1 Geometri

I dette kapitel får du en grundig introduktion til klassisk geometri. Kapitlet forudsætter kendskab til grundlæggende viden om vinkler, retvinklede trekanter og ensvinklede trekanter, og fra afsnit 1.9 og frem kræves der også kendskab trigonometri.

Det første afsnit giver gode råd til hvordan man arbejder med geometriopgaver, mens afsnit 1.2-1.4 introducerer grundlæggende teori om trekanter og cirkler. Herefter bliver teorien mere avanceret og opgaverne sværere. Der angives engelske gloser til de centrale begreber.

Indhold

1.1 Kom i gang med geometri

Klassisk geometri tager tid at blive fortrolig med, og mange opgaver kræver tålmodighed. Ofte tager det tid blot at tegne en god figur. I dette afsnit præsenteres nogle tip til geometriopgaver, og nogle af tippene demonstreres med eksempler. Som titlen "Kom i gang med geometri" antyder, er det en slags opvarmning inden vi går mere i dybden med teori og opgaver. Her bygger vi på helt grundlæggende geometriske egenskaber som det forudsættes er kendte, men flere af dem nævner vi, og andre beviser vi ligefrem for at illustrere et tip til geometri.

Tip til geometri

Tegn. Tegn en god, stor og præcis tegning med passer og lineal. Hvis du skal tegne en vilkårlig trekant, så pas på den ikke bliver retvinklet eller ligebenet.

Markér på figuren. Se grundigt på figuren og de oplysninger du har, og markér rette vinkler, ens vinkler og lige lange linjestykker.

Gå på vinkeljagt. Overvej om du kan finde ens vinkler, og se fx om de giver ensvinklede trekanter.

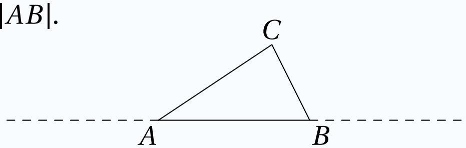
Tænk baglæns. Hvis du skal bevise noget, hvad har du så brug for at vise som medfører dette?

Udvid figuren. Tegn en ny linje, indfør et ekstra punkt, spejl eller drej dele af figuren, ... Geometriopgaver er altid svære når man skal udvide figuren, for man kan let komme til at lave en udvidelse der ikke hjælper, men blot forvirrer. Det handler om at overveje hvad man har brug for.

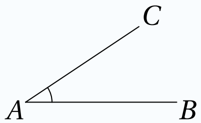
Få overblik. Hvis du er gået helt i stå, så vend tilbage til opgaveformuleringen, og overvej grundigt hvad de oplysninger du har, medfører. Gå derefter igennem dine argumenter igen, og få overblik over hvad du er nået frem til. Måske opdager du noget du før havde overset.

Notation

Den uendeligt lange linje gennem A og B betegnes *linjen* AB, mens linjestykket fra A til B betegnes *linjestykket* AB. Hvis linjestykket er en side i en trekant, kalder vi det også ofte blot *siden* AB. *Længden* af linjestykket AB betegnes $|AB|$.



Vinkel $\angle BAC$ betyder vinklen med vinkelspids i A og AB og AC som vinkelben.



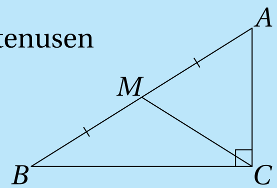
linjestykke *line segment*

I det næste eksempel illustrerer vi tippet "udvid figuren" ved at bevise to vigtige egenskaber ved retvinklede trekanter:

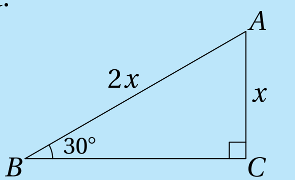
Sætning 1.1.1. Retvinklede trekanter

Lad ABC være en retvinklet trekant, hvor vinkel C er ret.

i) Linjen fra vinkel C til midtpunktet M af hypotenusen inddeler trekanten i to ligebenede trekanter.

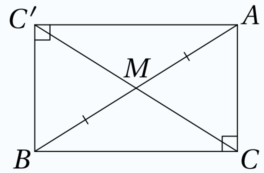


ii) En spids vinkel i trekant ABC er $30°$ netop når den modstående katete til vinklen er halvt så stor som hypotenusen. Vi kalder denne type trekant for en $30°$- $60°$- $90°$-trekant.



