner ligger mindst en 2-krone. *Hint*: 2

Opgave 1.4.4. På hvor mange måder kan man vælge ti ikke-negative heltal $x_1, x_2 \dots, x_{10}$ så deres sum højst er 100? *Hint*: 37

Opgave 1.4.5. En skat på 50 guldstykker skal fordeles mellem seks pirater. De beslutter sig for at skrive alle kombinationer ned, hvor ingen får mere end halvdelen af guldstykkerne, og alle får mindst fire guldstykker, og derefter trække lod blandt disse kombinationer. Hvor mange kombinationer trækker de lod imellem?

Opgave 1.4.6. En mængde består af samtlige 12-cifrede tal som består af netop fem 1-taller, fire 2-taller og tre 3-taller. Vis at hvis man trækker et tilfældigt tal fra mængden, da er sandsynligheden for at få et tal som har mindst to 1-taller i træk, lig med $\frac{92}{99}$. *Hint*: 30

Opgave 1.4.7. Vis at antallet af binære tal med n cifre der har netop m blokke af formen 01, er $\binom{n}{2m+1}$. (Husk at et binært tal har 1 som første ciffer.) *Hint*: 9

Opgave 1.4.8. I et lottospil udtrækkes syv tal ud af 36. Vis at mere end $\frac{3}{4}$ af disse kombinationer indeholder to nabotal. (Du må gerne bruge at $\frac{36!23!}{29!30!} > \frac{3}{4}$.) *Hint*: 22

Opgave 1.4.9. I et ringspil er der ti ringe i forskellige farver samt fem forskellige målpinde til at kaste efter. Vis at antallet af forskellige slutkonfigurationer med syv ringe på målpindene og tre ringe i græsset er $\frac{11!10!}{4!7!3!} = 199.584.000$. (Bemærk at hvis flere ringe er på samme målpind, kan de ligge i forskellig rækkefølge på pinden.) *Hint*: 21

1.5 Tælle på to måder

Vi har flere gange set at man kan vise nogle formler hvori der indgår binomialkoefficienter, ved at tælle på to måder.

Eksempel 1.5.1. Tælle på to måder

Formlen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{n+m}{m}$$

kan let vises ved at tælle på to måder, mens det er langt mere krævende hvis man begynder at omskrive binomialkoefficienterne.

Tallet $\binom{n+m}{m}$ angiver ifølge sætning 1.4.1 på hvor mange måder man kan fordele n ens kugler i $m+1$ kasser. Man kan også tælle dette på følgende måde: Når der er $n-k$ kugler i den første boks, kan man fordele de k resterende kugler i de m resterende bokse på $\binom{k+m-1}{m-1}$ måder. Når man summerer dette, får man netop venstresiden af lighedstegnet.

Eksempel 1.5.2. Tælle på to måder

Følgende formel kan også vises ved at tælle på to måder.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Vi benytter nu to forskellige metoder til at tælle på hvor mange måder man kan nedsætte et udvalg med en forperson når der er n personer at vælge imellem, og udvalget skal bestå af mellem en og n personer:

Metode 1: Først er der n muligheder for at vælge forpersonen. Derefter skal man for hver af de $n-1$ resterende beslutte om de er med eller ej. Dette kan samlet gøres på $n2^{n-1}$ måder.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k måder at vælge forpersonen på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. Dermed er formlen vist.

Sætning 1.5.1. Vandermonde-identiteten

Lad n, m og k være ikke-negative hele tal med $k \le n+m$. Da er

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

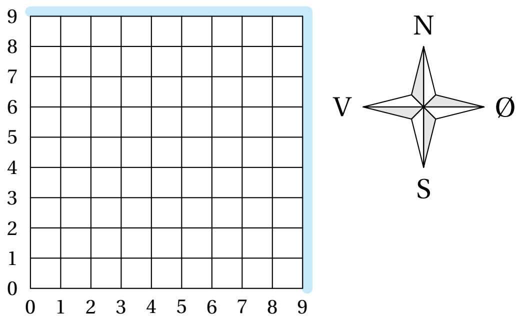
Opgave 1.5.1. Vis sætning 1.5.1.

Opgave 1.5.2. Vis formlerne

$$\text{i)} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \quad \text{og} \quad \text{ii)} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

Hint: 27, 16

Opgave 1.5.3. i) I en by er der et vejnet som danner et kvadrat med $n+2$ veje nord-syd og $n+2$ veje øst-vest, $n \ge 2$. Langs den nordligste og den østligste vej løber en flod. Vejene nummereres $0, 1, 2, \dots, n+1$ fra vest mod øst, og fra syd mod nord. Ane starter i det sydvestlige hjørne af vejnettet, dvs. i $(0,0)$. Hun vil ned til floden og går på følgende måde. Først slår hun plat og krone. Hvis det bliver krone, går hun mod nord til næste vejkryds, og hvis det bliver plat går hun mod øst til næste vejkryds. Sådan fortsætter hun til hun når den nordligste eller den østligste vej ved floden, dvs. indtil hun første gang når en af de to veje med nummer $n+1$.



Eksempel med $n = 8$

Vis at sandsynligheden for at hun når floden i krydset $(3, n+1)$, er

$$\binom{n+3}{3}\frac{1}{2^{n+4}}.$$

ii) Vis formlen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{k+n}} = 1.$$

Opgave 1.5.4. Vis at

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}.$$

Hint: 8

Opgave 1.5.5. Lad $F(n,r)$ betegne gennemsnittet af mindste-elementerne i samtlige delmængder af $\{1, 2, \dots, n\}$ med r elementer.
Vis at

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

(IMO 1981)

Opgave 1.5.6. Vis ved at tælle på to måder at

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

Hint: 33

Opgave 1.5.7. I en konkurrence er der a deltagere og b dommere, hvor $b \ge 3$ er et ulige tal. Hver dommer bedømmer om hver deltager har bestået eller er dumpet. Antag et k er et tal så der for to vilkårlige dommere gælder at deres bedømmelse højst stemmer overens for k deltagere. Vis at $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$. (IMO 1998) *Hint*: 24

1.6 Mere om binomialkoefficienter

I dette afsnit fokuserer vi på hvordan man regner med binomialkoefficienter. Som udgangspunkt har vi de sammenhænge om binomialkoefficienter som allerede er vist i afsnit 1.3 samt Vandermonde-identiteten fra afsnit 1.5.

Eksempel 1.6.1. Vandermonde-identiteten

Vi ønsker at vise at

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

for alle positive heltal n. Dette svarer blot til Vandermonde-identiteten

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i},$$

hvor $m=n=k$, da $\binom{m}{m-i}=\binom{m}{i}$.

Opgave 1.6.1. Lad p være et ulige primtal. Vis at

$$\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod p.$$

Opgave 1.6.2. Lad n være et positivt heltal. Vis at

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2=n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Hint: 41

Opgave 1.6.3. Lad n og m være positive heltal hvor $m<n$. Vis at

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=0.$$

Hint: 19

Eksempel 1.6.2. Fibonaccital og binomialkoefficienter

Der er mange interessante sammenhænge mellem binomialkoefficienter og andre matematiske fænomener. Her skal vi se en sammenhæng med Fibonaccitallene.

Lad $F_1,F_2,\ldots$ være Fibonaccitallene, sådan at $F_1=F_2=1$ og $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ for $n\geq 0$. Vi ønsker at vise at

$$F_{n+2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k}$$

for alle ikke-negative heltal n.

For at opnå denne sammehæng er det smart at benytte induktion efter n bl.a. fordi Fibonaccitallene er defineret rekursivt. For $n=0$ er $\sum_{k=0}^{0}\binom{1-k}{k}=\binom{1}{0}=1=F_2$, og for $n=1$ er $\sum_{k=0}^{1}\binom{1+1-k}{k}=\binom{2}{0}+\binom{1}{1}=2=F_3$. Dermed er induktionsstarten på plads. Antag at

$$F_{n+2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k}$$

for alle ikke-negative heltal $n<N$. For at udnytte induktionsantagelsen benyttes den helt grundlæggende sammenhæng mellem binomialkoefficienter (sætning 1.3) som siger at $\binom{m}{r}=\binom{m-1}{r}+\binom{m-1}{r-1}$:

$$\begin{aligned}F_{N+2}=F_{N+1}+F_N&=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{(N-1)+1-k}{k}+\sum_{k=0}^{N-2}\binom{(N-2)+1-k}{k}\\&=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{(N-1)+1-k}{k}+\sum_{k=1}^{N-1}\binom{(N-2)+1-(k-1)}{k-1}\\&=\sum_{k=0}^{N}\left(\binom{(N-1)+1-k}{k}+\binom{(N-1)+1-k}{k-1}\right)-\binom{0}{N}-\binom{N}{-1}-\binom{0}{N-1}\\&=\sum_{k=0}^{N}\binom{N+1-k}{k}.\end{aligned}$$

Dermed er induktionen fuldført.

Opgave 1.6.4. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

for alle positive heltal n. *Hint*: 13

1.7 Rekursion

Når vi i matematik beskriver tallene i en følge *rekursivt*, betyder det at vi beskriver det næste tal i følgen vha. de foregående. Fx er Fibonaccitallene $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ beskrevet rekursivt da $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ med $F_1 = 1$ og $F_2 = 1$. Dette kan bruges til at tælle antallet af forskellige ting.

Eksempel 1.7.1. Tårnene i Hanoi

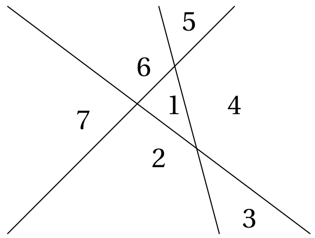
Et klassisk eksempel på *rekursion* er tårnene i Hanoi. Her er der n ringe i forskellig størrelse. Desuden er der et bræt med tre pinde. Til at starte med ligger alle ringene på den venstre pind med den største nederst, derefter den næststørste, osv. Man må flytte ringene en ad gangen fra en pind til en anden, men man må aldrig lægge en større ring oven på en mindre ring. Vi ønsker nu at bestemme hvor mange ringe der mindst skal flyttes for at flytte samtlige ringe over på den højre pind.

Tårnene i Hanoi, $n = 6$.

Kald dette antal S_n. Det er klart at $S_1 = 1$. For at flytte den største ring fra højre til venstre pind skal alle de andre ringe først flyttes hen på den midterste pind. Det kan gøres på S_{n-1} træk, men ikke færre. Derefter kan vi flytte den største ring fra venstre til højre pind, og vi skal herefter flytte de $n-1$ ringe fra midterste pind til venstre pind før vi er i mål. Det kan gøres på S_{n-1} træk, men ikke færre. Dermed er $S_n = 2S_{n-1} + 1$.

Vi har nu beskrevet S_n rekursivt, men vi ønsker en lukket formel for S_n. Ud fra rekursionen er det nemt at få en idé om at $S_n = 2^n - 1$, og dette kan let vises let ved induktion efter n når vi har rekursionsligningen.

