1 Grafteori

Dette er en introduktion til de vigtigste begreber i grafteori, udvalgt teori samt eksempler på opgavetyper inden for emnet med fokus på de opgavetyper der typisk forekommer til internationale matematikkonkurrencer.

Langt de fleste grafteoriopgaver til matematikkonkurrencer er ikke formuleret med grafteori, så første skridt er ofte at formulere opgaven med grafteoretiske termer. I nogle opgaver er det ret oplagt, mens det i andre er ret svært. Man kan tænke på grafteori som en struktur der gør det muligt at gå mere teoretisk til mange problemstillinger, og som hjælper med at skabe overblik over dem.

Indhold

1.1 Grafer

Vi starter med en masse definitioner som det er vigtigt at få styr på.

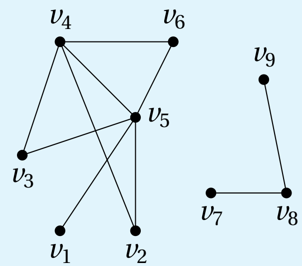
Definition af graf, knude, kant, nabo og valens

En *graf* er et par af mængder $G = (V, E)$, hvor V er en ikke-tom endelig mængde af *knuder*, og E er en mængde af *kanter* så hver kant forbinder to knuder fra V med hinanden (eller evt. forbinder en knude med sig selv). Hvis $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, så betegner $v_i v_j$ den kant som forbinder v_i og v_j.

To knuder kaldes *naboer* eller *naboknuder* hvis der findes en kant som forbinder dem.

En knudes *valens* er antallet af kanter der udgår fra knuden, dog tæller en kant der går fra knuden til knuden selv, dobbelt. Valensen af en knude v betegnes $d(v)$. Den maksimale valens af en knude i grafen betegnes Δ og den minimale valens δ.

Graf med 9 knuder og 10 kanter:



Naboknuder:
v_7 og v_8 er naboknuder.
v_1 og v_2 er ikke naboknuder.

Valens:
Den minimale valens er $\delta = 1$.
Den maksimale valens er $\Delta = 5$.

graf *graph*
knude, knuder *vertex, vertices*
kant *edge*
naboknude *neighbour*
valens *degree*

Opgave 1.1.1. Vis at antallet af knuder med ulige valens er lige.

Opgave 1.1.2. Til en fest er der n personer hvoraf nogle er venner. Venskab er gensidigt. Vis at der findes to personer som har lige mange venner til festen.

Opgave 1.1.3. Der er $2n$ personer til en fest, og hver person er ven med et lige antal personer til festen. Venskab er gensidigt. Vis at der findes to personer som har et lige antal fælles venner til festen. *Hint*: 16

Eksempel 1.1.1. Vælg knude med maksimal valens

I en børnehave er der en masse børn og en masse puslespil. Hvert barn har lagt mindst ét puslespil, men ikke alle, og hvert puslespil er lagt af mindst ét barn, men ikke af alle. Vi ønsker at vise at der findes to børn og to puslespil sådan at de to børn hver har lagt præcis ét af de to puslespil og ikke det samme.

For at vise dette ved hjælp af grafteori identificerer vi først børnene og puslespillene med knuder i en graf, og lader to knuder være naboer hvis den ene repræsenterer et puslespil, og den anden repræsenterer et barn som har lagt puslespillet. Idéen er nu at vælge en barneknude b_1 med maksimal valens blandt barneknuderne. Da intet barn har lagt alle puslespil, findes en puslespilsknude p_2 som ikke er nabo til b_1. Vælg nu en barneknude b_2 som er nabo til denne puslespilsknude. Da b_1 havde maksimal valens blandt barneknuderne, findes en puslespilsknude p_1 som er nabo til b_1, men ikke til b_2.

Altså findes der to børn og to puslespil sådan at de to børn hver har lagt præcis ét af de to puslespil og ikke det samme.

Opgave 1.1.4. I Greifswald er der tre skoler A, B og C hvor der på hver går mindst en elev. For hvert valg af tre elever, en fra A, en fra B og en fra C, er der to som kender hinanden, og to som ikke kender hinanden. Vis at mindst et af følgende udsagn er sandt:

- Der er en elev fra A som kender alle elever fra B.
- Der er en elev fra B som kender alle elever fra C.
- Der er en elev fra C som kender alle elever fra A.

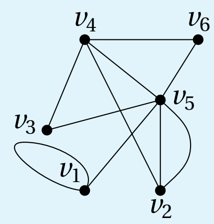
(BW 2011) *Hint*: 3

Definition af simpel graf

En graf kaldes *simpel* hvis der ikke findes kanter som forbinder en knude med sig selv, og der ikke findes to kanter som forbinder samme par af knuder.

Bemærk at hvis en graf ikke er simpel og fx indeholder to kanter mellem v_2 og v_5, så kan man ikke bruge betegnelsen $v_2 v_5$ om disse kanter da den ikke er entydig.

Ikke-simpel graf:



v_1 er forbundet til sig selv.

v_2 og v_5 er forbundet med to kanter.

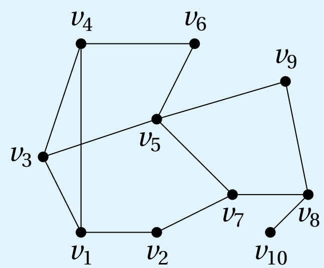
simpel graf *simple graph*

Definition af tur, sti og kreds/cykel

En *tur* af længde l er en følge af l forskellige kanter $v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, \ldots, v_l v_{l+1}$. Navnet kommer af at man kan gå denne *tur* i grafen. Turen angives ofte blot ved knuderne den går igennem: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{l+1}$. (Hvis grafen ikke er simpel, kan det være nødvendigt med andre betegnelser for turen).

En *sti* af længde l er en tur af længde l hvor alle knuderne er forskellige.

En *kreds* af længde l er en tur af længde l hvor første og sidste knude er identiske, mens alle andre knuder er forskellige. En kreds kaldes også en *cykel*.



En tur af længde 10:
$v_1, v_2, v_7, v_8, v_9, v_5, v_6, v_4, v_3, v_5, v_7$.

En sti af længde 8:
$v_1, v_2, v_7, v_8, v_9, v_5, v_6, v_4, v_3$.

En kreds/cykel af længde 7:
$v_1, v_2, v_7, v_8, v_9, v_5, v_3, v_1$.

tur *trail*
sti *path*
kreds/cykel *cycle*

Sætning 1.1.1. Kreds

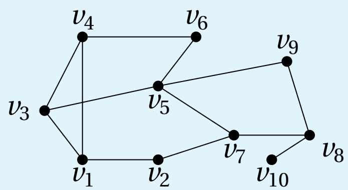
Lad G være en simpel graf, og antag at $\delta \geq 2$. Da indeholder G en kreds af længde mindst $\delta + 1$.

Bevis. Først vælger vi en tilfældig knude v_1, derefter en nabo v_2 til v_1, en nabo v_3 til v_2, osv. indtil dette ikke længere er muligt, så alle knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_s$ er forskellige. Da v_s har mindst δ naboer, og disse alle må være blandt knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}$ da det ikke er muligt at komme videre, kan vi konstruere en kreds ved at vælge den nabo til v_s som har det mindste indeks. Hvis dette indeks kaldes i, er $v_i v_{i+1}, \ldots, v_s v_i$ en kreds af længde mindst $\delta + 1$. □

Definition af sammenhængende graf og sammenhængskomponent

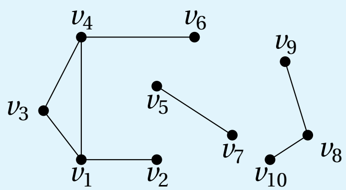
En graf kaldes *sammenhængende* hvis der mellem vilkårlige to knuder findes en sti fra den ene til den anden.

Sammenhængende graf:



En *sammenhængskomponent* er en delgraf som består af alle knuder som er forbundet med en sti til en given knude, samt alle kanter mellem disse knuder.

Usammenhængende graf, der består af tre sammenhængskomponenter:



sammenhængende graf *connected graph*
sammenhængskomponent *connected component*

Sætning 1.1.2. Sti

Lad G være en simpel sammenhængende graf med n knuder. Da findes en sti af længde mindst $\min(2\delta, n-1)$.

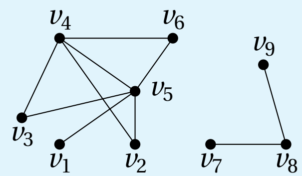
Opgave 1.1.5. Bevis sætning 1.1.2. *Hint*: 12

Opgave 1.1.6. I et land er hvert par af byer forbundet med en direkte togrute eller en direkte busrute. Vis at det er muligt at inddele landet i to disjunkte inddele sådan at alle byer i den ene del kan nummereres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ så der findes en busrute mellem to byer b_i og b_i+1 for alle $i = 1, 2, \ldots, n-1$, og alle byer i den anden del kan nummereres $t_1, t_2, \ldots, t_m$ så der findes en togrute mellem to byer t_j og t_{j+1} for alle $j = 1, 2, \ldots, m-1$. (Bemærk at den ene del kan være tom.) *Hint*: 5

Definition af delgraf, udspændende delgraf og induceret delgraf

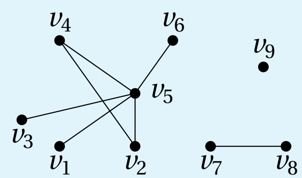
En *delgraf* G' af G, er en graf $G' = (V', E')$ hvor $V' \subseteq V$ og $E' \subseteq E$.

Graf G:



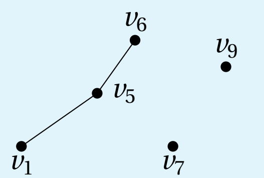
Delgrafen kaldes *udspændende* hvis $V' = V$.

Udspændende delgraf G':



Delgrafen induceret af en delmængde V' af knudemængden V er delgrafen som har V' som knudemængde, og hvor kantmængden består af alle kanter fra E som forbinder to knuder fra V'.