Eksempel 1.1.1. Udvid figuren

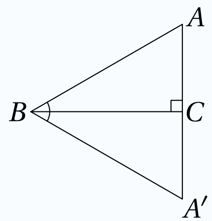
i) Drej trekanten $180°$ om punktet M. Firkant $AC'BC$ er et rektangel: Da M er midtpunket af AB, betyder det at vi ved en drejning på $180°$ om punktet M fører A i B og omvendt. Desuden bliver AC' parallel med BC da vi drejer $180°$, og vinklen ved C' har samme størrelse som C, dvs. den er ret. Dermed er $AC'BC$ et rektangel.



Da vi drejer $180°$ om M, betyder det også at C, M og C' ligger på en linje, og denne linje er diagonal i rektanglet. Diagonalerne i rektanglet skærer derfor hinanden i M. Af symmetrigrunde deler diagonalerne rektanglet i fire ligebenede trekanter. Dette viser at linjestykket CM deler trekant ABC i to ligebenede trekanter.

ii) Spejl den retvinklede trekant ABC i kateten BC.

Antag først at vinkel $\angle ABC = 30°$. Det følger af vinkelsummen i en trekant at $\angle BAC = 60°$. Desuden må $\angle ABA' = 2 \cdot \angle ABC = 2 \cdot 30° = 60°$. Altså er alle vinkler i trekant ABA' lig med $60°$, dvs. trekant ABC er ligesidet. Det betyder at kateten AC er halvt så stor som hypotenusen AB.



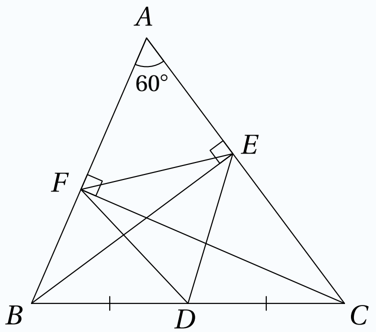
Antag omvendt at kateten AC er halvt så stor som hypotenusen. Det følger per konstruktion at $|AA'| = |AB| = |A'B|$, dvs. trekant ABA' er ligesidet. Dermed er alle vinkler $60°$. Da vi har spejlet trekant ABC i kateten BC, må $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle ABA' = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

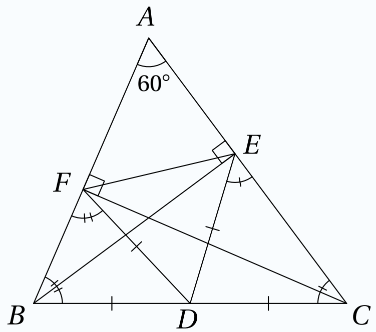
Opgave 1.1.1. Bevis sætning 1.1.1 ii) uden at udvide figuren, men ved i stedet at benytte i).

Eksempel 1.1.2. Illustration af de fire første tip

Lad ABC være en spidsvinklet trekant med $\angle BAC = 60°$, og lad D være midtpunktet af BC. Punkterne E og F er fodpunkterne for højderne fra henholdsvis B og C. Vis at trekant DEF er ligesidet.

For at løse denne opgave tegner vi først en god og præcis tegning. Derefter markerer vi de rette vinkler, størrelsen af vinkel $\angle BAC$, samt at BD og CD er lige lange. Se figuren til venstre.





Nu går vi på vinkeljagt. Punktet D er midtpunktet af hypotenusen i den retvinklede trekant BCF og den retvinklede trekant BCE, dvs. ifølge sætning 1.1.1 i) er trekanterne $\triangle BDF$ og $\triangle EDC$ ligebenede. Det giver at trekant DEF er ligebenet med $|DE| = |DF|$.

Til slut tænker vi baglæns. Hvis vi skal vise at trekant DEF er ligesidet, så er det nu nok at vise at $\angle FDE = 60°$. Vi skal altså se om vi ikke kan bestemme denne vinkel med den viden vi allerede har om vinklerne. Umiddelbart kan vi se at

$$\angle FDE = 180° - \angle BDF - \angle EDC,$$

så hvis vi kan bestemme de to sidste vinkler, så har vi også den første som vi er interesseret i.

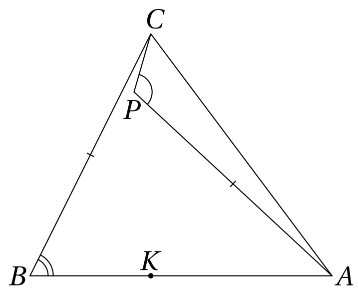
Kald vinkel $\angle ABC = \angle B$ og $\angle BCA = \angle C$. Ved at udnytte at $\angle B + \angle C = 120°$ fordi $\angle BAC = 60°$, og at $\triangle BDF$ og $\triangle EDC$ er ligebenede, får vi (se figuren til højre)

$$\begin{aligned}\angle FDE &= 180° - \angle BDF - \angle EDC \\ &= 180° - (180° - 2\angle B) - (180° - 2\angle C) \\ &= 2(\angle B + \angle C) - 180° = 2 \cdot 120° - 180° = 60°.\end{aligned}$$

Dermed er trekant DEF en ligesidet trekant.