Opgave 1.7.1. I planen tegnes n rette linjer sådan at der ikke findes to som er parallelle, og så der ikke er tre linjer som skærer hinanden i samme punkt. Bestem antallet a_n af områder som linjerne inddeler planen i.



Eksempel med $n = 3$, hvor $a_3 = 7$

Eksempel 1.7.2. Dobbeltrekursion

I et sprog er der to bogstaver i alfabetet, A og B. Et ord er en række bogstaver hvor to nabobogstaver aldrig begge er B. Vi ønsker at bestemme antallet af ord med n bogstaver. For at gøre dette laver vi en *dobbeltrekursion*. Lad a_n være antallet af ord af længde n som slutter på A, og lad b_n være antallet af ord af længde n som slutter på B. Da er $a_1 = 1$ og $b_1 = 1$. Desuden er

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \quad \text{og} \quad b_n = a_{n-1}.$$

Dermed er

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2},$$

og a_n er derfor lig med det $n+1$'te Fibonaccital F_{n+1}, mens $b_n = a_{n-1}$ er lig med det n'te Fibonaccital F_n. Altså er det samlede antal ord O_n af længde n lig med $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Nu har vi beskrevet antallet rekursivt og kan fx udregne antallet af ord på otte bogstaver ved først at udregne $O_1, O_2, \ldots, O_7$. Det er helt fint hvis vi ønsker at bestemme antallet for et lille n, men ikke hvis vi fx vil bestemme O_{1000}. Der er det smartere med en lukket formel.

Opgave 1.7.2. På hvor mange måder kan man farve nogle af felterne på et 2×8-bræt sorte når to felter med en fælles kant ikke begge må være sorte?
Hint: 40

Sætning 1.7.1. Løsning til rekursionsligning

Hvis følgen $a_0, a_1, \ldots$ opfylder den lineære rekursionsligning

$$a_n = p a_{n-1} + q a_{n-2},$$

og r_1 og r_2 er løsningerne til andengradsligningen $x^2 - px - q = 0$, da er følgen bestemt ved

$$a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$$

løsning til rekursionsligningen for alle konstanter A og B.

Bevis. Lad r_1 og r_2 være løsningerne til andengradsligningen $x^2 - px - q = 0$. Fra teorien om andengradsligninger er det kendt at $r_1 + r_2 = p$ og $-r_1 r_2 = q$. Sæt nu $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ for alle n. Da er

$$\begin{aligned} p a_{n-1} + q a_{n-2} &= p\left(A \cdot r_1^{n-1} + B r_2^{n-1}\right) + q\left(A \cdot r_1^{n-2} + B r_2^{n-2}\right) \\ &= (r_1 + r_2)\left(A \cdot r_1^{n-1} + B r_2^{n-1}\right) - r_1 r_2 \left(A \cdot r_1^{n-2} + B r_2^{n-2}\right) \\ &= A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n = a_n, \end{aligned}$$

hvilket viser at $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ opfylder $a_n = p a_{n-1} + q a_{n-2}$. □

Eksempel 1.7.3. Fra rekursionsligning til lukket formel

Sætning 1.7.1 kan benyttes til at bestemme en lukket formel for det n'te Fibonaccital. Udgangspunktet er at følgen givet ved $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$ og $F_1 = 1$. Løsningerne til $x^2 - x - 1 = 0$ er $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, og det betyder at følgen givet ved

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

er en løsning til selve rekursionsligningen. Hvis vi kan finde konstanter A og B sådan at formlen passer for F_1 og F_2, er vi derfor i mål. Vi skal altså bestemme A og B så

$$0 = F_0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A + B \text{ og}$$

$$1 = F_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B).$$

Den første ligning giver at $B = -A$, og ved at indsætte dette i ligning nummer to fås $1 = \sqrt{5}A$, dvs. $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ og $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Det giver Binets formel for Fibonaccitallene:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Opgave 1.7.3. Georg bygger tårne af klodser. Han har røde $1 \times 1 \times 1$-klodser, og så har han $1 \times 1 \times 2$-klodser i seks forskellige farver. Bestem en lukket formel for hvor mange forskellige $1 \times 1 \times n$-tårne han kan bygge.

Opgave 1.7.4. Et $2 \times n$-bræt består af $2n$ enhedskvadrater og skal udfyldes med 1×2-brikker og 2×2-brikker. Bestem en lukket formel for antallet a_n af måder hvorpå det kan gøres.

Opgave 1.7.5. Lad a_n være antallet af måder man kan farve nogle af felterne på et $2 \times n$-bræt sorte, når to felter med en fælles kant ikke begge må være sorte. Bestem en lukket formel for a_n. (*Tip:* For ikke at få alt for besværlige udregninger er det en god idé at tage udgangspunkt i a_0 og a_1 i stedet for fx a_1 og a_2.)

Opgave 1.7.6. Bestem en lukket formel for antallet af n-cifrede tal der kun indeholder cifrene $1, 2, 3, 4, 5$, og hvor to på hinanden følgende cifre altid har differens ± 1. *Hint*: 6

Opgave 1.7.7. På hvor mange måder kan man farvelægge en række af 16 stole så hver stol bliver enten rød eller grøn, og længden af hver ensfarvet sekvens af stole er ulige? (Baltic Way 2014) *Hint*: 29

Opgave 1.7.8. Et $2 \times n$-bræt består af $2n$ enhedskvadrater. Antallet af måder hvorpå man kan farve nogle af felterne røde uden at der opstår et rødt 2×2-kvadrat, kaldes C_n. Det største tal k så 3^k går op i C_n, kaldes k_n. Bestem k_{2019}. *Hint*: 18

Opgave 1.7.9. Betragt mængden $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Antallet af delmængder af S_n som ikke indeholder to på hinanden følgende tal, og som har netop k elementer, betegnes $A(n, k)$. Bestem en lukket formel for $A(n, k)$. *Hint*: 32

Opgave 1.7.10. Lad n være et positivt helt tal. Alma har n røde bokse og n røde låg alle med forskellige mønstre. Tallet $A(n, r)$ angiver på hvor mange måder hun kan vælge r røde bokse og r røde låg og fordele dem i r par med en boks og et låg i hvert. Bertha har n blå bokse $b_1, b_2, \ldots, b_n$ og $2n-1$ blå låg $l_1, l_2, \ldots, l_{2n-1}$. Tallet $B(n, r)$ angiver på hvor mange måder hun kan vælge r blå bokse og r blå låg og fordele dem i r par med en boks og et låg i hvert, med den ekstra betingelse at boksen b_i kun kan danne par med lågene $l_1, l_2, \ldots, l_{2i-1}$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ da låget ellers er for lille. Vis at $A(n, r) = B(n, r)$, og find en lukket formel for disse. (Inspireret af opgave fra IMO shortlist 1997)

1.8 Princippet om inklusion og eksklusion - PIE

I nogle situationer har man behov for at tælle antallet af elementer i en foreningsmængde, og det kan man benytte princippet om inklusion og eksklusion til, også kaldet PIE.

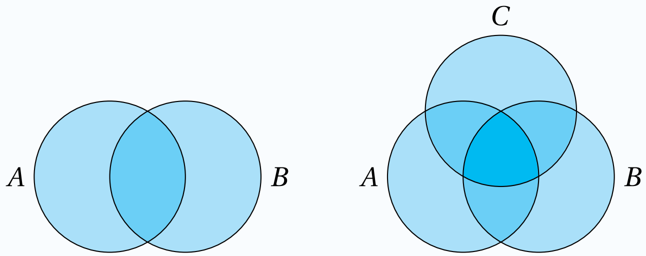
Eksempel 1.8.1. Princippet om inklusion og eksklusion

Hvis man skal bestemme antallet af elementer i foreningsmængden af to mængder A og B, ses det nemt ved et Venn-diagram (figur nedenfor) at

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tilsvarende ses for tre mængder A, B og C at

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Man inkluderer med andre ord først alt det der er i A og i B og i C, men så har man inkluderet alt det de har tilfælles, to gange hvis det ligger i to af mængderne, og tre gange hvis det ligger i alle tre mængder. Derfor ekskluderer man nu alt det der ligger i fællesmængden mellem A og B, fællesmængden mellem A og C samt fællesmængden mellem B og C. Nu har man sørget for at alt det der ligger i en eller to af mængderne, er inkluderet præcis én gang. De elementer der ligger i alle tre mængder, har man imidlertid først inkluderet tre gange, men derefter ekskluderet tre gange, dvs. vi skal til slut inkludere disse elementer én gang igen.

Dette kan generaliseres til følgende sætning:

Sætning 1.8.1. PIE - Princippet om inklusion og eksklusion

Antallet af elementer i foreningsmængden af n mængder $A_1, A_2, \dots, A_n$ kan beregnes således:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Bevis. Formlen bevises ved at se på et element der tilhører præcis k af mængderne $A_1, A_2, \dots, A_n$. Dette element er talt med

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1 - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = 1 - (1-1)^k = 1$$

gang. Altså er samtlige elementer talt med præcis én gang, og derfor er formlen korrekt. □

Eksempel 1.8.2. PIE

Når vi benytter PIE, starter vi som regel med en grundlæggende mængde M som vi ønsker at tælle en delmængde af. Derefter konstruerer vi delmængder af M som tilsammen indeholder alt det vi ønsker at frasortere. Vi benytter altså igen den helt grundlæggende tællestrategi at tælle det der ikke opfylder den ønskede betingelse.

