1 Induktionsbeviser

Sætninger der udtaler sig om hvad der gælder for alle positive heltal $n \in \mathbb{N}$, kan undertiden bevises ved *induktion*.

Idéen bag induktionsbeviser er enkel: i stedet for at bevise sætningen for hvert enkelt n for sig fra en ende af (hvorved man jo skulle igennem uendelig mange beviser før man havde klaret alle de positive hele tal), beviser man bare to ting: i) at påstanden gælder for $n = 1$, og ii) at man altid kan komme videre, dvs. at det for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at hvis påstanden er sand for n, så er den også sand for $n+1$. Vi kalder ofte den påstand vi gerne vil bevise, for $q(n)$, hvor $q(1)$ er påstanden for $n = 1$, $q(2)$ er påstanden for $n = 2$, osv.

At dette faktisk er en gyldig bevistype, er egentlig et aksiom, *induktionsaksiomet*, som er en del af fundamentet for den matematik vi beskæftiger os med til daglig.

Induktionsaksiomet 1.1. Påstanden $q(n)$ er sand for alle positive hele tal n, hvis

i) Påstanden $q(1)$ er sand. Dette kaldes *induktionens start*.

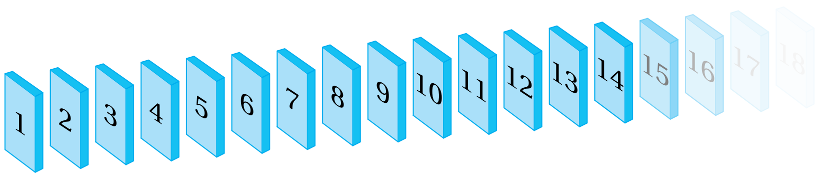
ii) For alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at hvis påstanden $q(n)$ er sand, da er påstanden $q(n+1)$ også sand, dvs. $q(n) \Rightarrow q(n+1)$. Dette kaldes *induktionsskridtet*.

Induktionsskridtet "$q(n) \Rightarrow q(n+1)$" fortæller at

$$q(1) \Rightarrow q(2) \Rightarrow q(3) \Rightarrow q(4) \Rightarrow q(5) \Rightarrow q(6) \Rightarrow q(7) \Rightarrow q(8) \Rightarrow \cdots$$

Hvis man yderligere har vist at $q(1)$ er sand, så følger det at $q(2)$ er sand, og dermed et $q(3)$ er sand, osv., så $q(n)$ er sand for alle positive heltal n.

Man kan forestille sig påstandene $q(1)$, $q(2)$, $q(3)$ osv. stillet op på en uendelig række som dominobrikker:



Når man viser at *induktionens start*, altså at $q(1)$ er sand, så vælter den første dominobrik da det symboliserer at $q(1)$ er sand. Når man viser *induktionsskridtet*, dvs. at $q(n) \Rightarrow q(n+1)$, så svarer det til at vise at hvis en dominobrik i rækken vælter, så vælter den næste også. Samlet betyder det jo at alle dominobrikkerne vælter, og påstandene derfor alle er sande.

For at vise hvordan et induktionsbevis typisk forløber, ser vi på vi følgende sætning.

Sætning 1.2. For alle positive hele tal $n \in \mathbb{N}$ gælder påstanden

$$q(n): \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bevis. Vi beviser sætningen ved induktion. Påstanden $q(1)$ lyder $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, og den er sandt. Hermed har vi *induktionens start* på plads.

Vi skal nu vise *induktionsskridtet*, dvs. at hvis

$$q(n): \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

er sand, da er

$$q(n+1): \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3))}{6}$$

også sand. Vi antager derfor at $q(n)$ er sand, og udnytter det til at vise $q(n+1)$:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Hermed har vi bevist at $q(n+1)$ er sand hvis $q(n)$ er sand, dvs. at *induktionsskridtet* er fuldført. Altså er sætningen bevist. □

Løs følgende opgaver ved induktion. Mange af dem kan løses på flere andre måder end ved induktion, men her skal du benytte induktion.

Opgave 1.1. Bevis at

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Opgave 1.2. Bevis at

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Opgave 1.3. Lad $a\neq 1$ være et reelt tal. Bevis at

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Opgave 1.4. Bevis at

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Opgave 1.5. Gæt en formel for summen af de første n kubiktal

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

Prøv dig frem med små værdier, og se om du kan se et system. Bevis derefter formlen. *Hint*: 3

Opgave 1.6. Dag 1 om morgenen anbringes en abe på det nederste trin af en uendelig høj stige. Hver dag klatrer aben først op til trinnet dobbelt så højt oppe som det trin den startede på om morgenen, og derpå yderligere et trin op. På hvilket trin befinder aben sig om morgenen den n'te dag?