Opgave 1.1.2. I en trekant ABC er D midtpunktet af siden BC, og E er fodpunktet for højden fra B. Desuden er $\angle ADB = 45°$ og $\angle ACB = 30°$. Vis at trekant BDE er en ligesidet trekant, og bestem $\angle BAD$.

Opgave 1.1.3. Punktet P ligger inden i trekant ABC så $|BC| = |AP|$ og $\angle APC + \angle ABC = 180°$. Desuden er K et punkt på siden AB så $|AK| = |KB| + |PC|$. Bevis at $\angle AKC$ er ret.



Hint: 46, 11

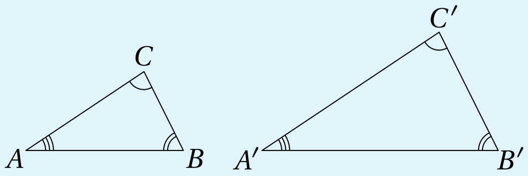
1.2 Trekantens linjer

De vigtigste linjer i en trekant udover siderne er medianerne, midtnormalerne, vinkelhalveringslinjerne og højderne. De har alle hver deres særlige egenskaber som vi skal se nærmere på i dette afsnit, men først skal vi se på ensvinklede trekanter og transversaler.

Vi starter med at definere ensvinklede trekanter og med denne kendte sætning om ensvinklede trekanter som vi ikke beviser.

Definition af ensvinklede og kongruente trekanter

To trekanter ABC og $A'B'C'$ er *ensvinklede* når deres vinkler er parvis lige store.



Vi skriver $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Læg mærke til at det betyder at $\angle A = \angle A'$, osv. Det er altså vigtigt i hvilken rækkefølge bogstaverne står.

To trekanter ABC og $A'B'C'$ er *kongruente* når de er ensvinklede, og når deres sider yderligere er parvis lige store.

ensvinklede trekanter *similar triangles*
kongruente trekanter *congruent triangles*

Sætning 1.2.1. Ensvinklede trekanter

To trekanter ABC og $A'B'C'$ er ensvinklede netop hvis

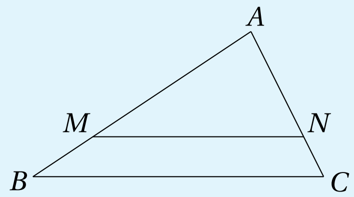
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|},$$

eller netop hvis $\angle BAC = \angle B'A'C'$ og

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}.$$

Definition af transversal

En *transversal* i en trekant er et linjestykke der forbinder to punkter på to forskellige sider i trekanten. En transversal kaldes en *paralleltransversal* hvis den er parallel med en af siderne i trekanten, og en *midtpunktstransversal* hvis den forbinder midtpunkterne af to sider.



transversal *transversal*
midtpunktstransversal *mid-segment*

Sætning 1.2.2. En transversal fra punktet M på siden AB til punktet N på siden AC er en paralleltransversal netop hvis

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{eller} \quad \frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|MB|}{|NC|}.$$

En midtpunktstransversal er også en paralleltransversal.

Bevis. Først viser vi at MN er parallel med BC netop hvis $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. At MN er parallel med BC, er ensbetydende med at $\triangle BAC$ er ensvinklet med $\triangle MAN$, hvilket igen ifølge sætning 1.2.1 er ensbetydende med at $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ da de to trekanter har en fælles vinkel A.

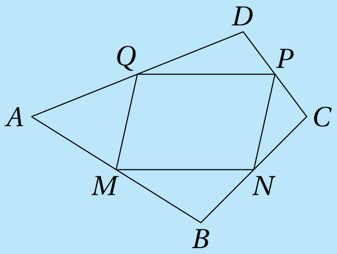
En midtpunktstransversal er derfor også en paralleltransversal da begge forhold er $\frac{1}{2}$.