Delgraf G' induceret af $\{v_1, v_5, v_6, v_7, v_9\}$:



delgraf *subgraph*
udspændende delgraf *spanning subgraph*
delgraf induceret af *subgraph induced by*

1.2 Træer

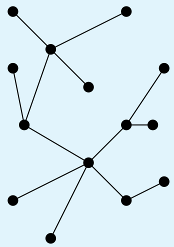
Definition af træ, skov og blad

Et *træ* er en sammenhængende graf som ikke indeholder en kreds.

En *skov* er en graf som ikke indeholder en kreds. En skov er altså en graf hvis sammenhængskomponenter er træer.

Et *blad* er en knude med valens 1.

Træ med ni blade:



træ *tree*
skov *forest*
blad *leaf*

Sætning 1.2.1. Egenskaber ved træer

i) Ethvert træ indeholder mindst Δ blade.

ii) Ethvert træ kan konstrueres ved at starte med en knude og derefter tilføje et blad med en tilhørende kant ad gangen.

iii) Enhver sammenhængende graf indeholder en udspændende delgraf som er et træ, også kaldet et udspændende træ.

Bevis. Vi beviser i) og overlader de to andre dele til læseren i næste opgave.

Hvis $\Delta = 0$, er det trivielt. Antag derfor at $\Delta \geq 1$, og vælg en knude v med maksimal valens Δ. For hver kant fra v vælges en sti der starter i v og fortsætter langs kanten til den ender i et blad. Da grafen er et træ og dermed ikke indeholder nogen kreds, ved vi at den må ende i et blad, og at to stier der udgår fra v langs to forskellige kanter, nødvendigvis ender i to forskellige blade. Dermed indeholder grafen mindst Δ blade. □

Opgave 1.2.1. Bevis sætning 1.2.1.

Sætning 1.2.2. Karakteristik af træer

Hvis G er en simpel sammenhængende graf med n knuder, da er følgende ækvivalent, dvs. hver betingelse er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at grafen er et træ.

i) G indeholder ingen kreds.

ii) G indeholder netop $n-1$ kanter.

iii) To vilkårlige knuder er forbundet med netop én sti.

iv) Hvis man fjerner en vilkårlig kant, bliver grafen usammenhængende.

Bevis. Vi beviser at i) og iii) er ækvivalente og overlader resten til læseren i næste opgave.

iii) $\Rightarrow$ i): Hvis en graf indeholder en kreds, vil to knuder i kredsen være forbundet med to forskellige stier. Dvs. hvis to vilkårlige knuder er forbundet med netop en sti, da indeholder grafen ikke en kreds.

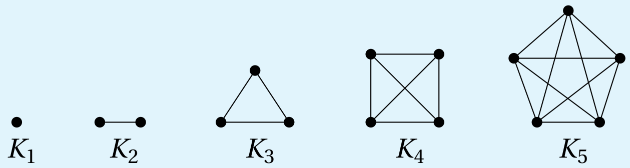
i) $\Rightarrow$ iii): Hvis to knuder er forbundet med to forskellige stier, da findes to knuder som ligger på begge disse stier så de to delstier mellem disse to knuder ikke har fælles kanter, og de danner tilsammen en kreds. Grafen indeholder dermed en kreds. Det betyder at hvis grafen ikke indeholder en kreds, så vil to vilkårlige knuder være forbundet med netop en sti.□

Opgave 1.2.2. Bevis sætning 1.2.2.

1.3 Komplette grafer og Ramsey-tal

Definition af komplet graf

Den *komplette graf* K_n er grafen som består af n knuder som alle parvis er forbundne med en kant, dvs. K_n indeholder $\binom{n}{2}$ kanter.



komplet graf *complete graph*

Eksempel 1.3.1. Ensfarvet K_3

I den komplette graf K_6 er alle kanter malet enten røde eller blå. I dette eksempel vil vi vise at der uanset hvordan kanterne er farvet, altid findes en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve.

Vælg en tilfældig knude v. Da valensen af v er 5, må mindst tre af de fem kanter der udgår fra v, have samme farve, lad os sige rød. Betragt de tre knuder der er forbundet til v med en rød kant. Hvis blot to af disse knuder er forbundet med en rød kant, har vi en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er røde. Antag derfor at ingen af de tre knuder er indbyrdes forbundet med en rød kant. Da må de parvis være forbundet med blå kanter, og de udgør dermed en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er blå.

Definition af Ramsey-tal

Ramsey-tallet $R(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ er det mindste tal p så der for alle komplette grafer K_n, $n \geq p$, gælder at uanset hvordan man farver kanterne i K_n med r farver, da findes mindst ét $i = 1, 2, \ldots, r$ så grafen indeholder en komplet delgraf K_{m_i} hvor alle kanter er farvet med farve nummer i.

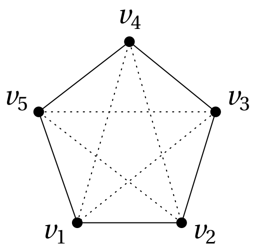
Ramsey-tal *Ramsey number*

Sætning 1.3.1. Ramsey-tallet $R(3,3)$

Ramsey-tallet $R(3,3)$ er 6.

Bevis. Eksempel 1.3.1 viser at $R(3,3) \leq 6$ da det viser at enhver komplet graf K_n, $n \geq 6$, hvor kanterne er malet med to forskellige farver, altid indeholder en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve.

Betragt nu den komplette graf K_5. Man kan farve alle kanterne i K_5 med to farver så den ikke indeholder en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve. Kald knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, og farv fx kanterne $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1$ røde og resten af kanterne blå.



Da indeholder grafen ingen delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve, og dette viser at $R(3,3) = 6$. □

Sætning 1.3.2. Ramsey-tallet $R(3,3,3)$

Ramsey-tallet $R(3,3,3)$ er 17.

Bevis. Konstruktionen af en K_{16}-graf hvor kanterne er farvet i tre forskellige grafer uden at der findes en ensfarvet K_3, er så kompliceret at vi springer den over her. Det er til gengæld ikke så svært at vise den anden del af beviset, dvs. at $R(3,3,3) \leq 17$, og det overlades til læseren i opgave 1.3.1. □

Opgave 1.3.1. Vis at $R(3,3,3) \leq 17$. *Hint*: 6

Opgave 1.3.2. Er det muligt at farve kanterne i K_6 røde og blå så der ikke findes en ensfarvet kreds af længde fire? *Hint*: 18

Opgave 1.3.3. Ved et busstoppested står ni personer. Vis at der enten findes fire personer blandt disse som alle er venner, eller tre personer hvor ingen af dem er venner, mens dette ikke altid er tilfældet hvis en af personerne forlader busstoppestedet. (Venskab er gensidigt). *Hint*: 7

Opgave 1.3.4. I en badmintonklub er der 18 spillere hvoraf nogle har spillet mod hinanden, mens andre ikke har. Vis at der enten findes fire spillere som alle har spillet mod hinanden, eller fire spillere hvor ingen har spillet mod hinanden. Vis yderligere at det ikke altid er tilfældet hvis der kun er 17 spillere i klubben. *Hint*: 21

Sætning 1.3.3. Ramsey-tal

Der gælder at

$$R(m_1,m_2) \leq R(m_1-1,m_2)+R(m_1,m_2-1).$$

Når begge led på højresiden er lige, er ulighedstegnet skarpt.

Bevis. Sæt $N = R(m_1-1,m_2)+R(m_1,m_2-1)$, og betragt en to-farvning af kanterne i K_N med farverne rød og blå. Lad v være en knude i denne graf.

Hvis v er forbundet til $R(m_1-1,m_2)$ andre knuder med røde kanter, da findes der enten m_2 knuder blandt disse $R(m_1-1,m_2)$ knuder som alle er forbundet med blå kanter, eller m_1-1 knuder som alle er forbundet med røde kanter, og i det sidste tilfælde vil de m_1-1 knuder sammen med v udgøre m_1 knuder som alle er forbundne med røde kanter. Altså indeholder grafen i dette tilfælde enten en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf.

Antag derfor at v ikke er forbundet til $R(m_1-1,m_2)$ andre knuder med røde kanter. Da må v være forbundet til $R(m_1,m_2-1)$ knuder med blå kanter, og med samme argument som før medfører dette at grafen enten indeholder en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf. Dermed er $R(m_1,m_2) \leq R(m_1-1,m_2)+R(m_1,m_2-1)$.

Sidste del af sætningen bevises i opgave 1.3.5. □

Opgave 1.3.5. Bevis resten af sætning 1.3.3. *Hint*: 4

Eksempel 1.3.2. Farvning af hele tal

I nogle sammenhænge hvor man kan bruge grafteori, er det ikke altid helt oplagt hvordan man kommer fra problemstilling til graf. Betragt følgende problemstilling: Er det muligt at farve tallene $1,2,\dots,16$ i tre forskellige farver så der ikke findes tre ikke nødvendigvis forskellige tal af samme farve så det ene er summen af de to andre?

Det er umiddelbart svært at se den direkte relation til grafteori, men opgaven kan løses grafteoretisk på følgende måde: Farv tallene $1,2,\dots,16$ i tre forskellige farver. I den komplette graf K_{17} med knuderne $v_1,v_2,\dots,v_{17}$ farves kanten v_iv_j samme farve som tallet $|j-i|$. Ifølge sætning 1.3.2 findes der da tre knuder som er forbundet med kanter af samme farve, dvs. knuder v_i, v_j og v_k, $i<j<k$, hvor $k-j$, $k-i$ og $j-i$ har samme farve. Da $(k-j)+(j-i)=k-i$ findes tre tal i samme farve hvor det ene er summen af de to andre. Dermed er det umuligt at farve tallene $\{1,2,\dots,16\}$ i tre forskellige farver så der ikke findes tre tal i samme farve hvor det ene er summen af de to andre.