Hvis vi fx vil tælle antallet af tal i mængden $M = \{1, 2, 3, \dots, 2018\}$ som hverken er delelige med 5 eller 7, så konstruerer vi $A_5 \subseteq M$ som indeholder alle tal fra M som er delelige med 5, og $A_7 \subseteq M$ som indeholder alle tal fra M som er delelige med 7. Svaret er dermed $|M| - |A_5 \cup A_7|$ som nemt

kan tælles med PIE. Vi har

$$\begin{aligned}|M|-|A_5\cup A_7| &= |M|-(|A_5|+|A_7|-|A_5\cap A_7|)\\ &= 2018-\left(\left\lfloor\frac{2018}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2018}{7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2018}{5\cdot 7}\right\rfloor\right)\\ &= 2018-(403+288-57)=1384.\end{aligned}$$

Eksempel 1.8.3. PIE

PIE kan også bruges til at beregne på hvor mange måder man kan få øjensummen 21 ved et kast med seks almindelige terninger. For at benytte PIE skal vi definere nogle mængder som vi gerne vil finde foreningsmængden af. I dette tilfælde betragter vi grundlæggende mængden

$$M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\mid x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=21,\, x_i\in\mathbb{N}\},$$

der netop svarer til at skrive 21 som en ordnet sum af seks positive heltal. Problemet er selvfølgelig nu at vi kun ønsker de elementer fra M hvor $x_i\leq 6$. Derfor definerer vi

$$A_i=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\mid x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=21,\, x_i>6,\, x_i\in\mathbb{N}\}$$

for $i=1,2,3,4,5,6$ da det på denne måde er nemt at tælle antallet af elementer i A_i samt fællesmængder af A_i'erne. Antal elementer i foreningsmængden $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6$ kan derfor tælles ved PIE og består netop af de summer hvor en af de seks summander er større end 6, altså alt det vi ønsker at frasortere. Antallet T af måder man kan få øjensummen 21 ved et kast med seks almindelige terninger, er altså

$$\begin{aligned}T &= |M|-|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6|\\ &= |M|-\left(\sum_{1\leq i\leq 6}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq 6}|A_i\cap A_j|+\cdots-|A_1\cap\cdots\cap A_6|\right).\end{aligned}$$

Antal elementer i M er $\binom{20}{5}$ ifølge sætning 1.4.2. Tilsvarende er $|A_i|=\binom{14}{5}$ da det svarer til at de seks tal har sum 15 når vi har trukket 6 fra x_i, og ligeledes $|A_i\cup A_j|=\binom{8}{5}$, $i\neq j$, da det svarer til at summen af de seks tal skal give 9 når vi har trukket 6 fra både x_i og x_j. Fællesmængden af tre eller flere af A_i'erne er tom da det ikke er muligt at tre eller flere af de seks tal er større end seks når summen er 21. Dermed er

$$T=\binom{20}{5}-\binom{6}{1}\binom{14}{5}+\binom{6}{2}\binom{8}{5}=4332.$$

Eksempel 1.8.4. PIE

Man kan også benytte PIE til at tælle antallet af *fikspunktsfri* permutationer af tallene $1,2,\dots,n$, dvs. permutationer hvor intet tal afbildes på sig selv.

Der er i alt $n!$ permutationer af de n tal. Lad A_i være mængden af permutationer som fikserer elementet i. Antallet P af fikspunktsfri permutationer er da

$$P=n!-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$\begin{aligned}P=n!-\Big(&\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|\\ &+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|\Big).\end{aligned}$$

Antallet af permutationer som fikserer k bestemte tal, er $(n-k)!$, dvs.

$$\begin{aligned}P &= n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\cdots(-1)^n\binom{n}{n}0!\\ &= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots(-1)^n\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

Opgave 1.8.1. Benyt PIE til at tælle hvor mange af tallene i $M = \{1,2,3,\dots,1000\}$ der hverken er delelige med 3, 5 eller 7.

Opgave 1.8.2. Et telefonselskab har netop alle 8-cifrede telefonnumre $c_1c_2c_3 - c_4c_5c_6c_7c_8$ som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_4c_5c_6$, $c_1c_2c_3 = c_5c_6c_7$ eller $c_1c_2c_3 = c_6c_7c_8$, hvor $c_1, c_2, \dots, c_8 \in \{0,1,\dots,9\}$. Hvor mange telefonnumre har telefonselskabet?

Opgave 1.8.3. På hvor mange måder kan man vælge syv kort fra et almindeligt sæt spillekort med 52 kort så man har mindst ét kort af hver af de fire kulører?

Opgave 1.8.4. Otte personer der danner par to og to, skal stilles på en række så ingen står ved siden af deres partner. På hvor mange måder kan det gøres? *Hint*: 20

Opgave 1.8.5. På hvor mange måder kan man udtage tre delmængder A, B og C af en mængde M med n elementer så $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ og $B \cap C \neq \emptyset$, mens $A \cap B \cap C = \emptyset$? *Hint*: 35

Opgave 1.8.6. Lad n og k være positive hele tal. Vis at

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n+k-i)^n$$

Hint: 38

Opgave 1.8.7. Lad S_{2n} være mængden af permutationer af tallene $1,2,3,\cdots,2n$. En permutation $\sigma \in S_{2n}$ siges at have egenskaben P hvis der findes et $i \in \{1,2,3,\cdots,2n-1\}$, så $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$. Vis at mere end halvdelen af alle permutationerne i S_{2n} har egenskaben P. *Hint*: 15

2 Hints

1. Hvordan skal kuglerne med lige numre fordeles så alle får en ulige sum?
2. Stil de ti 2-kroner op på en række, og tænk på at 5-kronerne skal indsættes som skillevægge.
3. Husk at et tal er deleligt med 9 netop hvis tværsummen er delelig med 9.
4. Lad de mulige summer være skuffer, og lad delmængder af A være objekter.
5. Der er en parring mellem mængden af skæringspunkter og mængden af alle mængder der består af fire af polygonens hjørner.
6. Lav en tredobbelt rekursion hvor du inddeler i tal der slutter på 1 og 5, tal der slutter på 2 og 4, og tal der slutter på 3. Brug *ikke* sætning 1.7.1.
7. Tæl antallet af trekanter der har henholdsvis tre, to, en eller nul hjørner tilfælles med polygonen, hver for sig.
8. Se på antallet af måder man kan udtage delmængder med $r+1$ elementer af mængden $\{1,2,\ldots,n+1\}$ med fokus på det næstmindste element.
9. Sæt et 0 på det n-cifrede tal til slut, og betragt i stedet antallet af $n+1$-cifrede binære tal som starter med 1 og slutter på 0. Hvor mange skift mellem 1 og 0 skal der være, hvis der skal være netop m 01-blokke?
10. Tænk på at diagonalerne indtegnes en ad gangen, og at polygonen til at starte med kun består af ét område. Hvor mange flere områder kommer der for hver gang man tegner en ny diagonal, i forhold til det antal skæringspunkter den danner med allerede indtegnede diagonaler?
11. Dæk cirklen med radius 2 med syv cirkler med radius 1.
12. Lad hver placering af bordet repræsentere en skuffe, så der er 100 skuffer.
13. Benyt induktion efter n.
14. Vis at $\frac{((mn)!)^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$ svarer til et antal kombinationer af noget og dermed er et helt tal.
15. Lad A_k, $k=1,2,\cdots,n$, være mængden af permutationer σ hvor der findes et i så $\sigma(i)=k$ og $\sigma(i+1)=k+n$ eller $\sigma(i)=k+n$ og $\sigma(i+1)=k$. Brug PIE, og vurder summen.
16. ii) Antal måder at vælge et udvalg med en forperson, en referent og en kasserer ud af n personer, hvor en person godt kan have flere af de tre poster.
17. Vis at p går op i tælleren, men ikke i nævneren, og husk at p er et primtal.
18. Vis ved induktion efter n at $k_n=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ for ulige n, mens $k_n\geq\frac{n}{2}$ for lige n.
19. Vis at $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.
20. Lad A_i være mængden af rækkefølger hvor par nummer i står ved siden af hinanden for $i=1,2,3,4$.
21. Tæl først på hvor mange måder syv ens ringe kan fordeles på fem pinde. Overvej derefter for hver af disse kombinationer hvor mange kombinationer der er når man har ti ringe med forskellig farve, hvor syv skal fordeles på de syv forskellige positioner.
22. Tæl alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal, ved at betragte de udtrukne tal som skillevægge mellem de resterende 29 elementer eller før det første eller efter det sidste.
23. Kald antallet af sokker for n og antallet af røde sokker for r. Find et udtryk for sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve, og benyt dette til at bestemme r.
24. Vurder antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse, på to forskellige måder.
25. Tæl det modsatte.
26. Tæl antallet af ruter gennem det lukkede kryds.
27. i) Antal måder at vælge et udvalg med en forperson og en referent ud af n personer, hvor forperson og referent gerne må være den samme.
28. Inddel intervallet fra 0 til 1 i n intervaller af længde $\frac{1}{n}$, og lad dem være skufferne. Kom tallet ia ned i det interval hvor brøkdelen $\{ia\}$ ligger.
29. Kald antallet af farvelagte rækker af stole af længde k som starter med en grøn stol, for g_k, og antallet som starter med en rød stol, for r_k.
30. Tæl i stedet de tal der ikke indeholder to 1-taller som nabotal.
31. Kald mængden som indeholder 1, for A, mængden som indeholder 2, for B og den sidste mængde for C.
32. Vis at $A(n,k)=\binom{n+1-k}{k}$.
33. Tæl antal måder at vælge x, y og z på så $x,y,z\in\{1,2,\ldots,n+1\}$ med yderligere betingelser på x, y og z.
34. Skuffer: Resten 0, resten n og restparrene $\pm i$, $i=1,2,\ldots,n-1$, modulo $2n$.
35. Tænk på at hvert af de n elementer skal ligge i netop én af følgende syv disjunkte mængder: $M\setminus(A\cup B\cup C)$, $A\setminus(B\cup C)$, $B\setminus(A\cup C)$, $C\setminus(A\cup B)$, $(A\cap B)\setminus C$, $(A\cap C)\setminus B$ og $(B\cap C)\setminus A$, hvis $A\cap B\cap C=\emptyset$. Lad X være mængden af tripler (A,B,C) hvor $A\cap B=\emptyset$, osv.

36. Vælg først de k rækker og de k søjler hvor der skal placeres et tårn.
37. Tænk på sætning 1.4.2 og eksempel 1.4.2.
38. Betragt mængden $S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_j \in \{1, 2, 3, \ldots, n+k\}\}$, og lad A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
39. På hvor mange måder kan du vælge de fire cifre?
40. Lad a_n være antallet af måder man kan farve nogle af felterne på et $2 \times n$-bræt sorte, når to felter der har en kant til fælles, ikke begge må være sorte, og lad b_n være hvor mange af disse hvor begge de to sidst tilføjede felter er hvide, og c_n være hvor mange af disse hvor netop et af de to sidst tilføjede felter er sort.
41. Brug Vandermonde-identiteten.
42. Antag at der ikke findes tre drager der har alle nøgler. For hver trio af drager er der så mindst én nøgle denne trio ikke har.

3 Løsninger

Opgave 1.1.1. De 8×8 midterste perler kan vælges på 5^{64} måder da vi for hver af de 64 perler har fem valgmuligheder. Derudover kan farven på kanten vælges på fem måder. Der er altså samlet 5^{65} forskellige kombinationer.

Opgave 1.1.2. Det første ciffer må hverken være 0 eller 7, derfor er der otte valgmuligheder for det første ciffer. For hvert af de næste seks cifre er der ni valgmuligheder. Derfor er der $8 \cdot 9^6$ syvcifrede tal som ikke indeholder cifferet 7.

Opgave 1.1.3. Det første ciffer kan vælges på ni måder. Hvert af de følgende cifre kan vælges på ni måder da de ikke må være identiske med det foregående. Dermed er der 9^{10} ticifrede tal som ikke indeholder to ens nabocifre.

Opgave 1.1.4. Et tal er deleligt med 9 netop hvis tværsummen er det. For hvert af de første fem cifre er der ni valgmuligheder. Hvis tallet skal være deleligt med 9, er det sidste ciffer derimod entydigt fastlagt ud fra summen af de fem foregående. Dermed er der i alt 9^5 sekscifrede tal som er delelige med 9 og ikke indeholder cifferet 0.