Opgave 1.7. Lad n være et positivt heltal. Georg har 3^n mønter der alle vejer det samme, pånær en enkelt falsk mønt der vejer mindre end de andre. Georg har desuden en gammeldags vægt med to vægtskåle der i én vejning kan vise om indholdet af den ene vægtskål vejer mere, mindre eller det samme som indholdet af den anden vægtskål. Bevis at Georg altid kan finde den falske mønt ved højst n vejninger. *Hint*: 2

Induktionsstarten behøver ikke være $n=1$, men kan sagtens være et andet helt tal n.

Opgave 1.8. Lad $n\geq 5$ være et helt tal. Bevis at $2^n>n^2$.

Opgave 1.9. Lad $n\geq 3$ være et helt tal. Bevis at vinkelsummen i en n-kant er $(n-2)\cdot 180°$.

Somme tider kan induktion bruges i opgaver der som udgangspunkt slet ikke handler om alle de positive heltal. De følgende opgaver bliver faktisk lettere hvis man gætter på at påstanden nok holder for alle positive heltal, og derefter går efter at bevise dette mere generelle resultat.

Opgave 1.10. Lad a være et tal med den egenskab at tallet

$$a+\frac{1}{a}$$

er et helt tal. Bevis at også

$$a^{19}+\frac{1}{a^{19}}$$

er et helt tal. *Hint*: 1 5

Opgave 1.11. I et firma med 107 ansatte overvåger man hinanden på følgende måde: For ethvert par af ansatte gælder at enten overvåger den ene den anden, eller også overvåger den anden den ene. Bevis at der findes en ansat P med den egenskab at enhver anden person enten overvåger P eller overvåger en person der overvåger P. *Hint*: 4

2 Hints

1. Bevis påstanden for alle heltal n og ikke blot for $n = 19$.
2. Induktionsskridtet: Inddel mønterne i tre lige store bunker.
3. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
4. Bevis påstanden for alle heltal n og ikke blot for $n = 107$.
5. Se på $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)$.

3 Løsninger

Opgave 1.1. Vi skal ved induktion bevise påstanden

$$q(n): \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $1=\frac{1(1+1)}{2}$, hvilket er sandt.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Så er

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\&=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n\in\mathbb{N}$.

Opgave 1.2. Vi skal ved induktion bevise påstanden

$$q(n): \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $1=1^2$, hvilket er sandt.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Så er

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2,$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n\in\mathbb{N}$.

Opgave 1.3. Vi skal ved induktion bevise at der for ethvert reelt tal $a\neq 1$ gælder at

$$q(n): \quad 1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $1+a=\frac{1-a^2}{1-a}$, hvilket er sandt da $1-a^2=(1+a)(1-a)$.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Så er

$$\begin{aligned}1+a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}&=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+a^{n+1}\\&=\frac{1-a^{n+1}+(1-a)a^{n+1}}{1-a}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a},\end{aligned}$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n\in\mathbb{N}$.

Opgave 1.4. Vi skal ved induktion bevise påstanden

$$q(n): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, hvilket er sandt.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Så er

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2},\end{aligned}$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 1.5. Vi skal gætte og ved induktion bevise en formel for summen af de første n kubiktal. For de første værdier af n har vi $1^3 = 1$, $1^3+2^3 = 9$, $1^3+2^3+3^3 = 36$, $1^3+2^3+3^3+4^3 = 100$. Vi genkender kvadrattallene på højre side og gætter ud fra dette på at

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ved at benytte formlen fra opgave 1.1 kan dette skrives

$$q(n): \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Denne formel beviser vi nu ved induktion.

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$, hvilket er sandt.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Så er

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2\big(n^2+4(n+1)\big)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},\end{aligned}$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 1.6. Vi skal finde et udtryk for nummeret på det trin a_n som aben befinder sig på om morgenen den n'te dag. Betingelserne viser at $a_1 = 1$, og generelt at $a_{n+1} = 2a_n + 1$ for alle positive heltal n. Da $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$, gætter vi på at $a_n = 2^n - 1$. Dette gæt kan vi bevise ved induktion. Vi kalder påstanden $a_n = 2^n - 1$ for $q(n)$.

Induktionens start: For $n = 1$ har vi allerede set at formlen passer.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at $a_n = 2^n - 1$. Så er

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1 = 2 \cdot \big(2^n - 1\big) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1,$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 1.7. Vi kalder påstanden at Georg kan identificere den falske mønt i n vejninger, for $q(n)$. Påstanden bevises ved induktion efter n.