Opgave 1.3.6. Er det muligt at farve tallene $1,2,3,\dots,1978$ i seks forskellige farver så der ikke findes tre (ikke nødvendigvis forskellige) tal x,y,z i samme farve så $x+y=z$? (Variant af IMO 1978 opgave 6)

Bemærkning. Vi har her bestemt $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$ og $R(4,4)=17$, men det er ikke nogen nem opgave at bestemme Ramsey-tal for blot lidt større tal, hvilket følgende udtalelse fra matematikeren Erdős viser: "Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6,6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens."(*Kilde:* Wikipedia, Ramsey's theorem.)

I 1989 blev det bevist at $43 \leq R(5,5)$, og så sent som i 2024 er det bevist at $R(5,5) \leq 46$.

1.4 Kantmaksimal og kanminimal inddeling

I mange problemstillinger er man interesseret i at inddele knudemængden i disjunkte ikke-tomme delmængder som tilsammen indeholder hele knudemængden, så der bliver flest eller færrest muligt kanter mellem knuder i forskellige delmængder. Dette kaldes henholdsvis en *kantmaksimal* og en *kantminimal* inddeling.

Eksempel 1.4.1. Kantminimal inddeling

Betragt følgende problemstilling: I et land er der 37 byer som ligger på 14 øer så der er mindst énby på hver ø. Mellem hvert par af byer der ligger på forskellige øer, er der en flyrute. Det oplyses at byerne er fordelt på øerne så der er færrest muligt forskellige flyruter. Hvordan ligger byerne fordelt?

Intuitivt får man hurtigt en fornemmelse af at man skal placere én by på hver ø og resten på den sidste. For at bevise dette identificerer vi byerne med knuder og betragter den komplette graf med 37 knuder. Da der er et endeligt antal knuder, findes der en kantminimal inddeling af de 37 knuder i 14 delmængder, dvs. en inddeling i 14 disjunkte ikke-tomme delmængder så antallet af kanter mellem knuder i forskellige delmængder er minimalt.

Vi viser indirekte at der i denne kantminimale inddeling er én by på hver ø på nær én, hvor resten af byerne ligger. Antag at vi har en kantminimal inddeling i 14 delmængder, samt at der findes to delmængder med mere end én knude, lad os sige a knuder i den ene og b i den anden, $a \geq b > 1$. Hvis vi flytter en knude fra delmængden med b knuder til den med a knuder, får vi $a-(b-1) > 0$ færre kanter mellem knuder i forskellige delmængder, hvilket er i modstrid med at inddelingen var kantminimal. Dermed er der i en kantminimal inddeling en knude i hver delmængde på nær én som indeholder resten af knuderne, og oversat til byer, øer og flyruter betyder dette at der er færrest flyruter når der er 24 byer på én ø og én på hver af de andre 13.

Eksempel 1.4.2. Kantmaksimal inddeling

Nu vil vi undersøge en problemstilling hvor vi skal se på en inddeling med flest muligt kanter mellem knuder i forskellige delmængder. Vi vil vise at det for enhver graf er muligt at inddele dens knuder i to disjunkte delmængder så hver eneste knude har mindst lige så mange naboer i den anden delmængde som i sin egen delmængde.

Lad G være en simpel graf, og vælg en kantmaksimal inddeling af knuderne fra G i to disjunkte delmængder. Dette er muligt da der er et endeligt antal knuder.

Vi viser indirekte at denne kantmaksimale inddeling opfylder det ønskede. Antag at der findes en knude v så v har flere naboer i sin egen delmængde end i den anden. Ved at flytte v over i den anden delmængde opnår vi en ny inddeling med flere kanter fra den ene del til den anden, hvilket er i modstrid med at den valgte inddeling var kantmaksimal. Dermed opfylder en kantmaksimal inddeling i to delmængder at alle knuder har mindst lige så mange naboer i den anden del som i sin egen, og der findes derfor en inddeling med denne egenskab.

Opgave 1.4.1. Vis at det for enhver simpel graf med mindst n knuder er muligt at inddele dens knuder i n disjunkte ikke-tomme delmængder som tilsammen indeholder hele knudemængden, så hver eneste knude har mindst lige så mange naboer i enhver anden delmængde som i sin egen delmængde.

Opgave 1.4.2. Lad G være en simpel graf hvor $\Delta(G) \leq 3$. Vis at det er muligt at farve alle knuderne i G enten blå eller røde så hver sammenhængskomponent af delgraferne induceret af henholdsvis de røde eller de blå knuder maksimalt indeholder to knuder.

Opgave 1.4.3. Bestem den maksimale værdi af m så det for alle simple grafer G, hvor $\Delta(G) \leq m$, er muligt at farve alle knuderne i G med maksimalt n farver så enhver sammenhængskomponent af en delgraf induceret af alle knuder af en bestemt farve indeholder maksimalt to knuder. *Hint*: 2, 1

Opgave 1.4.4. NASA ønsker at anlægge 2004 små beboelser på Mars. Den eneste måde at komme fra beboelse til beboelse er gennem borede tunneler. En bureaukrat tegner et kort over de 2004 beboelser og tegner N tunneler mellem beboelser tilfældigt på kortet så hvert par af beboelser højst har én tunnel mellem sig. Hvad er den mindste værdi af N der garanterer at uanset hvordan bureaukraten tegner tunnelerne, så er det muligt rejse mellem to vilkårlige beboelser?

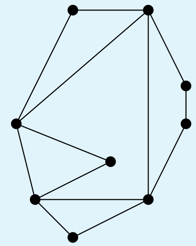
1.5 Euler-grafer og orienterede grafer

Definition af Euler-tur, lukket Euler-tur og Euler-graf

En *Euler-tur* er en tur hvor alle kanter i grafen indgår netop én gang, og en *lukket Euler-tur* er en Euler-tur hvor man starter og slutter i samme knude.

En *Euler-graf* er en graf der indeholder en lukket Euler-tur.

Euler-graf:



Euler-tur *Eulerian trail*
lukket Euler-tur *Eulerian circuit*
Euler-graf *Euler graph*

Definition af orienteret graf

En *orienteret graf* er en graf hvor kanterne har en retning, dvs. hvor de går *fra* en knude *til* en knude.

I en *tur* i en orienteret graf skal man følge retningen.

orienteret graf *directed graph*

Sætning 1.5.1. Euler-grafer

En graf er en Euler-graf netop hvis den er sammenhængende, og alle knuder har lige valens.

En orienteret graf er en Euler-graf netop hvis den er sammenhængende, og der for hver knude gælder at antallet af kanter der udgår fra knuden, er lig antallet af kanter der ender i knuden.

Opgave 1.5.1. Bevis sætning 1.5.1. *Hint*: 13

Opgave 1.5.2. Lad n være et positivt heltal. Vis at det er muligt ud for hvert hjørne i en 2^n-kant at skrive enten 0 eller 1, så hver af de 2^n binære strenge med n cifre man får ved at starte ved et hjørne og derefter fortsætte mod uret til man har besøgt n hjørner i alt, alt imens man nedskriver de cifre man møder, i rækkefølge, alle er forskellige. *Hint*: 20

1.6 Turan-grafer og n-delte grafer

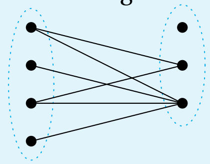
Definition af todelt og n-delt graf

En graf kaldes *todelt* hvis dens knudemængde V kan inddeles i to disjunkte ikke-tomme delmængder V_1 og V_2, $V_1 \cup V_2 = V$, så ingen knuder fra samme delmængde er naboer.

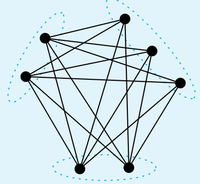
En graf kaldes *n-delt* hvis dens knudemængde V kan inddeles i n disjunkte ikke-tomme delmængder $V_1, V_2, \ldots, V_n$, $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n = V$, så ingen knuder fra samme delmængde er naboer.

En n-delt graf kaldes *komplet* hvis enhver knude er nabo med samtlige knuder som ikke ligger i samme delmængde.

Todelt graf:



Komplet 3-delt graf:



todelt *bipartite*
n-delt *n-partite*

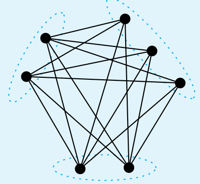
Opgave 1.6.1. Vis at en graf er todelt netop hvis den ikke har en kreds af ulige længde.

Opgave 1.6.2. I en turnering spiller 20 hold mod hinanden. Den første dag spiller alle hold netop én kamp, og den anden dag spiller alle hold igen netop én kamp denne gang mod et nyt hold. Vis at det efter anden dag er muligt at vælge ti hold som endnu ikke har spillet mod hinanden. *Hint*: 9

Definition af Turan-graf

Turan-grafen $T^r(n)$ er den komplette r-delte graf med n knuder, $r \le n$, hvor forskellen mellem antallet af knuder i to delmængder højst er 1.

Turan-grafen $T^3(7)$:



Turan-graf *Turan graph*

Opgave 1.6.3. Vis at blandt alle r-delte grafer med n knuder, $r \le n$, er det Turan-grafen $T^r(n)$ der har flest kanter.

Sætning 1.6.1. Turans sætning

For hele tal n og r, $n \ge r > 1$, er en kantmaksimal graf G med n knuder som ikke indeholder K_{r+1} som delgraf, en Turan-graf $T^r(n)$.

Turans sætning kan vises ved induktion efter n, men den kan også vises ved at benytte knudekopiering, som vi skal se i følgende bevis.

Bevis. Fra opgave 1.6.3 ved vi at blandt de komplette m-delte grafer med n knuder er Turan-grafen $T^m(n)$ den med flest kanter, og det er desuden oplagt at $T^r(n)$ indeholder flere kanter end $T^m(n)$ når $m < r$, så vi skal blot vise at en kantmaksimal graf G med n knuder som ikke indeholder K_{r+1} som delgraf, er en komplet multidelt graf.