Opgave 1.1.5. Da det er meget nemmere at tælle de tal som ikke indeholder to ens nabocifre, gør vi i stedet det. Der er 4^8 ottecifrede tal som kun består af cifrene 1, 2, 3 og 4. Hvis vi tæller antallet af disse som ikke indeholder to ens nabocifre, så har vi fire muligheder for at vælge det første ciffer, og derefter tre muligheder for hvert af de næste. Dette giver $4 \cdot 3^7$. Der er altså $4^8 - 4 \cdot 3^7$ ottecifrede tal som indeholder to ens nabocifre og kun består af cifrene 1, 2, 3 og 4.

Opgave 1.1.6. Kald delmængden som indeholder 1, for A, delmængden som indeholder 2, for B og den sidste for C. Der er nu to muligheder for at placere tallet 3 da ingen mængde må indeholde to på hinanden følgende tal. Da dette gælder for alle de resterende tal, er der altså $2^{100-2} = 2^{98}$ forskellige måder at fordele tallene på. I en enkelt af disse kombinationer bliver mængden C dog tom, dvs. resultatet er $2^{98} - 1$.

Opgave 1.1.7. For at tælle på hvor mange måder man kan fordele de 20 kugler i de fire forskellige skåle så der findes en skål som indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2, tæller vi i stedet antallet af måder at fordele de 20 kugler i de fire forskellige skåle, og trækker antallet af kombinationer fra hvor der ikke findes en skål som indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2. Der er i alt 4^{20} måder at fordele de 20 kugler på da vi for hver kugle har fire valgmuligheder. Hvis vi tæller antallet af disse kombinationer som ikke indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2, så har vi fire valgmuligheder for kugle nummer 1. Derefter er der tre valgmuligheder for kugle nummer 2 da den ikke må komme i samme skål som kugle nummer 1. For hver af de efterfølgende kugler er der netop to mulige skåle hvori de kan placeres, da de ikke må kommer i samme skål som nogen af de to foregående kugler. Dette giver $4 \cdot 3 \cdot 2^{18}$ kombinationer. Der er altså $4^{20} - 4 \cdot 3 \cdot 2^{18} = 2^{20}(2^{20} - 3)$ måder at placere de 20 kugler så der findes en skål der indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2.

Opgave 1.1.8. Et firecifret tal der opfylder det ønskede, kan ikke indeholde cifferet 0, dvs. det består af netop fire af cifrene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, og det er entydigt bestemt ud fra valget af disse fire cifre. Dermed er der i alt $\binom{9}{4} = 126$.

Opgave 1.1.9. Udvalgets medlemmer kan vælges på $\binom{25}{5}$ måder, og derudover er der fem måder at vælge udvalgets forperson på. Samlet er der derfor $5 \cdot \binom{25}{5}$ muligheder for at nedsætte udvalget.

Opgave 1.1.10. Man kan vælge de to pars talværdier på $\binom{13}{2} = 78$ måder og talværdierne for de sidste to kort på $\binom{11}{2} = 55$ måder. Når talværdierne er bestemt, kan de to par hver vælges på $\binom{4}{2} = 6$ måder og de to andre kort på hver $\binom{4}{1} = 4$ måder. Der er altså i alt $\binom{13}{2}\binom{11}{2}\binom{4}{2}^2\binom{4}{1}^2 = 78 \cdot 55 \cdot 6^2 \cdot 4^2 = 2.471.040$ måder.

Opgave 1.1.11. Der er i alt $\binom{52}{4} = 270725$ kombinationer af fire kort fra et almindeligt sæt spillekort med 52 kort, og alle disse er lige sandsynlige. Antallet af disse som indeholder fire forskellige talværdier, bestemmes: Der skal vælges fire blandt de 13 talværdier, og for hver af disse skal der vælges kulør. Dermed er der $\binom{13}{4}4^4 = 183040$ kombinationer med fire kort som ikke indeholder et par. Sandsynligheden for at de fire trukne kort indeholder fire forskellige talværdier, er derfor $\frac{183040}{270725} = \frac{2816}{4165}$.

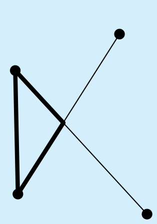
Opgave 1.1.12. Vi betegner vejkrydsene (a, b) så Jonatan står ved $(0,0)$ og skal til $(4,6)$, og det spærrede vejkryds betegnes $(2,3)$. Jonatan skal gå fire gange op og seks gange til højre. Hvis man ser bort fra at det midterste vejkryds er spærret, kan dette gøres på $\binom{10}{4}$ måder. Nu trækker vi antallet af ruter gennem $(2,3)$ fra dette antal. Man kan komme fra $(0,0)$ til $(2,3)$ på $\binom{5}{2}$ måder, og tilsvarende fra $(2,3)$ til $(4,6)$ på $\binom{5}{2}$ måder. Dermed er det samlede antal ruter Jonatan kan vælge imellem, $\binom{10}{4}-\binom{5}{2}^2=210-100=110$.

Opgave 1.1.13. Der er i alt $\binom{10}{3}=120$ forskellige kombinationer af tre bolde. Ud af disse er der ifølge multiplikationsprincippet netop $5\cdot 3\cdot 2=30$ med en bold af hver farve. Dermed er sandsynligheden $\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$.

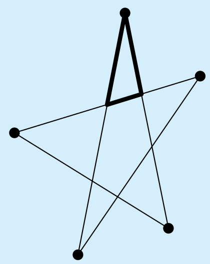
Opgave 1.1.14. Hvilke af de k søjler blandt de n der skal indeholde et tårn, kan vælges på $\binom{n}{k}$ måder. Tilsvarende kan man på $\binom{m}{k}$ vælge hvilke k blandt de m rækker der skal indeholde et tårn. Når man placerer et tårn i den første af de valgte søjler, skal man vælge et felt blandt felterne i de k udvalgte rækker. Når man derefter placerer et tårn i den næste valgte søjle, skal man vælge et felt blandt felterne på de $k-1$ resterende rækker der stadig mangler et tårn, osv. Dermed kan de k tårne placeres på $\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$ måder.

Opgave 1.1.15. i) For hvert par af hjørner er der en diagonal, på nær hvis hjørnerne er nabohjørner. Da der er n par af nabohjørner, er der i alt $\binom{n}{2}-n$ diagonaler.
ii) Hvert skæringspunkt mellem to diagonaler kan på entydig måde repræsenteres ved de fire hjørner som de to diagonaler forbinder. Dermed er der $\binom{n}{4}$ skæringspunkter mellem diagonaler.
iii) Vi tilføjer diagonalerne en efter en for at tælle hvor mange dele der kommer i alt. Til at starte med er der én del. For hver gang man tegner en ny diagonal, opstår der en del mere samt en del mere for hvert skæringspunkt denne diagonal danner med en anden diagonal. Der er $\binom{n}{2}-n$ diagonaler og $\binom{n}{4}$ skæringspunkter mellem diagonaler, dvs. at polygonen deles i $1+\binom{n}{2}-n+\binom{n}{4}$ dele.
iv) Antallet af trekanter der har alle tre hjørner i polygonens hjørner, er $\binom{n}{3}$. Nu tæller vi trekanter der har netop ét hjørne som ikke er et af polygonens hjørner, men et skæringspunkt mellem to diagonaler. For hver skæring mellem to diagonaler opstår der netop fire sådanne trekanter, dvs. der er $4\binom{n}{4}$.

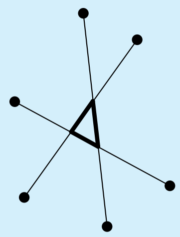
Trekanter som har et af polygonens hjørner samt to skæringer mellem diagonaler som hjørner, opstår ved at man vælger fem punkter, vælger et af punkterne som hjørne og tegner diagonalerne mellem de fem punkter, og der opstår kun én sådan trekant på denne måde, dvs. at der er $5\binom{n}{5}$ sådanne trekanter.



Trekanter med to hjørner tilfælles med polygonen



Trekanter med ét hjørne tilfælles med polygonen



Trekanter som ikke har hjørner tilfælles med polygonen

Trekanter hvis hjørner kun består af skæringer mellem diagonaler, opstår ved at man vælger seks punkter og tegner tre diagonaler mellem dem på en sådan måde at de alle skærer hinanden, og dette kan gøres på netop én måde, dvs. der er $\binom{n}{6}$ af slagsen. I alt er der

$$\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}+5\binom{n}{5}+\binom{n}{6}.$$

Opgave 1.1.16. Med n betegnes det samlede antal sokker, med r antallet af røde sokker. Da sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve er $\frac{1}{2}$, er sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve også $\frac{1}{2}$. Man kan trække to sokker af forskellig farve på $r(n-r)$ måder, og der er i alt $\binom{n}{2}$ måder at trække to sokker på. Altså er

$$\frac{r(n-r)}{\binom{n}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Denne relation mellem n og r er ensbetydende med at

$$4r^2-4nr+(n^2-n)=0,$$

som videre giver

$$r=\frac{n\pm\sqrt{n}}{2}.$$

Den størst mulige værdi for r er derfor givet ved

$$r=\frac{n_0\pm\sqrt{n_0}}{2},$$

hvor n_0 er det størst mulige kvadrattal mindre end eller lig med 1993. Ved udregning ses at $44^2 \leq 1993 < 45^2$. Altså er $n_0 = 44^2$, og dermed fås $r = \frac{44^2+44}{2} = 990$.

Opgave 1.1.17. Man skal gå langs ni sider i enhedskuberne, tre i hver af de tre retninger. Dvs. man kan vælge mellem $\binom{9}{3,3,3} = 1680$ forskellige ruter.

Opgave 1.1.18. Der er $\binom{9}{3,3,3}$ forskellige måder de tre personer kan trække kuglerne på. De får alle en ulige sum netop hvis to af dem trækker to kugler med lige numre. Der er $\binom{3}{2}$ muligheder for at vælge de to personer der skal trække netop to kugler med lige numre. Derefter kan de fire kugler med lige numre fordeles blandt de to personer på $\binom{4}{2}$ måder. Kuglerne med ulige numre kan nu fordeles på $\binom{5}{1,1,3}$ måder så alle har netop tre kugler. Sandsynligheden for at de alle får en ulige sum, er derfor

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{5}{3,1,1}}{\binom{9}{3,3,3}} = \frac{3}{14}.$$

Opgave 1.1.19. Antal måder hvorpå man kan vælge m hold med n deltagere på hver ud af nm personer, er ifølge sætning 1.1.4 $\binom{nm}{m,m,\ldots,m}\frac{(nm)!}{(n!)^m m!}$ hvor $m!$ i nævneren skyldes at de m hold ikke nummereres. Tilsvarende kan man vælge n hold med m deltagere på hver på $\frac{(nm)!}{(m!)^n n!}$ måder. Altså er

$$\frac{(nm)!}{(n!)^m m!} \cdot \frac{(nm)!}{(m!)^n n!} = \frac{((nm)!)^2}{(n!)^{m+1}(m!)^{n+1}}$$

et helt tal for alle positive hele tal n og m, hvilket viser det ønskede.