Induktionens start: Når $n = 1$, har Georg $3^1 = 3$ mønter. Hvis han lægger én mønt i hver vægtskål, så kan han afgøre hvilken der er den falske mønt: Hvis de vejer lige meget, er det den tredje mønt der er falsk, og hvis den ene er lettere end den anden, så er det mønten i den lette vægtskål der er falsk. Altså er $q(1)$ sand.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at Georg kan udpege den falske mønt blandt 3^n mønter med n vejninger. Georg har nu 3^{n+1} mønter og deler dem i tre bunker med 3^n mønter i hver. Nu lægger han den første bunke på den ene vægtskål og den anden bunke på den anden vægtskål. Hvis bunkerne vejer lige meget, ved han at den falske mønt skal findes i den sidste bunke, og hvis den ene er lettere end den anden, så ved han at mønten skal findes i den letteste bunke. Georg har dermed ved én vejning afgjort hvilken bunke den falske mønt er i. Ifølge induktionsantagelsen kan han ved yderligere n vejninger afgøre hvilken mønt der er falsk, dvs. med 3^{n+1} mønter kan han med samlet $n+1$ vejninger finde den falske mønt. Ved induktion følger nu at påstanden er sand for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 1.8. Vi beviser ved induktion efter n at $2^n > n^2$ for alle $n \geq 5$. Kald påstanden for $q(n)$.

Induktionens start: Påstanden $q(5)$ er sand da $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand for et positivt heltal $n \geq 5$, dvs. at $2^n > n^2$. Da er

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 5n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Dette viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle heltal $n \geq 5$.

Opgave 1.9. Vi beviser ved induktion at vinkelsummen i en n-kant, $n \geq 3$, er $(n-2)\cdot 180°$. Kald påstanden for $q(n)$.

Induktionens start: Påstanden $q(3)$ er sand da vinkelsummen i en trekant er $180°$.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand for et positivt heltal $n \geq 3$, dvs. at vinkelsummen i en n-kant er $(n-2)\cdot 180°$. Betragt en $(n+1)$-kant. Den kan opdeles i en trekant og en n-kant. Vinkelsummen bliver derved summen af vinkelsummen i trekanten og i n-kanten, dvs. vinkelsummen i $n+1$-kanten er

$$180° + (n-2)\cdot 180° = \big((n+1)-2\big)\cdot 180°.$$

Dette viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle heltal $n \geq 3$.

Opgave 1.10. Lad a være et tal med den egenskab at tallet $a + \frac{1}{a}$ er et helt tal. Vi skal bevise at så er også $a^{19} + \frac{1}{a^{19}}$ et helt tal. Vi vil ved induktion bevise den mere generelle påstand

$$q(n): \quad a^n + \frac{1}{a^n} \text{ er et helt tal}$$

for alle positive heltal n.

Induktionens start: I induktionsskridtet har vi brug for at påstanden gælder for to på hinanden følgende hele tal. Derfor skal vi i induktionsstarten vise at påstanden er sand for både $n = 1$ og $n = 2$. Påstanden $q(1)$ er ifølge den grundlæggende antagelse sand. For at vise at $q(2)$ er sand, bemærker vi først at $a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ må være et et heltal. Dette betyder at også $a^2 + \frac{1}{a^2}$ er et helt tal, og altså at $q(2)$ er sand.

Induktionsskridtet: Antag at $q(k)$ er sand for alle positive heltal $k \leq n$, hvor $n \geq 2$. Nu er

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) = a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} + a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}.$$

Da venstresiden er et produkt af hele tal, og da $a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}$ er et heltal ifølge induktionsantagelsen, må også $a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}$ være et helt tal. Hermed er påstanden bevist.

Opgave 1.11. Vi beviser den mere generelle påstand $q(n)$: I et firma med $n \in \mathbb{N}$ ansatte hvor der for hvert par af ansatte gælder at den ene overvåger den anden, findes en ansat P med den egenskab at enhver anden person enten overvåger P eller overvåger en person der overvåger P. Påstanden vises ved induktion efter n.

Induktionens start: Hvis der kun er $n = 1$ ansat, er påstanden triviel.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand. Betragt et firma med $n+1$ ansatte hvor der for hvert par af ansatte gælder at den ene overvåger den anden. Lad X være en tilfældig ansat, og betragt de resterende n ansatte. Vi ved fra induktionsantagelsen at da findes blandt de resterende n ansatte en ansat P med den egenskab at enhver anden ansat fraregnet X enten overvåger P eller overvåger en person der overvåger P. Hvis X overvåger P eller en ansat der overvåger P, så har P den ønskede egenskab. Antag derfor at dette ikke er tilfældet. Da må P og alle ansatte der overvåger P, altså overvåge X. Vi vil vise at i denne situation har X den ønskede egenskab. Betragt en ansat Y der ikke overvåger P. Da ved vi at Y overvåger en ansat Z som overvåger P, og at denne ansatte Z derfor overvåger X. Dermed har X den egenskab at enhver anden person enten overvåger X eller overvåger en person der overvåger X. Dette fuldfører induktionen.