En graf er komplet multidelt netop hvis der for alle $x, y, z \in V$ gælder at hvis xy og yz ikke er kanter i G, da er xz heller ikke en kant i G. Vi antager derfor at grafen G ikke er komplet multidelt, dvs. vi antager at der findes knuder x_1, x_2, y så $x_1 y$ og $x_2 y$ ikke er kanter i G, mens $x_1 x_2$ er en kant i G.

Hvis $d(x_i) > d(y)$ for et $i = 1, 2$, da sletter vi knuden y og laver en kopi af knuden x_i. Den nye graf G' kan ligesom G ikke indeholde K_{r+1} som delgraf, og G' indeholder $d(x_i) - d(y) > 0$ flere kanter end G. Dermed kan G i dette tilfælde ikke være kantmaksimal.

Hvis $d(x_i) \le d(y)$ for $i = 1, 2$, da konstruerer vi en ny graf G' ved at slette både x_1 og x_2 fra G samt lave to nye kopier af y. Grafen G' kan ligesom G ikke indeholde K_{r+1} som delgraf, og den må have $2d(y) - d(x_1) - d(x_2) + 1 > 0$ flere kanter end G. Dermed kan G heller ikke i dette tilfælde være kantmaksimal.

Altså er G ikke kantoptimal, og da der findes en kantoptimal graf med n knuder som ikke indeholder K_{r+1}, må den være komplet multidelt, og dermed, som vi så tidligere, Turan-grafen $T^r(n)$. □

Opgave 1.6.4. I et land er der 1000 lufthavne hvoraf nogle er forbundet med flyruter. For vilkårlige tre lufthavne er to af dem ikke forbundet med en flyrute. Hvor mange flyruter kan der maksimalt være?

Opgave 1.6.5. I en graf G med ni knuder er der for vilkårlige fem knuder mindst to kanter der forbinder nogle af disse knuder. Hvor mange kanter må G mindst have? *Hint*: 8

1.7 IMO-eksempler

Nu skal vi se på nogle eksempler fra IMO. Ingen af opgaverne er formuleret som opgaver i grafteori, men den første opgave oversættes nemt til grafteori, mens det i den sidste kræver en rigtig god idé at se hvordan man kan benytte grafteori til at løse opgaven.

Eksempel 1.7.1. Komplette delgrafer

Til en matematikkonkurrence er nogle deltagere venner. En gruppe deltagere som alle er venner, kaldes en klike, og antallet af personer i en klike kaldes dens størrelse. Antag at størrelsen af den største klike blandt deltagerne er $2n$. Vis at det er muligt at placere alle deltagerne i to lokaler så den største klike i det ene lokale har samme størrelse som den største klike i det andet lokale. (IMO 2007 Opgave 3)

I dette eksempel er det nemt at oversætte opgaven til en grafteoretisk opgave, men det er ikke nemt at løse opgaven. Det er meget svært at angive præcist hvordan inddelingen skal være, og i stedet laver vi først en inddeling som ikke altid virker, og justerer den til den virker.

Betragt en klike af maksimal størrelse $2n$, og lad W være mængden af deltagere i denne klike. Først placerer vi alle deltagere i W i lokale X og resten i lokale Y. Lad $k(X)$ og $k(Y)$ betegne den maksimale størrelse af en klike i henholdsvis lokale X og Y på et givent tidspunkt. Hvis vi flytter en deltager fra X til Y, så falder $k(X)-k(Y)$ med 1 eller 2. Hvis vi fortsætter med at flytte deltagere på denne måde, kan vi opnå at $k(X)-k(Y)=0$ eller $k(X)-k(Y)=-1$.

Der er stadig en del arbejde endnu, men det overlades til læseren i næste opgave.

Opgave 1.7.1. Færdiggør løsningen i eksempel 1.7.1.

Eksempel 1.7.2. Permutationer

Lad n være et positivt lige tal. Vis at der findes en permutation $x_1, x_2, \ldots, x_n$ af tallene $1, 2, \ldots, n$ så der for alle i, $1 \le i \le n$, gælder at x_{i+1} er et af følgende tal: $2x_i, 2x_i-1, 2x_i-n, 2x_i-n-1$ (her er $x_{n+1}=x_1$). (IMO shortlist 2002)

I dette eksempel er sammenhængen til grafteori absolut ikke indlysende, men derimod subtil.

Lad G være en orienteret graf med $m = \frac{n}{2}$ knuder nummereret $1, 2, \ldots, m$ samt $2m$ kanter nummereret $1, 2, \ldots 2m$. Kanten med nummeret $2i-1$ går fra knude i til knude $2i-1 \pmod{m}$, og kanten nummereret $2i$ går fra knude i til knude $2i \pmod{m}$. Dermed er der to kanter som udgår fra hver knude i, og to som ender i hver knude i, nemlig kanterne nummereret i og $i+m$. (Bemærk at grafen ikke er simpel). Resten af løsningen overlades til læseren.

Opgave 1.7.2. Færdiggør løsningen i eksempel 1.7.2. *Hint*: 14, 19

1.8 Blandede opgaver

Opgave 1.8.1. I en klasse er der 49 elever, én ved hvert af 49 borde placeret i syv rækker og syv søjler. Er det muligt at flytte eleverne så hver elev flytter til et nabobord i samme række eller samme søjle, samtidig med at der efter at alle er flyttet, sidder netop én elev ved hvert bord?

Opgave 1.8.2. Til en fest er der $2n+1$ personer hvor n er et positivt heltal. Når man vælger en gruppe blandt deltagerne på højst n personer, findes der altid en person uden for gruppen som er venner med alle i gruppen. Vis at der findes en festdeltager som er venner med alle til festen.

Opgave 1.8.3. Den Forunderlige Ø's efterretningstjeneste har 16 spioner i Tartu. Hver af dem overvåger nogle af sine kolleger, men der er intet par af spioner der overvåger hinanden. Desuden ved man at hvis man udtager ti tilfældige spioner, kan de nummereres så nummer 1 overvåger nummer 2, nummer 2 overvåger nummer 3 osv., og den tiende desuden overvåger nummer 1. Vis at man også kan gøre dette med 11 tilfældigt valgte spioner. (BW 1994) *Hint*: 10

Opgave 1.8.4. Antag at G er en sammenhængende graf med k kanter. Vis at det er muligt at nummerere kanterne $1, 2, 3, \ldots k$ så hver knude som er forbundet med mindst to kanter, opfylder at største fælles divisor af tallene på alle de tilstødende kanter er 1. (IMO 1991) *Hint*: 11

Opgave 1.8.5. I en stor gruppe af mennesker er nogle venner med hinanden. Hver dag holder en person en fest for alle sine venner, og alle personens venner bliver til festen venner med hinanden. Dette fortsætter indtil alle personer har holdt fest. Vis at hvis to personer i gruppen efter alle disse fester stadig ikke er venner, så bliver de det heller ikke selv om man fortsætter med at holde fester på denne måde.

Opgave 1.8.6. I en komplet graf med ni knuder er kanterne enten røde, blå eller slet ikke farvede. Lad n betegne antallet af farvede kanter. Bestem den mindste værdi af n så der altid findes tre knuder som er forbundet af kanter af samme farve. (IMO 1992) *Hint*: 17

Opgave 1.8.7. Lad K_n være den komplette graf med n knuder. Det er nu tilladt at vælge en kreds af længde fire, fjerne en kant fra den, vælge endnu en kreds af længde fire fra den nye graf, fjerne en kant, osv. så længe det er muligt. Bestem det mindste antal kanter der kan være tilbage til slut. (IMO 2004 Shortlist)

Opgave 1.8.8. I en gruppe med n personer, $n > 6$, har hver person præcis tre venner som personen udveksler postkort med. Vis at det er muligt at inddele gruppen i to grupper så hver person udveksler postkort med mindst to personer fra sin egen gruppe. *Hint*: 15

2 Hints

1. Vis at $n \geq 2n-1$ ved at udnytte opgave 1.4.1.
2. Vis at $m < 2n$ ved at se på K_{2n+1}.
3. Oversæt opgaven til grafteori på naturlig måde, og vis påstanden indirekte. Betragt en knude fra A med et maksimalt antal naboknuder i B, og konstruér herudfra flere tripler af tre knuder, en fra hver af A, B og C, til du opnår en modstrid.
4. Bevis det indirekte, og se på paritet af valens når man kun betragter kanter af én farve.
5. Vis påstanden indirekte, og vælg en bus-sti af maksimal længde.
6. Brug samme idé som i eksempel 1.3.1.
7. Lav konstruktion der viser at $R(3,4) > 8$. Vis at $R(3,4) \leq 9$ ved at være systematisk og huske opgave 1.1.1.
8. Betragt grafen $\overline{G}$ som består af de samme knuder som G, men hvor to knuder er naboer i $\overline{G}$ netop hvis de ikke er det i G.
9. Tegn en rød kant mellem hold der spillede mod hinanden første dag, og en blå kant mellem hold der spillede mod hinanden den anden dag.
10. Se på hvor mange naboer hver knude må have, og vis påstanden indirekte.
11. Udnyt at to på hinanden følgende tal er indbyrdes primiske.
12. Betragt en sti i G af maksimal længde l, og antag at $l < \min(2\delta, n-1)$ for at opnå modstrid.
13. Konstruktion af Euler-tur hvis alle knuder har lige valens: Start i en knude, og lav en tur ved hele tiden at fortsætte til en naboknude ad en kant du endnu ikke har benyttet, indtil det ikke er muligt længere. Udvid nu denne tur indtil alle kanter indgår i turen.
14. Vis at grafen er sammenhængende.
15. Betragt en kreds af minimal længde, og betragt tilfældene hvor kredsen har længde 3 eller 4 fire som separate cases.
16. Vis påstanden indirekte. Oversæt til grafteori på den oplagte måde, og vælg en tilfældig knude. Betragt mængden af knuder som ikke er nabo til denne knude. Hvad kan du sige om disse knuder og deres naboer i denne mængde?
17. $n = 33$.
18. Tag udgangspunkt i en ensfarvet K_3, og overvej mulighederne systematisk.
19. Udnyt at grafen er en Euler-graf.
20. Lad de 2^{n-1} binære strenge af længde $n-1$ repræsentere 2^{n-1} knuder i en orienteret graf. Lad der være en kant fra knuden A til knuden B hvis de sidste $n-2$ cifre i A er lig med de første $n-2$ i B.
21. Lav konstruktion der viser at $R(4,4) > 17$. Vis at $R(4,4) \leq 17$ ved at være systematisk og huske at $R(3,4) = 9$.