Opgave 1.2.1. Der er $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ par af venner, og da der sendes 50 julekort, må der være mindst ét par af venner der har udvekslet to julekort ifølge skuffeprincippet. Da ingen sender to julekort til samme ven, må de to have sendt julekort til hinanden.

Opgave 1.2.2. Kvadratet deles op i ni kvadrater med sidelængde $\frac{2}{3}$ og diagonallængde dermed $\frac{\sqrt{8}}{3} < 1$. Ifølge skuffeprincippet må der være to punkter som ligger i samme kvadrat, og afstanden mellem disse to punkter er mindre end 1.

Opgave 1.2.3. Antag at der ikke findes to af de $n+2$ tal som har en differens der er delelig med $2n$. Da har de $n+2$ tal alle forskellige rester ved division med $2n$. De mulige rester ved division med $2n$ er $0,1,2,\ldots,2n-1$. På nær 0 og n kan de parres så hver par har sum $2n$, på denne måde:

$$(1,2n-1),(2,2n-2),\ldots,(n-1,n+1).$$

Nu har vi $n-1$ par af rester og yderligere to rester. Da der er $n+2$ forskellige rester ved division med $2n$ blandt de $n+2$ tal, må der ifølge skuffeprincippet findes et par af rester $(i,2n-i)$ hvor begge rester findes blandt de $n+2$ tal. Altså findes der to tal blandt de $n+2$ tal hvis sum er delelig med $2n$.

Opgave 1.2.4. Der er 100 forskellige placeringer af bordet, hvor der er en forret på hver plads. Lad hver placering repræsentere en skuffe, så vi har 100 skuffer. Hver forret står rigtigt i netop én placering, dvs. der er 100 forretter som vi hver lægger i den skuffe der repræsenterer den placering hvor forretten er på den rigtige plads. Da der i udgangsplaceringen ikke er en eneste forret der står rigtigt, er mindst én af skufferne tom. Altså findes der en skuffe med to forretter, dvs. mindst én placering hvor mindst to forretter er placeret rigtigt.

Opgave 1.2.5. Inddel kvadratet i 50 rektangler med sidelængder 1 og $\frac{1}{50}$. Ifølge skuffeprincippet findes et rektangel med mindst tre røde punkter. Disse tre røde punkter udgør en trekant hvis areal højst er halvdelen af rektanglets areal, dvs. højst $\frac{1}{100}$.

Opgave 1.2.6. Betragt alle gitterpunkterne (x,y) med $1 \leq x \leq n+1$ og $1 \leq y \leq n^{n+1}+1$, hvor x og y er hele tal. Hver række kan farves på n^{n+1} forskellige måder. Ifølge skuffeprincippet findes derfor mindst to rækker der er farvet på samme måde. Da der er n farver og $n+1$ punkter i hver række, findes igen ifølge skuffeprincippet mindst to punkter i samme række med samme farve. I de to rækker der er farvet identisk, findes derfor to punkter af samme farve i den ene række, og sammen med de to tilsvarende punkter i den anden række udgør de hjørnerne i et rektangel.

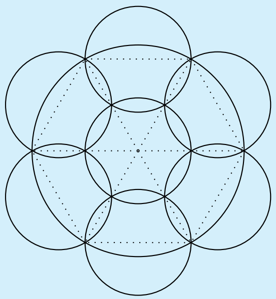
Opgave 1.2.7. Antag at der ikke findes tre drager som tilsammen har alle nøglerne. For hver trio af drager er der så mindst én nøgle de ikke har, og de nøgler de ikke har, må hver af de andre drager have, da fire vilkårlige drager har samtlige nøgler. Dvs. for hver trio af drager findes en unik nøgle som de ikke har, og da der er $\binom{7}{3} = 35$ trioer af drager, må der være mindst 35 forskellige nøgler, men dette er en modstrid da der kun er $3 \cdot 10 = 30$ nøgler.

Opgave 1.2.8. Lad A være en mængde med 23 elementer blandt tallene fra 1 til 1000. Da er summen af elementerne i A mindre end $23 \cdot 1000 = 23000$. Nu laver vi 23000 skuffer nummereret $1, 2, \ldots, 23000$, og hver ikke-tom delmængde af A puttes ned i den skuffe hvis nummer er summen af elementerne i delmængden. Der er $2^{23} - 1$ forskellige ikke-tomme delmængder af A, og da dette tal er langt større end 23000, findes mindst én skuffe med to delmængder som vi kalder B og C. Da mængderne er forskellige, og elementerne i dem har samme sum, er $B_1 = B \setminus C$ og $C_1 = C \setminus B$ to disjunkte ikke-tomme delmængder af A, og summen af elementerne i B_1 er lig summen af elementerne i C_1.

Opgave 1.2.9. For et reelt tal x betegner $\{x\}$ brøkdelen af x, dvs. x minus det største hele tal som ikke er større end x. Fx er $\{2{,}34\} = 0{,}34$ og $\{-2{,}91\} = 0{,}09$. Vi inddeler nu tallinjen fra 0 til 1 i n intervaller af længde $\frac{1}{n}$.

Lad nu M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, være den delmængde af $\{a, 2a, \ldots, (n-1)a\}$ som indeholder netop de elementer hvis brøkdel ligger i det i'te interval på vores tallinje, dvs. i $\left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right]$. Hvis M_1 eller M_n ikke er tom, har vi et tal med den ønskede egenskab. Antag at M_1 og M_n er tomme. Da må en af mængderne $M_2, \ldots, M_{n-1}$ indeholde to elementer, lad os sige ba og ca, hvor $b < c$. Da afstanden mellem $\{ba\}$ og $\{ca\}$ er mindre end $\frac{1}{n}$, må $(c-b)a$ tilhøre enten M_1 eller M_n, hvilket er en modstrid.

Opgave 1.2.10. Cirklen med radius 2 kan dækkes af syv cirkler med radius 1 som vist på figuren. (Overvej hvordan de skal konstrueres.)



Ifølge skuffeprincippet findes derfor en cirkel med radius 1 som indeholder mindst tre punkter.

Opgave 1.3.1. i), ii) og iii) følger direkte af formlen for $\binom{n}{k}$.
iv) Benyt binomialformlen med $x = 1$ og $y = -1$:

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

v) Ved at benytte i) og sætning 1.3.4 fås

$$2\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{2n+1}{i} + \binom{2n+1}{2n+1-i} \right) = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} = 2^{2n+1}.$$

vi) Ved at anvende b) og sætning 1.3.4 fås

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

vii) Da $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$, må p gå op i $\binom{p}{i}$ for $i = 1, 2, \ldots, p-1$ da p er en faktor i tælleren, men ikke i nævneren, og da p er et primtal.

Opgave 1.4.1. Først lægges en kugle i hver boks, og derefter fordeles de resterende $n-m$ kugler frit i de m bokse. Det kan gøres på $\binom{n-m+m-1}{m-1} = \binom{n-1}{m-1}$ måder.

Opgave 1.4.2. I eksempel 1.4.1 så vi at der var 1001 muligheder hvis der ikke var begrænsninger. Fra dette trækker vi antal muligheder hvor vi vælger syv eller flere af de tre slags der kun var seks af, eller otte eller flere af de to slags der kun var syv af. Vi kan vælge syv eller flere af en bestemt slags ved først at vælge syv af slagsen og derefter vælge tre poser frit blandt alle fem slags. Dette kan gøres på $\binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$ måder. Vi kan vælge otte eller flere af en bestemt slags ved først at vælge otte af slagsen og derefter vælge to poser frit blandt alle fem slags. Dette kan gøres på $\binom{2+5-1}{5-1} = \binom{6}{4} = 15$ måder. I alt er der altså $1001 - 3 \cdot 35 - 2 \cdot 15 = 866$ kombinationsmuligheder.

Opgave 1.4.3. Hvis vi lægger de ti 2-kroner på række, er der 11 positioner hvor vi må lægge en 5-krone (en før, ni mellemrum, en efter), og vi skal lægge en 5-krone på netop seks af disse pladser. Dermed er der $\binom{11}{6} = 462$ muligheder.

Opgave 1.4.4. Ifølge sætning 1.4.2 kan man vælge 11 ikke-negative heltal $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ så deres sum er 100, på $\binom{110}{10}$ måder. Det svarer til at vælge 10 ikke-negative heltal $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ hvis sum højst er 100, dvs. dette kan også gøres på $\binom{110}{10}$ måder.

Opgave 1.4.5. Hvis alle skal have mindst fire guldstykker, er der 26 guldstykker tilbage til at fordele frit blandt de seks pirater, og det kan gøres på $\binom{26+6-1}{6-1} = \binom{31}{5}$ måder. For at få det ønskede antal skal vi for hver pirat trække de kombinationer fra hvor hun har fået mere end 25 guldstykker. Hvis vi først giver fem pirater fire guldstykker hver og den sidste 26, er der fire guldstykker tilbage til at fordele frit blandt de seks pirater. Det kan gøres på $\binom{4+6-1}{6-1} = \binom{9}{5}$ måder. Dermed er der samlet $\binom{31}{5} - 6 \cdot \binom{9}{5} = 169.911 - 6 \cdot 126 = 169.155$ kombinationer.

Opgave 1.4.6. Når vi skal tælle hvor mange 12-cifrede tal der opfylder noget bestemt, overvejer vi som sædvanligt om det i stedet er nemmere at tælle hvor mange af tallene der ikke opfylder det. Det er det i dette tilfælde, og derfor viser vi i stedet at sandsynligheden for at trække et tal der ikke indeholder to 1-taller i træk, er $\frac{7}{99}$. Der er $\binom{12}{5,4,3}$ tal i mængden. Nu tæller vi hvor mange af disse der ikke indeholder to 1-taller i træk. De syv cifre der ikke er 1-taller, kan stilles på række på $\binom{7}{3}$ måder da der blandt disse er fire 2-taller og tre 3-taller. Nu skal vi placere de fem 1-taller så der ikke er to ved siden af hinanden. Det svarer netop til at vælge fem af de otte mellemrum mellem de andre syv cifre (der er også et "mellemrum" før og efter), dvs. det kan gøres på $\binom{8}{5}$ måder. Sandsynligheden er derfor

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{8}{5}}{\binom{12}{5,4,3}} = \frac{\frac{7!8!}{3!4!3!5!}}{\frac{12!}{3!4!5!}} = \frac{7!8!}{3!12!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{7}{99}.$$

Opgave 1.4.7. Binære tal har altid 1 som første ciffer. Vi tilføjer nu et 0 til sidst på samtlige binære tal med n cifre da det ikke ændrer antallet af blokke af formen 01. Vi tæller altså nu antallet af binære tal med $n+1$ cifre hvis sidste ciffer er 0, og som har netop m blokke af formen 01. Da disse tal starter med 1, slutter på 0 og indeholder netop m skift fra 0 til 1, må de indeholde $m+1$ skift fra 1 til 0. Der er altså i alt $2m+1$ skift fra 0 til 1 eller 1 til 0. Da der er $n+1$ cifre, er der n mellemrum hvor disse $2m+1$ skift skal ske. Dermed er der $\binom{n}{2m+1}$ binære tal af denne type.