3 Løsninger

Opgave 1.1.1. Summen af valenserne for samtlige knuder i grafen må være to gange antallet af kanter, dvs. den er lige. Dermed er der et lige antal knuder med ulige valens.

Opgave 1.1.2. Betragt personerne som knuder i en graf, og lad to knuder være forbundet med en kant hvis personerne er venner. Hver knude har valens mellem 0 og $n-1$. Hvis en knude har valens 0, så vil den maksimale valens være mindre end $n-1$. Dermed findes ikke både en knude med valens 0 og en med valens $n-1$, dvs. blandt de n knuder findes ifølge skuffeprincippet to med samme valens. Altså findes to personer til festen med samme antal venner.

Opgave 1.1.3. Betragt grafen med $2n$ knuder hvor hver knude repræsenterer en person, og hvor to knuder er forbundet med en kant hvis de er venner. Beviset føres indirekte. Antag modsat at hvert par af knuder har et ulige antal fælles naboknuder. Betragt en knude v. Lad A være mængden af naboknuder v, og B være mængden af knuder som ikke er nabo til v, og som ikke er v. Vi ved at $|A| = d(v)$ er lige, og da der er $2n$ knuder, må $|B|$ være ulige. Betragt en knude $w \in B$. Ifølge antagelsen ved vi at antallet af fælles naboknuder for v og w er ulige, dvs. w har et ulige antal naboknuder i A. Da $d(w)$ er lige, må w også have et ulige antal naboknuder i B. Hver knude i B har altså et ulige antal naboknuder i B, men dette er umuligt da B indeholder et ulige antal knuder. Dermed findes to knuder som har et lige antal fælles naboknuder, og dermed to personer som har et lige antal fælles venner.

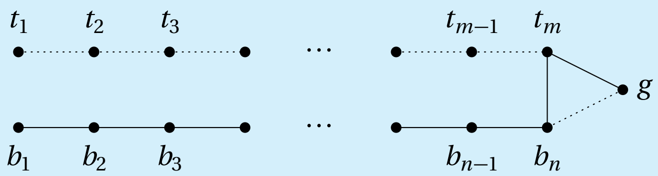
Opgave 1.1.4. Lad eleverne på de tre skoler være knuder i en graf sådan at A er delmængden af knuder der repræsenterer elever på skole A osv., og forbind to elever med kanter hvis de kender hinanden. Vi viser påstanden indirekte. Antag at ingen af de tre påstande er sande.

Lad $a \in A$ være en knude med et maksimalt antal kanter til knuder i B. Ifølge antagelsen er ingen knude fra A forbundet til alle knuder i B, dvs. der findes en knude $b \in B$ som ikke er nabo til a. Ifølge antagelsen er der heller ingen knuder i B der er naboer til alle knuder i C, dvs. der findes en knude $c \in C$ som ikke er nabo til b. På samme måde ses at der findes knude i $a' \in A$ som ikke er nabo til c. Hvis vi betragter de to valg af tre knuder $\{a, b, c\}$ og $\{a', b, c\}$, så ved vi at der er to naboknuder i hver af de to mængder, dvs. at a og c er naboer og a' og b er naboer. Da a ikke er nabo til b og var valgt blandt knuderne i A som havde et maksimalt antal kanter til knuder i B, må der findes et $b' \in B$ som er nabo til a, men ikke til a'. Nu ved vi at a er nabo til b' og c, mens a' hverken er nabo til b' eller c. Det betyder at hvis b' og c er naboer, så findes der ikke to ikke-naboer blandt $\{a, b', c\}$, og hvis de ikke er naboer, så findes der ikke to naboer blandt $\{a', b', c\}$. Dermed er antagelsen forkert, og vi har vist at mindst et af de tre udsagn må være sande.

Opgave 1.1.5. Lad $v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1}$ være en sti i G af maksimal længde. Antag at $l < \min(2\delta, n-1)$. Da stien har maksimal længde, må både v_1 og v_{l+1} udelukkende være naboer med knuder som allerede er en del af stien. Både v_1 og v_{l+1} er naboer med mindst δ andre knuder. Lad V_1 være mængden af de knuder som v_1 er nabo til, og lad V_2 være mængden af de knuder v_i hvor $v_{i+1} \in V_1$. Da er V_2 en delmængde med mindst δ knuder af mængden $\{v_1, v_2, \dots v_l\}$, og da v_{l+1} er nabo til mindst δ knuder blandt $\{v_1, v_2, \dots v_l\}$, og $l < 2\delta$, må v_{l+1} være nabo til en knude fra V_2. Kald denne knude v_i. Vi ved per konstruktion at $v_{i+1} \in V_1$, dvs. at v_1 er nabo til v_{i+1}. Dermed er $v_1, v_2, \dots, v_i, v_{l+1}, v_l, v_{l-1}, \dots, v_{i+1}, v_1$ en kreds af længde $l+1$. Da $l < n-1$ findes knuder i grafen som ikke er en del af denne kreds, og mindst én af disse er nabo til en knude fra kredsen da grafen er sammenhængende. Dermed danner denne knude sammen med alle knuderne fra kredsen en sti af længde $l+1$, hvilket er i modstrid med at den maksimale længde af en sti var l. Altså findes en sti af længde mindst $\min(2\delta, n-1)$.

Opgave 1.1.6. Betragt grafen hvor hver by er repræsenteret ved en knude, og hvor kanten mellem to byer er rød hvis der går en busrute mellem dem, og blå hvis der er en togrute mellem dem.

Antag for modstrid at det ikke er muligt at inddele som ønsket, og lad B og T være to disjunkte mængder af knuder sådan at knuderne fra B kan nummereres $b_1, b_2, \dots, b_n$ så der findes en rød kant mellem b_i og b_{i+1} for alle $i = 1, 2, \dots, n-1$, knuderne fra T kan nummereres $t_1, t_2, \dots, t_m$ så der findes en blå kant mellem knuderne t_j og t_{j+1} for alle $j = 1, 2, \dots, m-1$, og så der yderligere gælder at antallet af knuder som ikke ligger i de to mængder, er minimalt.



Lad g være en knude som hverken er i B eller T. Det er oplagt at B og T er ikke-tomme, for hvis en af dem var tom, kunne man placere g i denne mængde. Hvis der er en rød kant mellem g og b_n, så kan g placeres i B med nummeret $n+1$, hvilket er en modstrid. Altså er der en blå kant mellem g og b_n. Tilsvarende må der være en rød kant mellem g og t_m. Betragt nu kanten mellem b_n og t_m, og antag uden tab af generalitet at den er rød. Nu kan t_m flyttes fra T til B samtidig med at g indlemmes i B sådan at t_m bliver til b_{n+1} og g til b_{n+2} så det ønskede stadig er opfyldt, hvilket er i strid med minimaliteten. Altså er det muligt at inddele landet som ønsket.

Opgave 1.2.1. ii) Da ethvert træ med mindst to knuder indeholder mindst ét blad, kan man hele tiden fjerne et blad med tilhørende kant indtil der kun er en knude tilbage. Ved at tilføje bladene i omvendt rækkefølge konstrueres det oprindelige træ.

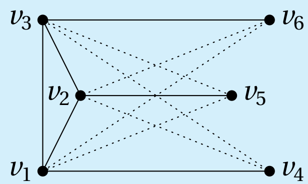
iii) Vælg en knude, og konstruér en delgraf ved hele tiden at vælge en nabo som endnu ikke er valgt, til en af de allerede valgte knuder og tilføje kanten mellem dem. På den måde får vi tilføjet alle knuder da grafen er sammenhængende, og den delgraf vi ender med, kan ikke indeholde en kreds pga. konstruktionen. Den er derfor et træ.

Opgave 1.2.2. Vi viser først at i) og ii) er ækvivalente. i) $\Rightarrow$ ii): Antag at en sammenhængende graf med n knuder er et træ, dvs. at den ikke indeholder en kreds. Da et træ kan konstrueres ved at starte med en knude og derefter tilføje et blad med tilhørende kant et ad gangen ifølge sætning 1.2.1, må grafen indeholde præcis $n-1$ kanter. ii) $\Rightarrow$ i): Antag omvendt at en sammenhængende graf med n knuder indeholder netop $n-1$ kanter. Da indeholder den ifølge sætning 1.2.1 et udspændende træ, og da dette træ har $n-1$ kanter, må det være identisk med grafen. Dermed er grafen et træ.

Nu mangler vi kun at vise at i) og iv) er ækvivalente. i) $\Rightarrow$ iv): Antag at en graf ikke indeholder en kreds. Hvis man fjerner en kant mellem to knuder, kan disse to knuder ikke længere være forbundet med en sti, da grafen ellers ville indeholde en kreds, og dermed er den usammenhængende. iv) $\Rightarrow$ i): Hvis en sammenhængende graf omvendt opfylder at hvis man fjerner en kant, da bliver den usammenhængende, kan den ikke indeholde en kreds, da man kan fjerne en kant fra en kreds uden at grafen bliver usammenhængende.

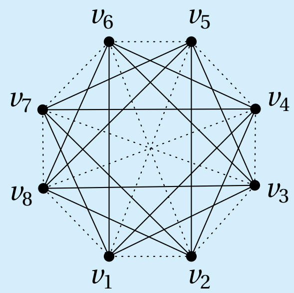
Opgave 1.3.1. Lad kanterne i K_{17} være farvet røde, grønne og blå. Vi ønsker at vise at der findes en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve. Vælg en tilfældig knude v. Da v er forbundet til 16 knuder, findes mindst seks knuder som er forbundet til v med samme farve kant, lad os sige rød. Hvis to af disse knuder er forbundet med en rød kant, har vi en delgraf K_3 hvor alle kanter er røde. Antag derfor at der ikke er to knuder blandt de seks som er forbundet med en rød kant. Da udgør de seks knuder og de tilhørende kanter en komplet delgraf K_6 hvor kanterne er malet enten grønne eller blå, og da $R(3,3) = 6$, findes en delgraf K_3 af denne graf hvor alle kanter har samme farve.

Opgave 1.3.2. Nej. Da $R(3,3) = 6$ findes tre knuder v_1, v_2, v_3 som er forbundet med kanter af samme farve, lad os sige rød. Hvis blot en af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med røde kanter til to af knuderne v_1, v_2, v_3, har vi en ensfarvet kreds af længde fire. Antag derfor at de højst er forbundet til en af knuderne v_1, v_2, v_3 med én rød kant. Hvis to af knuderne v_4, v_5, v_6 begge er forbundet til de samme to knuder blandt v_1, v_2, v_3 med blå kanter, er der også en ensfarvet kreds af længde fire. Vi antager derfor yderligere at det er der ikke, hvilket betyder at hver af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med en rød kant til netop én af knuderne v_1, v_2, v_3, og at det for to af dem ikke er den samme. Vi kan dermed uden tab af generalitet antage at v_1v_4, v_2v_5 og v_3v_6 er røde.



Men dette betyder at der kommer en rød kreds af længde fire hvis to af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med en rød kant. Antag derfor at de alle er forbundet af blå kanter. I dette tilfælde er der en blå kreds v_2v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_2. Der vil dermed altid være en ensfarvet kreds af længde fire.

Opgave 1.3.3. Hvis vi identificerer personerne med knuder og forbinder hvert par af knuder med en rød kant hvis de tilhørende personer er venner, og en blå kant hvis de ikke er venner, så svarer opgaven til at vise at $R(3,4) = 9$. Betragt den komplette graf K_8 med knuderne $v_1, v_2, \ldots v_8$.



Farv alle kanter mellem to knuder hvor forskellen mellem deres indices er 1, 4 eller 7, blå, og farv alle andre kanter røde. Da findes hverken en delgraf K_3 hvor alle kanter er blå, eller en delgraf K_4 hvor alle kanter er røde (overvej). Dermed er $R(3,4) > 8$.

Lad alle kanter i K_9 være farvet enten røde eller blå. Vi ønsker at vise at da findes enten en delgraf K_3 hvor alle kanter er røde, eller en delgraf K_4 hvor alle kanter er blå. Hvis der findes en knude hvorfra der udgår mindst fire røde kanter, da er enten to blandt disse forbundet med en rød kant, eller også er alle disse fire knuder parvis forbundet med blå kanter, hvilket giver en rød delgraf K_3 eller en blå delgraf K_4. Antag derfor at alle knuder højst er forbundet med tre røde kanter. Alle knuder kan ikke være forbundet med netop tre røde kanter da der er et ulige antal knuder. Dermed findes en knude v som er forbundet med mindst seks blå kanter, men da $R(3,3) = 6$, ved vi at der blandt disse knuder findes tre som er forbundet med kanter af samme farve, og dermed udgør de enten en rød K_3 eller sammen med v en blå K_4. Dermed har vi vist at $R(3,4) = 9$.

Opgave 1.3.4. Hvis vi identificerer spillerne med knuder og forbinder hvert par af knuder med en rød kant hvis de tilhørende spillere har spillet mod hinanden, og en blå kant hvis de ikke har, da svarer opgaven til at vise at $R(4,4) = 18$.

Vi viser først at $R(4,4) > 17$. Betragt den komplette graf K_{17} med knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_{17}$. En kant mellem to knuder hvor forskellen i deres indices er 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 eller 16, farves røde. En kant mellem to knuder hvor forskellen i deres indices er 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 eller 14, farves blå. Denne graf indeholder ingen delgraf K_4 hvor alle kanter har samme farve: Placér de 17 knuder i en cirkel. Hvis fire knuder skal udgøre en rød K_4, skal de fire *afstande* mellem knuderne rundt i cirklen være fire tal blandt 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16. Eneste muligheder er $1,1,2,13$, eller $1,4,4,8$ eller $2,4,4,9$. Ligegyldig hvilken rækkefølge disse afstande placeres i, vil der være to modstående knuder som ikke er forbundet af en rød kant. På tilsvarende måde udelukkes at der findes en blå K_4 ved denne farvning. Altså er $R(4,4) > 17$.

Derefter viser vi at $R(4,4) \leq 18$. Betragt den komplette graf K_{18} hvor kanterne er malet røde eller blå. Lad v være en vilkårlig knude. Da v er forbundet med 17 kanter, er mindst ni af disse af samme farve, lad os sige røde. Disse ni knuder og de tilhørende kanter udgør en komplet delgraf K_9, og da $R(3,4) = 9$, ved vi at denne graf enten indeholder en komplet delgraf K_4 hvor alle kanter er blå, eller en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er røde, og denne delgraf udgør sammen med v fire knuder der alle er forbundet parvis med røde kanter. Dermed er $R(4,4) \leq 18$, og altså samlet $R(4,4) = 18$.

Opgave 1.3.5. Antag at $R(m_1-1, m_2)$ og $R(m_1, m_2-1)$ er lige. Vi viser indirekte at i dette tilfælde gælder der skarpt ulighedstegn. Antag at

$$N = R(m_1, m_2) = R(m_1-1, m_2) + R(m_1, m_2-1).$$

Da findes en to-farvning (rød og blå) af kanterne i K_{N-1} så den ikke indeholder en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf. Lad v være en knude i denne graf. Lad $d_r(v)$ betegne antallet af røde nabokanter til v, og $d_b(v)$ betegne antallet af blå nabokanter til v. Da må $d_r(v) < R(m_1-1, m_2)$ og $d_b(v) < R(m_1, m_2-1)$, for ellers findes der, som vi så i beviset, en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf, og da

$$d_r(v) + d_b(v) = R(m_1-1, m_2) + R(m_1, m_2-1) - 2,$$

må $d_r(v) = R(m_1-1, m_2) - 1$ og $d_b(v) = R(m_1, m_2-1) - 1$. Dette gælder for alle knuder i grafen, men dette er umuligt da der er et ulige antal knuder i grafen, og $R(m_1-1, m_2) - 1$ er ulige. Dermed er uligheden i dette tilfælde skarp.

Opgave 1.3.6. Nej. Stort set på samme måde som i eksempel 1.3.2 antager vi at alle tallene $1, 2, \ldots, 1978$ er farvet med seks forskellige farver, og farver kanter i

K_{1979} efter følgende princip: Kanten $v_i v_j$ farves samme farve som tallet $|i-j|$. Hvis der findes tre knuder v_i, v_j og v_k, $i<j<k$, så kanterne mellem dem har samme farve, da findes tre tal $k-j$, $j-i$ og $k-i$ i samme farve så det tredje er summen af de to første. Vi skal derfor blot vise at $R_6(3) = R(3,3,3,3,3,3) \leq 1979$.

Ifølge sætning 1.3.2 er $R(3,3,3) = 17$. Dermed må $R(3,3,3,3) \leq 4 \cdot 16 + 2 = 66$, for hvis kanterne i K_{66} er malet i fire forskellige farver, findes for en vilkårlig knude v mindst 17 kanter i samme farve som udgår fra v til 17 knuder, hvor enten to er forbundet med en kant af denne farve, eller alle er forbundet med kanter i de tre andre farver, og i begge tilfælde findes en ensfarvet delgraf K_3. På samme måde indses at $R(3,3,3,3,3) \leq 5 \cdot 65 + 2 = 327$ og $R(3,3,3,3,3,3) \leq 6 \cdot 326 + 2 = 1958 < 1979$, hvilket viser det ønskede.

Opgave 1.4.1. Betragt en kantmaksimal inddeling i n delmængder. Vi viser påstanden indirekte, dvs. vi antager at der i denne inddeling findes en knude som har a naboer i sin egen delmængde og b naboer i en anden mængde, hvor $a > b$. Ved at flytte knuden til den anden delmængde bliver der $a - b > 0$ flere kanter mellem delmængderne i modstrid med at inddelingen var kantmaksimal. Altså opfylder en kantmaksimal inddeling i n delmængder det ønskede.

Opgave 1.4.2. Betragt en kantmaksimal inddeling af knudemængden i to disjunkte delmængder. Da ved vi fra eksempel 1.4.2 at hver knude ikke er forbundet med flere knuder i sin egen delmængde end i den anden, og da dens valens højst er tre, er den højst forbundet med én knude i sin egen delmængde. Hvis vi farver knuderne i den ene delmængde røde og knuderne i den anden delmængde blå, opfylder farvningen derfor betingelserne.

Opgave 1.4.3. Den maksimale værdi af m er $2n-1$.

Først viser vi at $m < 2n$: Betragt K_{2n+1}. Her er $\Delta = 2n$, og hvis vi farver knudemængden i n farver, så findes der ifølge skuffeprincippet mindst tre knuder af samme farve. Delgrafen induceret af alle knuder af denne farve vil derfor indeholde mindst tre knuder der alle er forbundet. Dermed er $m < 2n$.

Derefter viser vi at $m \geq 2n-1$: Lad G være en graf hvor $\Delta(G) = 2n-1$. Lad $V_1, V_2, \ldots, V_n$ være en kantmaksimal inddeling af knudemængden i n disjunkte delmængder, og farv alle knuder i V_i farve nummer i. Da ved vi ifølge opgave 1.4.1 at hver knude har mindst lige så mange naboer i hver af de andre delmængder som i sin egen, og dermed er den nabo til højst én knude i sin egen delmængde, hvilket giver det ønskede.