Opgave 1.4.8. Vi tæller alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal. Forestil dig 36 bolde på en lang række som repræsenterer de 36 tal. Vi skal nu vælge syv bolde hvoraf der ikke må være to ved siden af hinanden. Dem farver vi sorte. Dette svarer i virkeligheden til at indsætte syv sorte skillevægge i mellemrummene mellem de 29 ikke-valgte bolde eller foran den første eller efter den sidste ikke-valgte bold, altså at indsætte syv sorte skillevægge på 30 pladser. Dette kan gøres på $\binom{30}{7} = 2.035.800$ måder, og dette er mindre end $\frac{1}{4}$ af 8.347.680.

Opgave 1.4.9. Hvis syv ens ringe skulle fordeles på fem pinde, kunne det gøres på $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$ måder. Vi betragter nu hver af disse muligheder separat. De syv placeringer af ringene nummereres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ og 7. Da de ti ringe har forskellig farve, skal vi beslutte hvilken ring der skal i første position, anden position osv. til og med syvende position, dvs. der er $\frac{10!}{3!}$ måder at fordele farverne på. Ifølge multiplikationsprincippet er der derfor i alt $\binom{11}{4} \cdot \frac{10!}{3!} = \frac{11!10!}{4!7!3!} = 199.584.000$ slutkonfigurationer.

Opgave 1.5.1. Identiteten vises ved at tælle på to måder.

Metode 1: Man kan udtage k elementer blandt $n+m$ elementer på $\binom{n+m}{k}$ måder.

Metode 2: Når man skal udtage k elementer ud af $n+m$, kan man udtage i elementer blandt de første n elementer og derefter $k-i$ blandt de sidste m, og det skal man gøre for hvert $i=0,1,\dots,k$. Dette kan gøres på $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ måder. Dermed er

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Opgave 1.5.2. i) Antal måder at vælge et udvalg med en forperson og en referent ud af n personer tælles på to måder (forperson og referent må gerne være samme person):

Metode 1: Hvis forperson og referent er to forskellige personer, er der $n(n-1)$ måder at vælge dem på. Derefter skal man for hver af de $n-2$ resterende beslutte om de er med i udvalget eller ej. Dette kan gøres på i alt $n(n-1)2^{n-2}$ måder. Hvis forperson og referent er samme person, er der $n2^{n-1}$ måder, dvs. samlet er der $n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$ måder at nedsætte udvalget på.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k^2 måder at vælge forpersonen og referenten på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$.

ii) Antal måder at vælge et udvalg med en forperson, en referent og en kasserer ud af n personer tælles på to måder (forperson, referent og kasserer må gerne være samme person):

Metode 1: Hvis forperson, referent og kasserer er tre forskellige personer, er der $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ måder at nedsætte udvalget på. Hvis forperson, referent og kasserer samlet er to personer, er der $3n(n-1)2^{n-2}$ måder, da vi kan vælge hvilke af de to poster der skal dækkes af samme person, på tre måder, og vi derefter har n valgmuligheder for denne position og $n-1$ for den tredje. Herefter skal vi igen for hver af de resterende personer beslutte om de er med i udvalget eller ej. Hvis forperson, referent og kasserer alle tre er samme person, er der $n2^{n-1}$ måder. Samlet er der

$$\begin{aligned}&n(n-1)(n-2)2^{n-3}+3n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=\\&\big((n^3-3n^2+2n)+(6n^2-6n)+(4n)\big)2^{n-3}=n^2(n+3)2^{n-3}\end{aligned}$$

måder at nedsætte udvalget på.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k^3 måder at vælge forperson, referent og kasserer på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n}k^3\binom{n}{k}$.

Opgave 1.5.3. Ane skal fra gå tre gange mod øst og $n+1$ gange mod nord for at nå floden i det ønskede kryds, dvs. for at komme fra $(0,0)$ til $(3,n+1)$ via vejkrydset $(3,n)$. Det sidste stykke skal hun gå mod nord, da hun ellers har nået floden i et tidligere kryds, derfor skal hun via $(3,n)$. Hun skal altså i løbet af de første $n+3$ gange hun slår plat eller krone, slå tre plat og n krone, mens hun den sidste gang skal slå krone. Sandsynligheden for at hun gør dette, er

$$\binom{n+3}{3}\frac{1}{2^{n+3+1}}.$$

Ane når med sandsynlighed 1 frem til floden på et tidspunkt. Sandsynligheden for at hun når floden i krydset $(k,n+1)$, $k=0,1,2,\dots,n$, er

$$\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}.$$

Da der er symmetri, er sandsynligheden for at nå floden i krydset $(n+1,k)$ den samme. Dermed er

$$1=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{k+n}}.$$

Opgave 1.5.4. For at vise at

$$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{k=1}^{n-r+1}k\binom{n-k}{r-1}$$

tæller vi på en interessant måde hvor mange måder man kan vælge $r+1$ ud af $n+1$ elementer på: Vi tæller nemlig antallet af delmængder med $r+1$ elementer af mængden $\{1,2,\dots,n+1\}$ hvor $k+1$ er det næstmindste element. Hvis $k+1$ er det næstmindste element, kan det mindste element vælges på k måder, og de $r-1$ største elementer på $\binom{(n+1)-(k+1)}{r-1} = \binom{n-k}{r-1}$ måder. De mulige værdier af k er $k = 1,2,\cdots,n-r+1$. Dette viser det ønskede.

Opgave 1.5.5. Når man vælger r tal ud af de n tal $1,2,3,\dots,n$, kan det mindste tal k være $k = 1,2,3,\dots,n-r+1$. Der findes $\binom{n-k}{r-1}$ delmængder hvor mindste elementet er k, dvs. at

$$F(n,r) = \frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}}.$$

Ved at udnytte opgave 1.5.4 fås

$$F(n,r) = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}.$$

Opgave 1.5.6. Antal måder at vælge x, y og z på så $x,y,z \in \{1,2,\dots,n+1\}$, $z > x$ og $z > y$, tælles på to måder:

Metode 1: For $z = k+1$ er der k^2 muligheder for x og y. Samlet kan man altså vælge x, y og z på $1^2+2^2+\cdots+n^2$ måder.

Metode 2: Hvis x og y er forskellige, svarer det til at vælge tre tal ud af $n+1$, sætte det største tal lig z og sætte de to sidste tal lig henholdsvis x og y. Dette kan gøres på $2\binom{n+1}{3}$ måder. Hvis $x = y$ svarer det til at vælge to tal blandt de $n+1$ og sætte z lig det største og x og y lig det mindste. Samlet er der derfor $2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$ kombinationer.

Opgave 1.5.7. Vi tæller antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse. Der er i alt $\frac{b(b-1)}{2}$ par af dommere, og hvert par har højst bedømt k deltagere ens, så $N \le k\frac{b(b-1)}{2}$.

Nu ser vi på en bestemt deltager X og tæller hvor mange par af dommere der har bedømt X ens. Hvis x dommere har ladet X bestå, er der $\frac{x(x-1)}{2}$ par af dommere der har ladet X bestå, og $\frac{(b-x)(b-x-1)}{2}$ par af dommere der har dumpet X. Dermed er der i alt $\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2}$ par af dommere som bedømmer X ens. Nu vurderer vi denne størrelse:

$$\begin{aligned}\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2} &= \frac{2x^2-2bx+b^2-b}{2}\\ &= \left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}-\frac{b}{2} \ge \frac{b^2}{4}-\frac{b}{2}\\ &= \frac{(b-1)^2}{4}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Tallet $\frac{(b-1)^2}{4}$ er et helt tal da b er ulige, så antallet af par af dommere der bedømmer X ens, er mindst $\frac{(b-1)^2}{4}$. Dermed er $N \ge \frac{a(b-1)^2}{4}$. Samlet giver dette at $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$.

Opgave 1.6.1. Ved at anvende eksempel 1.6.1 og sætning 1.3.5 vii) fås

$$\begin{aligned}\binom{2p}{p} &= \binom{p}{0}^2+\binom{p}{1}^2+\cdots+\binom{p}{p-1}^2+\binom{p}{p}^2\\ &\equiv 1+0+\cdots+0+1\\ &\equiv 2 \pmod{p^2}.\end{aligned}$$

Opgave 1.6.2. Ved at benytte sætning 1.3.5 ii) og Vandermonde-identiteten 1.5.1 fås

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k} = n\binom{2n-1}{n} = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Opgave 1.6.3. Antallet af måder først at vælge k ud af n og derefter m af disse k er det samme som først at vælge m ud af n og derefter vælge $k-m$ af de resterende $n-m$. Derfor er

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Ved at omskrive og benytte sætning 1.3.5 iv) fås

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$
$$=\binom{n}{m}(-1)^{2m}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k}\binom{n-m}{k}=0$$

Opgave 1.6.4. Vi viser påstanden ved induktion efter n: Det er nemt at se at udsagnet er sandt for $n=1$. Antag at påstanden er sand for et $n=N$, $N\geq 1$. Ifølge sætning 1.3 er $\binom{m}{r}=\binom{m-1}{r}+\binom{m-1}{r-1}$, og ifølge sætning 1.3.5 ii) er $\frac{1}{m}\binom{m}{k}=\frac{1}{k}\binom{m-1}{k-1}$. Dermed er

$$\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N+1}{k}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k}+\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k}+\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{N+1}\binom{N+1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}+\frac{1}{N+1}\left(\binom{N+1}{0}+\sum_{k=0}^{N+1}(-1)^{k-1}\binom{N+1}{k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}+\frac{1}{N+1}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k},$$

hvor vi i sidste skridt har brugt sætning 1.3.5 iv).

Opgave 1.7.1. Det er nemt at se at $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=4$ og $a_4=7$. Når vi tegner linje nummer n, så skærer den de $n-1$ andre linjer, og disse $n-1$ skæringspunkter deler linjen i n linjestykker der hver gennemskærer et område og deler det i to. Der kommer altså n flere områder end før. Dermed er $a_n=a_{n-1}+n$ og

$$a_n=a_{n-1}+n=a_{n-2}+(n-1)+n=\cdots=a_1+2+3+\cdots+n$$
$$=1+(1+2+\cdots+n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Opgave 1.7.2. Vi løser problemet rekursivt ved først at betragte et 2×1-bræt, og derefter udvide med 2 felter ad gangen. Lad a_n være antallet af måder man kan farve nogle af felterne på et $2\times n$-bræt sorte når to felter med en fælles kant ikke begge må være sorte, og lad b_n være antallet af disse hvor begge de to sidst tilføjede felter er hvide, og c_n være antallet af disse hvor netop ét af de to sidst tilføjede felter er sort. Som start har vi $b_1=1$, $c_1=2$ og $a_1=b_1+c_1=3$. Vi opstiller nu rekursionsformler for b_n og c_n. Der er nemt at se at $b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$, da man altid kan tilføje to hvide felter. Desuden er $c_n=2b_{n-1}+c_{n-1}$, da man kan tilføje to nye felter hvor det ene er sort, på to måder, hvis de to foregående begge er hvide, mens man kun har én mulighed, hvis et af de to foregående felter er sorte. Dermed er

$$a_n=b_n+c_n=3b_{n-1}+2c_{n-1}=2(b_{n-1}+c_{n-1})+(b_{n-2}+c_{n-2})=2a_{n-1}+a_{n-2}.$$

Vi kan nu simpelthen rekursivt beregne a_8 ved først at bemærke at $a_2=7$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	7	17	41	99	239	577	1393

Vi kan altså farve nogle af felterne på et 2×8-bræt sorte så to felter med en fælles kant, ikke begge må være sorte, på 1393 måder.

Opgave 1.7.3. Lad a_n være antallet af måder Georg kan bygge et $1\times 1\times n$-tårn på. Det er trivielt at $a_0=1$ og $a_1=1$. Da der er en slags $1\times 1\times 1$-klods og seks slags $1\times 1\times 2$-klodser, må

$$a_n=a_{n-1}+6a_{n-2}.$$

Da løsningerne til $x^2-x-6=0$ er $r_1=-2$ og $r_2=3$, så er

$$a_n=A(-2)^n+B\cdot 3^n$$

en løsning til rekursionen når A og B opfylder at $A+B=a_0=1$ og $-2A+3B=a_1=1$. Dette giver $A=\frac{2}{5}$ og $B=\frac{3}{5}$, dvs.

$$a_n=\frac{2}{5}\cdot(-2)^n+\frac{3}{5}\cdot 3^n=\frac{1}{5}\left(3^{n+1}-(-2)^{n+1}\right).$$

Opgave 1.7.4. Bemærk først at $a_1=1$ og $a_2=3$. Hvis vi tæller a_n for $n\geq 3$, så ser vi at antallet der slutter med en 1×2-brik i den sidste søjle, må være lig

med a_{n-1} fordi resten af brættet kan udfyldes på a_{n-1} måder. Hvis vi tæller antallet der slutter med to 1×2-brikker vandret i de to sidste søjler, så må der tilsvarende være a_{n-2} af disse, mens antallet der slutter med en 2×2-brik i de sidste to søjler, også er a_{n-2}. Dermed er

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

For at finde en lukket formel for a_n bestemmer vi løsningerne til $x^2 - x - 2 = 0$, som er $r_1 = -1$ og $r_2 = 2$. Dermed er

$$a_n = A\cdot(-1)^n + B\cdot 2^n$$

løsning til rekursionsligningen hvis konstanterne A og B vælges så de opfylder at $a_1 = 1$ og $a_2 = 3$. Vi skal altså bestemme A og B så

$$1 = a_1 = -A + 2B \quad \text{og} \quad 3 = a_2 = A + 4B,$$

og det giver $A = \frac{1}{3}$ og $B = \frac{2}{3}$. Dermed er

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}\cdot 2^n = \frac{1}{3}\big((-1)^n + 2^{n+1}\big).$$

Opgave 1.7.5. Fra opgave 1.7.2 ved vi at

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

og $a_0 = 1$ og $a_1 = 3$. Løsningerne til $x^2 - 2x - 1 = 0$ er $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ og $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. Ifølge sætning 1.7.1 er

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n,$$

hvor $1 = a_0 = A + B$ og $3 = a_1 = (A+B) + \sqrt{2}(A-B)$. Ved at kombinere de to ligninger fås $A = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ og $B = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$, dvs.

$$a_n = \frac{1}{2}\big((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\big).$$

Opgave 1.7.6. Lad S_n være mængden af de n-cifrede tal der kun indeholder cifrene $1,2,3,4,5$, og hvor to på hinanden følgende cifre altid har differens ± 1. Lad A_n være antallet af tal i S_n som slutter på 1 eller 5, lad B_n være antallet af tal fra S_n som slutter på 2 eller 4, og lad C_n være antallet af tal fra S_n som slutter på 3. Vi har $A_1 = 2$, $B_1 = 2$ og $C_1 = 1$. Vi beskriver nu A_n, B_n og C_n rekursivt. Det er nemt at se at $A_n = B_{n-1}$, $B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1}$ og $C_n = B_{n-1}$ for $n > 1$. For $n > 2$ er

$$B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1} = B_{n-2} + 2B_{n-2} = 3B_{n-2}.$$

Da $B_2 = A_1 + 2C_1 = 4$, følger det nu at

$$B_{2n} = 3^{n-1}B_2 = 3^{n-1}\cdot 4 \quad \text{og} \quad B_{2n+1} = 3^n B_1 = 3^n\cdot 2.$$

Dermed er

$$|S_{2n}| = A_{2n} + C_{2n} + B_{2n} = 2B_{2n-1} + 3^{n-1}\cdot 4 = 2\cdot 3^{n-1}\cdot 2 + 3^{n-1}\cdot 4 = 3^{n-1}\cdot 8.$$
$$|S_{2n+1}| = A_{2n+1} + C_{2n+1} + B_{2n+1} = 2B_{2n} + 3^n\cdot 2 = 2\cdot 3^{n-1}\cdot 4 + 3^n\cdot 2 = 3^{n-1}\cdot 14.$$

Opgave 1.7.7. Kald antallet af farvelagte rækker af stole af længde k som starter med en grøn stol, for g_k, og antallet af farvelagte rækker af stole som starter med en rød stol, for r_k. Af symmetrigrunde er $r_k = g_k$ for alle k. Hvis en række starter med en grøn stol, så kan næste stol enten være rød eller grøn. Hvis den er rød, så kan resten af rækken farvelægges på r_{k-1} måder. Hvis den er grøn, så må den tredje stol også være grøn, og derefter kan resten af rækken farves på g_{k-2} måder. Dermed er

$$g_k = r_{k-1} + g_{k-2} = g_{k-1} + g_{k-2}.$$

Det er desuden nemt at se at $g_1 = 1$ og $g_2 = 1$. Altså er g_k lig det n'te Fibonaccital F_k. Det betyder at antallet af måder vi kan farvelægge alle 16 stole, er $r_{16} + g_{16} = 2\cdot F_{16} = 2\cdot 1974$.

Opgave 1.7.8. Bemærk først at $C_1 = 4$ og $C_2 = 15$. Vi kan nu lave en rekursionsligning for C_n. Antallet af måder hvor de to sidste felter ikke begge er røde, er $3C_{n-1}$, da C_{n-1} angiver antallet af måder man kan farve den første $2\times(n-1)$-del af brættet, mens 3 angiver at man kan farve de sidste to felter på 3 måder, så de ikke begge er røde. Her tilføjes oplagt ikke farvninger med røde 2×2-kvadrater. Antallet af måder hvor de to sidste felter begge er røde, er $3C_{n-2}$, da C_{n-2} angiver antallet af måder at farve den første $2\times(n-2)$-del af brættet, mens 3 angiver at man kan farve de næstsidste to felter på 3 måder så de ikke begge er røde, hvilket er nødvendigt for at farve de to sidste røde. Dermed er

$$M_n = 3M_{n-1} + 3M_{n-2}.$$

Vi viser nu ved induktion efter n at $k_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ for ulige n, mens $k_n \geq \frac{n}{2}$ for lige n. Vi ved at $k_1 = 0$ og $k_2 = 1$. Antag nu at det er sandt for alle k_n, $n < N$. For lige $n = N$ med $n = 2m$ må

$$C_{2m} = 3(C_{2m-1} + C_{2m-2}) = 3(3^{m-1} \cdot u + 3^{m-1} \cdot v) = 3^m (u + v),$$

og altså $k_n \geq \frac{n}{2}$. For ulige $n = N$ med $n = 2m+1$ må

$$C_{2m+1} = 3(C_{2m} + C_{2m-1}) = 3(3^m \cdot u + 3^{m-1} \cdot v) = 3^m (3u + v),$$

hvor v ikke er delelig med 3, dvs. $k_{2m+1} = m$. Dette afslutter induktionen. Dermed er $k_{2019} = 1009$.

Opgave 1.7.9. Bemærk først at $A(n,1) = n$. Desuden må

$$A(n,k) = A(n-1,k) + A(n-2,k-1)$$

for $k > 1$ da man kan tage alle k-delmængder af S_{n-1} som opfylder det ønskede, og derefter tage alle $k-1$-delmængder af S_{n-2} og tilføje n. Ved at undersøge små eksempler får man en idé om at $A(n,k) = \binom{n+1-k}{k}$. Dette vises induktivt efter k. Vi har allerede vist formlen for alle n for $k = 1$. Antag at den er sand for alle n for $k-1$. For $n < 2k-1$ er $\binom{n+1-k}{k} = 0$, hvilket passer med at der ikke findes k-delmængder der opfylder det ønskede, når $n < 2k-1$. For $n = 2k-1$ er $\binom{n+1-k}{k} = \binom{k}{k} = 1$, hvilket passer med at der netop er én k-delmængde der opfylder det ønskede, når $n = 2k-1$. Antag nu at formlen er sand for alle $1 \leq n < N$ for dette k. Da giver sætning 1.3.1 at

$$A(N,k) = A(N-1,k) + A(N-2,k-1) = \binom{N-k}{k} + \binom{N-k}{k-1} = \binom{N+1-k}{k}$$

som ønsket. Dette afslutter induktionen.

Opgave 1.7.10. Alma kan vælge r bokse på $\binom{n}{r}$ måder og r låg på $\binom{n}{r}$ måder, og hun kan derefter sætte de r bokse og r låg sammen i par på $r!$ måder. Altså er $A(n,r) = \binom{n}{r}^2 \cdot r!$ ifølge multiplikationsprincippet. Specielt er $A(n,1) = n^2$ og $A(2,2) = 2$.

Nu ser vi på Berthas bokse og låg. Boksen b_i kan parres med $2i-1$ låg, dvs.

$$B(n,1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - n = (n+1)n - n = n^2.$$

Desuden er $B(2,2) = 2$. Nu beskriver vi $B(n,r)$ rekursivt:

$$\begin{aligned} B(n,r) &= B(n-1,r) + B(n-1,r-1)((2n-1)-(r-1)) \\ &= B(n-1,r) + B(n-1,r-1)(2n-r). \end{aligned}$$

Denne formel fås ved at først at tælle på hvor mange måder de r par kan vælges hvis boksen b_n ikke er med i nogen af de r par, og det er netop $B(n-1,r)$. Derefter tæller vi på hvor mange måder de r par kan vælges hvis boksen b_n er med: Først vælges $r-1$ par hvor den ikke er med. Derefter skal vi vælge et låg til den. Boksen b_n kan parres med alle $2n-1$ låg, men $r-1$ af dem er allerede taget. Det giver $B(n-1,r-1)((2n-1)-(r-1))$.