Opgave 1.4.4. Vi oversætter problemstillingen til en graf på den oplagte måde. Den kantmaksimale ikke-sammenhængende graf med 2004 knuder må have to sammenhængskomponenter som begge er komplette delgrafer. Det er nemt at se at den kantmaksimale graf netop består af en komplet delgraf med 2003 knuder samt en delgraf med en knude. Dermed er den minimale værdi af N lig med $\binom{2003}{2}+1$.

Opgave 1.5.1. Det er oplagt at en graf ikke kan være en Euler-graf hvis den indeholder en knude med ulige valens. Antag nu at samtlige knuder i en graf har lige valens. Vi begynder i knuden v_1 og laver en tilfældig tur indtil vi før eller siden ender i v_1. Da alle knuder har lige valens, må vi nødvendigvis ende i knuden v_1. Hvis turen indeholder samtlige kanter, har vi en lukket Euler-tur. Hvis ikke, må der fordi grafen er sammenhængende, findes en ikke passeret kant som støder op til en knude v_2 som er indeholdt i turen. Med udgangspunkt i v_2 laver vi nu en tilfældig tur indtil vi før eller siden ender i v_2. Denne nye tur sættes ind i den gamle så vi har en lukket tur. Da der kun er endelig mange kanter, kan vi fortsætte på den måde til vi har en lukket tur der indeholder samtlige kanter. Sidste del vises på tilsvarende vis.

Opgave 1.5.2. Lad de 2^{n-1} binære strenge af længde $n-1$ repræsentere 2^{n-1} knuder i en orienteret graf. Lav en kant fra knuden A til knuden B hvis de sidste $n-2$ cifre i A er lig med de første $n-2$ i B. På denne måde går der to kanter ud fra hver knude, og der kommer to kanter ind til hver knude. De to knuder med en binær streng som udelukkende består af samme ciffer, er forbundet med en kant til sig selv. Dermed findes der ifølge sætning 1.5.1 en lukket Euler-tur i grafen. Nu starter vi i en vilkårlig knude og følger Euler-turen. For hver knude vi kommer til, skriver vi sidste ciffer i dens binære streng ned. På denne måde konstruerer vi en binær streng med 2^n cifre da der er 2^n kanter i vores Euler-tur. Nu placerer vi cifrene i denne streng fortløbende langs hjørnerne i vores 2^n-kant. På denne måde findes en vilkårlig binær streng af længde n langs vores 2^n-kant pga. konstruktionen (overvej), og de er derfor alle forskellige.

Opgave 1.6.1. Hvis en graf er todelt, må to naboknuder ligge i hver sin del, og dermed må hver anden knude på en kreds ligge i den ene del, hvilket betyder at alle kredse i en todelt graf må have lige længde.

Antag at en graf ikke har kredse af ulige længde. Vælg en knude v, og farv den rød. Farv derefter dens naboer grønne, deres naboer røde, osv. indtil alle knuder i sammenhængskomponenten som indeholder v, er farvede. Antag at der under farvningen er en knude w der både skal farves rød og grøn. Dette betyder at der både er en vej fra v til w af lige længde og en af ulige længde, og disse to må tilsammen indeholde en kreds af ulige længde hvilket er en modstrid. Dermed er farvningsproceduren entydig, og denne farvning giver en todeling af sammenhængskomponenten. På denne måde kan alle sammenhængskomponenter todeles, og dermed er grafen todelt.

Opgave 1.6.2. Lad 20 knuder repræsentere de 20 hold, og forbind to knuder med en rød kant hvis de tilhørende hold har spillet mod hinanden første dag, og en blå kant hvis de har spillet mod hinanden anden dag. Alle knuder har valens to da hver knude er forbundet med netop én blå og én rød kant, og derfor må hver sammenhængskomponent være en kreds af lige længde (skiftevis røde og blå kanter). Fra hver sammenhængskomponent vælges hver anden knude i kredsen så man får en todeling af grafen, og på denne måde får man ti knuder hvor ingen er forbundet med hinanden.

Opgave 1.6.3. Det er oplagt at den r-delte graf med flest kanter skal findes blandt de komplette r-delte grafer. Antag at G er en komplet r-delt graf, samt at der findes to knudedelmængder V_i og V_j så $|V_i| \geq |V_j| + 2$. Ved at flytte en knude fra V_i til V_j fjerner vi $|V_j|$ kanter og får $|V_i| - 1$ nye kanter, og da $|V_i| - 1 > |V_j|$, kan G ikke være kantmaksimal. Da der er et endeligt antal knuder og dermed et endeligt antal af måder at fordele dem i r disjunkte ikke-tomme delmængder, må der findes en graf som er kantmaksimal, og det må netop være $T^r(n)$.

Opgave 1.6.4. Hvis vi oversætter situationen til en graf, skal vi finde det maksimale antal kanter for en graf G med 1000 knuder hvor G ikke indeholder K_3 som delgraf. Fra Turans sætning ved vi at $T^2(1000)$ er kantmaksimal blandt alle grafer med 1000 knuder som ikke indeholder K_3 som delgraf, og $T^2(1000)$ har $500^2 = 250000$ kanter, dvs. der er maksimalt 250000 flyruter.

Opgave 1.6.5. Lad G være en graf med ni knuder $v_1, v_2, \dots, v_9$ sådan at hvis man vælger fem vilkårlige knuder, da indeholder G mindst to kanter mellem nogle af disse fem knuder. Betragt grafen $\overline{G}$ som består af de samme knuder som G, men hvor to knuder er naboer i $\overline{G}$ netop hvis de ikke er det i G. Hvis $\overline{G}$ indeholder K_4 som delgraf med knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, da må $v_5, v_6, \dots, v_9$ hver være naboer i G til mindst to knuder blandt v_1, v_2, v_3, v_4, og dermed indeholder G mindst 10 kanter. Hvis $\overline{G}$ ikke indeholder K_4 som delgraf, kan den ifølge Turans sætning ikke have flere kanter end $T^3(9)$, og dermed kan G ikke have færre kanter end $\overline{T^3(9)}$ som har ni kanter. Da $\overline{T^3(9)}$ opfylder at hvis man vælger fem vilkårlige knuder, da indeholder den mindst to kanter mellem nogle af disse fem knuder, er ni et egentligt minimum.

Opgave 1.7.1. Hvis $k(X) - k(Y) = 0$, er vi færdige. Antag derfor at $k(X) - k(Y) = -1$, og lad $k(X) = l$ og $k(Y) = l+1$. Hvis der findes en deltager fra W i lokale Y som ikke tilhører hver eneste klike af størrelse $l+1$ i lokale Y, kan vi flytte denne til lokale X og opnå $k(X) = l+1 = k(Y)$ som ønsket. Antag derfor at alle $2n-l$ deltagere fra W som er i lokale Y, er medlem af alle kliker i Y af størrelse $l+1$. Hver $(l+1)$-klike fra lokale Y indeholder dermed præcis $l+1-(2n-l) = 2(l-n)+1 \geq 1$ deltagere som ikke er i W. Dermed kan vi vælge en $(l+1)$-klike fra Y og flytte en deltager fra denne, som ikke er i W, til X. Vi fortsætter på denne måde til der ikke er flere $(l+1)$-kliker i Y. Vi påstår nu at $k(x) = l = k(Y)$. Antag nemlig modsat at der findes en $(l+1)$-klike i X. Medlemmerne i denne klike må pga. konstruktionen være venner med alle $2n-l$ deltagere fra W som er i Y, og dermed findes der blandt alle deltagerne en klike på $2n+1$ deltagere, hvilket er i modstrid med at den største klike havde $2n$ medlemmer. Dermed er $k(X) = k(Y)$ efter denne konstruktion.

Opgave 1.7.2. Vi viser ved induktion at grafen uden orientering er sammenhængende, ved at vise at der findes en sti mellem knude nummer k og knude nummer 1 for alle $k = 1, 2, \dots, m$. Det er oplagt at der findes en sti mellem knude nummer 2 og knude nummer 1 da kant nummer 2 forbinder de to knuder. Antag at knuderne $2, 3, \dots, k$ er forbundet med en sti til knude nummer 1. Dermed må også knude nummer $k+1$ være forbundet med en sti til knude nummer 1, da den er forbundet med en kant til en knude med lavere nummer, og dette fuldfører induktionen.

Da grafen uden orientering er sammenhængende, og der for hver knude er lige så mange kanter der udgår fra knuden, som kanter der ender i knuden, ved vi at der findes en lukket Euler-tur, og grafen dermed er en Euler-graf.

Betragt en Euler-tur i grafen. Vi konstruerer nu permutationen $x_1, x_2, \dots, x_n$

ved at lade x_i være nummeret på den i'te kant i denne Euler-tur. Kanten nummereret x_i ender i knuden nummereret j, og kanten nummereret x_{i+1} udgår fra knuden nummereret j, og dermed ved vi fra konstruktionen af grafen at $x_i \equiv j \pmod{m}$ og $x_{i+1} = 2j$ eller $x_{i+1} = 2j-1$. Dvs. $2x_i \equiv 2j \pmod{2m = n}$ og dermed $x_{i+1} \equiv 2x_i - 1 \pmod{n}$ eller $x_{i+1} \equiv 2x_i \pmod{n}$ som ønsket.

Opgave 1.8.1. Identificer hver plads med en knude, og antag det er muligt at omrokere eleverne som beskrevet. Hvis en elev flytter fra en plads til en anden, lader vi en kant forbinde de to knuder som repræsenterer pladserne, og desuden farver vi kanten rød hvis flytningen foregår inden for samme række. Dermed opnår vi en graf hvor hver sammenhængskomponent er en kreds, og hver kreds har lige længde da den består af et lige antal røde kanter og et lige antal ufarvede kanter. Dette er i modstrid med at grafen har 49 knuder. Dermed er en sådan omrokering umulig.