For at vise at $A(n,r) = B(n,r)$, viser vi at de opfylder samme rekursionsligning. Vi har vist at $A(n,1) = B(n,1)$ for alle n, og at $A(2,2) = B(2,2)$. Hvis blot vi kan vise at $A(n,r) = A(n-1,r) + A(n-1,r-1)(2n-r)$, er vi færdige. Det kan nemt vises ved at sætte den lukkede formel for $A(n,r)$ ind og tjekke at det passer, men man kan faktisk også argumentere uden brug af formlen:

Hvis vi skal tælle antal måder Alma kan vælge r par af bokse og låg, så tæller vi først alle dem hvor boksen b og låget l ikke er med. Dem er der $A(n-1,r)$ af. Derefter tæller vi alle dem hvor boksen b er med: Der er n muligheder for at vælge et låg til den, og derefter kan de $r-1$ sidste par vælges på $A(n-1,r-1)$ måder, dvs. i alt $A(n-1,r-1) \cdot n$. Nu tæller vi alle dem hvor boksen b ikke er med, men hvor låget l er med: Først vælges $r-1$ par der ikke indeholder b og l, og det kan gøres på $A(n-1,r-1)$ måder. Nu skal vi vælge en boks til l. Der er $r-1$ som er optaget, og vi må desuden ikke vælge b, dvs. der er $n-r$ muligheder. Der er altså $A(n-1,r-1)(n-r)$ måder at vælge de r par sådan at b ikke er med, og l er med. Samlet fås $A(n,r) = A(n-1,r) + A(n-1,r-1)(2n-r)$ som ønsket.

Opgave 1.8.1. Lad A_i være den delmængde af $M = \{1,2,\ldots,1000\}$ som indeholder alle tal fra M hvor i går op, $i = 3,5,7$. Antal tal S i M som hverken er

delelige med 3, 5 eller 7, er da

$$
\begin{aligned}
S &= |M| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7| \\
&= 1000 - \Big(|A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7|\Big) \\
&= 1000 - \Big(333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9\Big) = 457.
\end{aligned}
$$

Opgave 1.8.2. Kald mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_4c_5c_6$, for A, mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_5c_6c_7$, for B, og mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_6c_7c_8$, for C. Et telefonnummer tilhører $A \cap B$ netop hvis $c_4 = c_1 = c_5 = c_2 = c_6 = c_3 = c_7$, et telefonnummer tilhører $B \cap C$ netop hvis $c_5 = c_1 = c_6 = c_2 = c_7 = c_3 = c_8$, et telefonnummer tilhører $A \cap C$ netop hvis $c_4 = c_1 = c_6 = c_3 = c_8$ og $c_5 = c_2 = c_7$, og et telefonnummer tilhører $A \cap B \cap C$ netop hvis alle cifre er identiske. Ifølge PIE er

$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= 10^5 + 10^5 + 10^5 - 10^2 - 10^2 - 10^2 + 10 \\
&= 300.000 - 300 + 10 \\
&= 299.710.
\end{aligned}
$$

Telefonselskabet har derfor 299.710 numre.

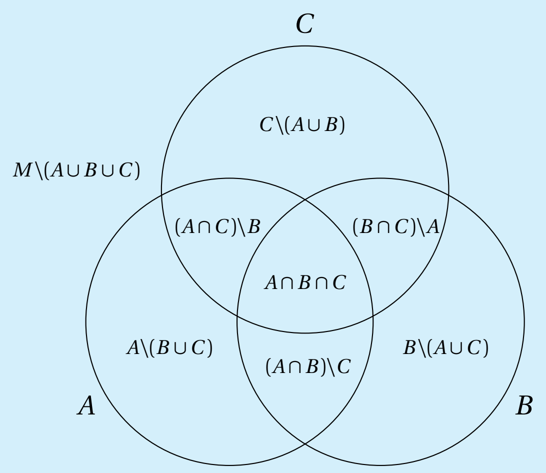
Opgave 1.8.3. Kald de fire kulører $1, 2, 3, 4$, og lad A_i være mængden af kombinationer af syv kort blandt de 52 så den i'te kulør ikke er repræsenteret. Der er i alt $\binom{52}{7}$ måder at vælge de syv kort på. Antallet T af måder at trække syv kort så der er mindst et kort af hver kulør, er dermed ifølge PIE

$$
\begin{aligned}
T &= \binom{52}{7} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&= \binom{52}{7} - \left(\sum_{1 \le i \le 4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cup A_2 \cap A_3 \cap A_4|\right) \\
&= \binom{52}{7} - 4\binom{39}{7} + 6\binom{26}{7} - 4\binom{13}{7} + 1 \cdot \binom{0}{7}.
\end{aligned}
$$

Opgave 1.8.4. Der er i alt 8! måder at stille de otte personer op på en række. Nummerér de fire par $1, 2, 3, 4$, og lad A_i være mængden af rækkefølger hvor par nummer i står ved siden af hinanden. Da er $|A_i| = 2 \cdot 7!$, da der 7! måder at stille parret og de seks andre i rækkefølge, og man desuden ved hver kombination skal vælge i hvilken rækkefølge de to personer i parret skal stå. Desuden er $|A_i \cap A_j| = 2^2 \cdot 6!$, $i \neq j$, osv. efter samme princip. Dermed er antallet af måder T hvorpå de otte personer kan stilles på en række så ingen af de fire par står ved siden af hinanden

$$
\begin{aligned}
T &= 8! - \left(\sum_{1 \le i \le 4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\right) \\
&= 8! - \left(4 \cdot 2 \cdot 7! - 6 \cdot 2^2 \cdot 6! + 4 \cdot 2^3 \cdot 5! - 2^4 \cdot 4!\right) \\
&= 13.824.
\end{aligned}
$$

Opgave 1.8.5. Lad S være mængden af tripler af delmængder (A, B, C) hvor A, B og C er delmængder af mængden M så $A \cap B \cap C = \emptyset$. Vi beregner først antallet af elementer i S. Ved at tegne et Venn-diagram kan man se at hvert af de n elementer skal ligge i netop én af følgende syv disjunkte mængder: $M\backslash(A \cup B \cup C)$, $A\backslash(B \cup C)$, $B\backslash(A \cup C)$, $C\backslash(A \cup B)$, $(A \cap B)\backslash C$, $(A \cap C)\backslash B$ og $(B \cap C)\backslash A$.



Dvs. der er 7^n tripler af delmængder (A, B, C) hvor $A \cap B \cap C = \emptyset$. Herfra skal vi trække alle dem hvor enten $A \cap B$, $A \cap C$ eller $B \cap C$ er tom. Lad $X \subseteq S$

være mængden af tripler (A,B,C) hvor $A\cap B=\emptyset$, $Y\subseteq S$ være mængden af tripler (A,B,C) hvor $A\cap C=\emptyset$, og $Z\subseteq S$ være mængden af tripler (A,B,C) hvor $B\cap C=\emptyset$. Vi ønsker at beregne $|X\cup Y\cup Z|$, da $|S|-|X\cup Y\cup Z|$ er det antal vi søger. Ifølge PIE er

$$|X\cup Y\cup Z|=|X|+|Y|+|Z|-|X\cap Y|-|X\cap Z|-|Y\cap Z|+|X\cap Y\cap Z|.$$

Elementerne i X er dem hvor ingen af de n elementer tilhører $(A\cap B)\setminus C$, men netop én af de øvrige seks disjunkte mængder ovenfor, dvs. at $|X|=6^n$. Tilsvarende er $|Y|=|Z|=6^n$. Elementerne i $X\cap Y$ er dem hvor ingen af de n elementer tilhører $(A\cap B)\setminus C$ eller $(A\cap C)\setminus B$, men netop én af de øvrige fem disjunkte mængder ovenfor, dvs. at $|X\cap Y|=5^n$. Tilsvarende er $|X\cap Z|=|Y\cap Z|=5^n$. Elementerne i $X\cap Y\cap Z$ er dem hvor hvert af de n elementer tilhører netop én af følgende fire disjunkte mængder: $M\setminus(A\cup B\cup C)$, $A\setminus(B\cup C)$, $B\setminus(A\cup C)$ og $C\setminus(A\cup B)$, dvs. at $|X\cap Y\cap Z|=4^n$. I alt er der

$$|S|-|X\cup Y\cup Z|=7^n-3\cdot 6^n+3\cdot 5^n-4^n$$

kombinationer.

Opgave 1.8.6. Betragt mængden

$$S=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|x_j\in\{1,2,3,\dots,n+k\}\}.$$

Lad A_i, $i=1,2,\dots,n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt $x_1,x_2,\dots,x_n$. Antallet af elementer i S som ikke ligger i $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, er $n!$, da disse elementer netop er dem hvor $x_1,x_2,\dots,x_n$ er samtlige tal $1,2,\dots,n$ i en eller anden rækkefølge. Dermed er

$$n!=|S|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$n!=|S|-\Big(\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\ -\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|\Big).$$

Antal elementer i S er $(n+k)^n$. Antallet af elementer i fællesmængden af r af delmængderne $A_1,A_2,\dots,A_n$ er $(n+k-r)^n$ da $x_1,x_2,\dots,x_n$ skal vælges blandt $n+k-r$ tal. Desuden er der $\binom{n}{r}$ måder at vælge de r delmængder på. Dette giver netop

$$n!=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n+k-i)^n$$

Opgave 1.8.7. Lad A_k, $k=1,2,\cdots,n$, være mængden af permutationer σ hvor der findes et i så $\sigma(i)=k$ og $\sigma(i+1)=k+n$ eller $\sigma(i)=k+n$ og $\sigma(i+1)=k$. Lad A være mængden af permutationer med egenskaben P. Da er

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

PIE giver dermed at

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|.$$

Hvis vi blot ser på de første to led på højresiden, er et element fra A som ligger i m af delmængderne $A_1,A_2,\dots,A_n$, talt med

$$m-\binom{m}{2}=m-\frac{m(m-1)}{2}\le 1$$

gange, dvs. at

$$|A|\ge\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|.$$

Desuden er $|A_k|=(2n-1)2(2n-2)!=2(2n-1)!$ og $|A_k\cap A_l|=(2n-2)!2^2$. Det sidste ses på følgende måde. Vi skal vælge to elementer $i,j\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$ så i og $i+1$ afbildes i k og $k+n$, og j og $j+1$ afbildes i l og $l+n$. Dette kan gøres på

$$(2n-1)(2n-2)-2(2n-2)=(2n-3)(2n-2)$$

måder da vi ikke må vælge i og j som to på hinanden følgende tal. Desuden skal vi vælge om i skal afbildes i k eller $k+n$, og om j skal afbildes i l eller $n+l$. Dette kan gøres på 2^2 måder. For de resterende $2n-4$ elementer er der $(2n-4)!$ muligheder. Dermed er

$$|A| \geq \binom{n}{1} 2(2n-1)! - \binom{n}{2}(2n-2)! 2^2 = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2} = \frac{|S_{2n}|}{2}.$$

Stikordsregister