Opgave 1.8.2. Betragt festdeltagerne som knuder, og forbind to knuder med hinanden hvis deltagerne er venner. Vælg først en knude v_1. Da findes en knude v_2 som er forbundet med v_1. Der findes yderligere en knude v_3 som er forbundet med både v_1 og v_2. På denne måde kan vi fortsætte indtil vi har $n+1$ knuder som alle er forbundet med hinanden, dvs. grafen indeholder en komplet K_{n+1}-delgraf. Vælg nu de n knuder som ikke indgår i delgrafen K_{n+1}. Da findes en knude fra K_{n+1} som er forbundet med alle disse n knuder, og dermed er denne knude forbundet med samtlige knuder i grafen.

Opgave 1.8.3. Vi konstruerer en orienteret graf ved at identificere spionerne med knuder og lader der være en kant fra v til w hvis v overvåger w. Når man udtager ti tilfældige knuder, skal der for hver knude udgå mindst én kant til en af de ni andre knuder samt ende mindst én kant som udgår fra en af de ni andre knuder. Derfor udgår der mindst syv kanter fra hver knude, og der ender mindst syv kanter i hver knude. Der findes altså for hver knude højst én anden knude som knuden ikke er nabo til.

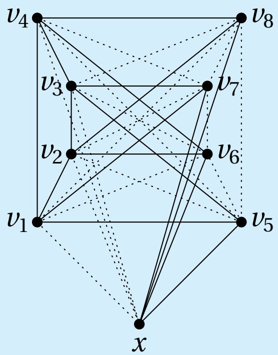
Antag nu at en gruppe på 11 knuder ikke kan nummereres som omtalt. Antag yderligere at der findes mindst én knude blandt de 11 som er nabo til alle de ti andre knuder, og lad v være en sådan. Nummerér de ti resterende $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ så der går en kant fra v_1 til v_2, en kant fra v_2 til v_3, …, og en kant fra v_{10} til v_1. Vi er sikre på at der findes mindst én af de ti hvorfra der går en kant til v, lad os sige v_1. Hvis der går en kant fra v til v_2, vil $v_1, v, v_2, \ldots, v_{10}$ give den ønskede rækkefølge, så det er umuligt, og der går dermed en kant fra v_2 til v. På denne måde ses at der går en kant fra alle ti til v, hvilket er en modstrid. Dermed må enhver af de 11 knuder have præcis én blandt de andre ti som de ikke er nabo til, men dette kan ikke lade sig gøre da 11 er ulige. Vores startantagelse om at en gruppe på 11 tilfældige knuder ikke kan nummereres som ønsket, er altså forkert.

Opgave 1.8.4. Den grundlæggende idé er at udnytte at to på hinanden følgende tal er indbyrdes primiske. Vælg en tilfældig knude v, og vælg en tur fra v med maksimal længde. Kald knuden hvor turen ender, for w (knuden kan være identisk med v). Nummerér turens kanter fortløbende. Alle de passerede knuder opfylder nu betingelsen da to af deres kanter er nummererede med to på hinanden følgende tal. Knuden v har en kant med tallet 1, og knuden w har enten kun én nabokant, eller også har den to nabokanter der er nummererede med to på hinanden følgende tal (eller også er den lig v), så de opfylder begge betingelsen. Vælg nu en ny knude som allerede har en nummereret kant, og følg samme procedure som før. Da grafen er sammenhængende, kan man på denne måde nummerere samtlige kanter så grafen opfylder betingelserne.

Opgave 1.8.5. Opfat personerne i gruppen som knuder i en graf, og lad to knuder være forbundet hvis de er venner. Vi viser nu at når alle personerne har holdt en fest, så er hver eneste sammenhængskomponent blevet en komplet graf. Dette viser nemlig det ønskede.

Lad G' være en sammenhængskomponent inden festerne starter, og lad G'' være den sammenhængskomponent som indeholder G', efter alle festerne. Antag at der er to knuder v og w som ikke er naboer i G''. Da G' er sammenhængende, findes en sti mellem v og w i G'. Lad nu $v, v_1, v_2, \ldots, v_s, w$ være en kortest mulig sti fra v til w i G'. Når v_i holder en fest, vil de to naboer i stien blive venner, og der opstår en ny sti som er en kant kortere end den gamle. Når $v_1, v_2, \ldots, v_s$ alle har holdt fest (i en eller anden rækkefølge), er stien mellem v og w reduceret fra at være en sti af længde $s+1$ til en sti af længde 1, og v og w er dermed naboer i G'' hvilket er i modstrid med antagelsen. Dette viser det ønskede.

Opgave 1.8.6. Først viser vi at der findes en farvning af 32 af kanterne så der ikke findes en blå eller rød K_3-delgraf. Lad fire af knuderne v_1, v_2, v_3, v_4 danne en kreds hvor kanterne er røde, mens v_1v_3 og v_2v_4 ikke er farvede, og fire andre knuder w_1, w_2, w_3, w_4 danne en kreds hvor kanterne er blå, mens $w_1 w_3$ og w_2, w_4 ikke er farvede. Kanten mellem v_i og w_j farves rød hvis i og j har samme paritet, og ellers blå. Den sidste knude kaldes x. Kanten fra x til v_i, $i = 1,2,3,4$, farves blå, og kanten fra x til w_i, $i = 1,2,3,4$, farves rød. Denne graf har 32 farvede kanter, men ingen delgraf K_3 med kanter i samme farve. (Overvej.)



Vi mangler at vise at for $n = 33$ kan vi altid finde en ensfarvet delgraf K_3. Der er tre kanter som ikke er farvede. Vælg en naboknude til hver af disse kanter. De resterende seks (eller flere) knuder udgør nu sammen med de tilhørende kanter en komplet graf hvor alle kanter er blå eller røde, og da $R(3,3) = 6$, findes en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve.

Opgave 1.8.7. Det er muligt at ende med n kanter, men ikke med færre. Først viser vi at det er muligt med n, og det gør vi ved at se på en graf med n knuder og n kanter og derfra udføre processen baglæns til vi ender med K_n. Lad G være en graf med knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_n$ så to knuder med to på hinanden følgende indeks er forbundet med en kant, og v_1 og v_3 yderligere er forbundet med en kant. Denne graf har n kanter. Knuden v_4 er forbundet med en sti af længde tre til knuderne v_1, v_2, v_3 og kan derfor forbindes med disse når man udfører det tilladte træk baglæns. Dermed opnås at knuderne v_1, v_2, v_3, v_4 udgør en komplet graf med fire knuder. Tilsvarende er v_5 nu forbundet med en sti af længde tre til knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, og der kan derfor tilføjes en kant mellem v_5 og disse knuder så de tilsammen udgør en komplet graf med fem knuder. Ved at fortsætte på denne måde ender vi med K_n.

Nu viser vi at det er umuligt at ende med $n-1$ eller færre kanter. Ved den beskrevne proces bliver grafen ved med at være sammenhængende, dvs. man ikke kan ende med færre end $n-1$ kanter. Hvis man ender med en graf med $n-1$ kanter, er den et træ og dermed todelt. Hvis man herfra udfører processen baglæns, bliver den graf man får, ved med at være todelt da fire er lige, og man kan derfor ikke ende med K_n som ikke er todelt. Dermed er det umuligt at ende med en graf med færre end n kanter, dvs. n kanter er det minimale antal.

Opgave 1.8.8. Betragt personerne i gruppen som knuder i en graf, og forbind to knuder med en kant hvis de udveksler postkort. Da alle knuder har valens tre, ved vi at grafen indeholder en kreds. Vælg en kreds af minimal længde.

Antag at den minimale kreds har længde tre, og kald kredsen for v_1, v_2, v_3. Vi undersøger nu om der findes en knude v_4 som er forbundet til to af de tre knuder. Hvis der ikke gør, kan man lade den ene gruppe være v_1, v_2, v_3 og den anden gruppe resten. Hvis der gør, og v_4 er nabo til lad os sige v_1 og v_2, undersøger vi om der findes endnu en knude v_5 som er forbundet til to knuder blandt v_1, v_2, v_3, v_4. Hvis der ikke gør, kan vi inddele i to grupper ved at lade v_1, v_2, v_3, v_4 være den ene gruppe. Hvis der gør, må v_5 nødvendigvis være forbundet til v_3 og v_4, da alle knuder har valens tre, og nu er v_1, v_2, v_3, v_4 naboer til tre indenfor gruppen v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, så denne gruppe kan fungere som den ene gruppe da ingen uden for gruppen kan være naboer til to fra gruppen. (Bemærk at der er knuder ud over de nævnte, da $n > 6$.)

Antag at den minimale kreds har længde fire, og kald kredsen for v_1, v_2, v_3, v_4. Vi undersøger nu om der findes en knude v_5 som er nabo til to knuder fra kredsen. Hvis der ikke gør, kan v_1, v_2, v_3, v_4 udgøre den ene gruppe. Hvis der gør, må v_5 være nabo til to knuder som ikke er naboer, fx v_1 og v_3, da der ellers findes en kreds af længde tre. Hvis der ikke findes en knude som er nabo til to af knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, kan disse fem knuder danne den ene gruppe. Hvis der findes en sådan knude v_6, må den være forbundet til to af knuderne v_2, v_4, v_5, lad os uden tab af generalitet sige v_2 og v_4. Hvis der ikke findes en knude som er forbundet til to af knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_6$, danner disse en gruppe. Hvis der gør, må denne knude v_7 være forbundet til v_5 og v_6 da det er de eneste som ikke allerede er forbundet til tre andre knuder. Knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_7$ danner nu en gruppe, da ingen knude uden for denne gruppe kan være forbundet til to knuder fra gruppen fordi alle på nær v_7 allerede er forbundet til tre knuder. (Bemærk at der er knuder ud over de nævnte, da $n > 6$, og der umuligt kan være syv knuder i alt når hver er forbundet til præcis tre

andre.)

Hvis den minimale kreds er længere end fire, da findes ingen knude uden for kredsen som er forbundet til to knuder fra kredsen, da kredsen ellers ikke er minimal. Dermed kan knuderne i denne kreds danne en gruppe så det ønskede er opfyldt. Der må desuden være knuder som ikke er indeholdt i kredsen, da hver knude har tre naboer, og kredsen har minimal længde.

Stikordsregister