At $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, er ensbetydende med at $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|MB|}{|NC|}$, da

$$\begin{aligned} |AM||AC| = |AB||AN| \quad &\Leftrightarrow \quad |AM||AC| - |AM||AN| = |AB||AN| - |AM||AN| \\ &\Leftrightarrow \quad |AM||NC| = |AN||MB|. \quad \square \end{aligned}$$

Sætning 1.2.3. Midtpunkterne af siderne i en firkant

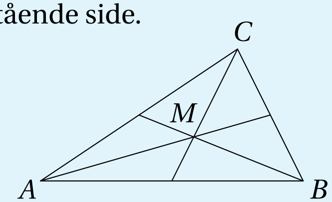
Lad $ABCD$ være en firkant og M, N, P og Q midtpunkterne af henholdsvis AB, BC, CD og DA. Da er $MNPQ$ et parallelogram.



Opgave 1.2.1. Vis sætning 1.2.3. *Hint*: 19

Definition af median

En *median* i en trekant er et linjestykke der forbinder en vinkelspids med midtpunktet af modstående side.



median *median*

Sætning 1.2.4. Medianer

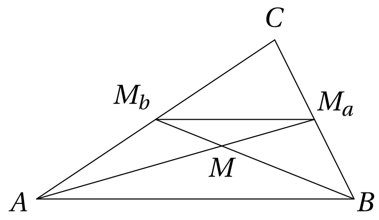
De tre medianer i en trekant går igennem samme punkt, og dette punkt deler medianerne i forholdet 1:2.

Medianernes skæringspunkt betegnes normalt M.

medianernes skæringspunkt *centroid*

Bevis. Lad ABC være en trekant, og kald medianerne for henholdsvis m_a, m_b og m_c og medianernes fodpunkter på siderne a, b og c for henholdsvis M_a, M_b og M_c. Medianerne m_a og m_b skærer hinanden i et punkt vi kalder M.

Vi vil nu vise at de deler hinanden i forholdet $1:2$. Da M_a og M_b er midtpunkter på henholdsvis a og b, er M_aM_b midtpunktstransversal og dermed parallel med c. Dvs. at $\triangle ABC$ og $\triangle M_bM_aC$ er ensvinklede med forholdet $1:2$ og dermed specielt $2|M_aM_b| = |AB|$.



Desuden er trekanterne ABM og M_aM_bM ensvinklede da M_aM_b og AB er parallelle, og forholdet mellem trekanterne er netop forholdet mellem M_aM_b og AB, dvs. $1:2$. Her af ses at m_a og m_b deler hinanden i forholdet $1:2$.

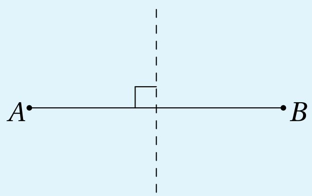
Da m_a og m_b var vilkårlige medianer, må m_a og m_c også dele hinanden i forholdet $1:2$, dvs. at alle tre medianer går gennem samme punkt M. □

Opgave 1.2.2. I trekant ABC er sidelængderne $a = 5$, $b = 6$ og $c = 5$. Lad M være medianernes skæringspunkt. Bestem længden $|BM|$. *Hint*: 17

Definition af midtnormal

En *midtnormal* til et linjestykke AB er den linje som går gennem midtpunktet af linjestykket AB og står vinkelret på AB.

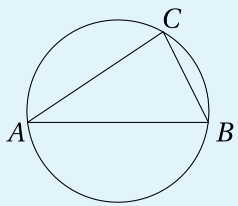
Midtnormalen er dermed det *geometriske sted* for de punkter P der har samme afstand til A og B, altså mængden af punkter P som opfylder at $|AP| = |BP|$, da det netop er disse punkter som opfylder betingelsen.



midtnormal *perpendicular bisector*

Definition af den omskrevne cirkel

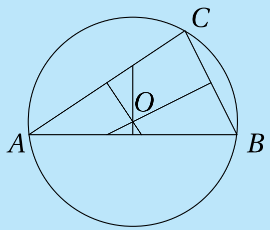
Den *omskrevne cirkel* til trekant ABC er cirklen der går gennem punkterne A, B og C.



den omskrevne cirkel *the circumcircle*
centrum for den omskrevne cirkel *the circumcenter*

Sætning 1.2.5. Midtnormaler

I en trekant går de tre midtnormaler gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel.



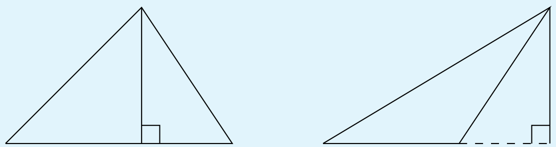
Midtnormalernes skæringspunkt betegnes normalt O.

Opgave 1.2.3. Bevis sætning 1.2.5. *Hint*: 47

Definition af højde

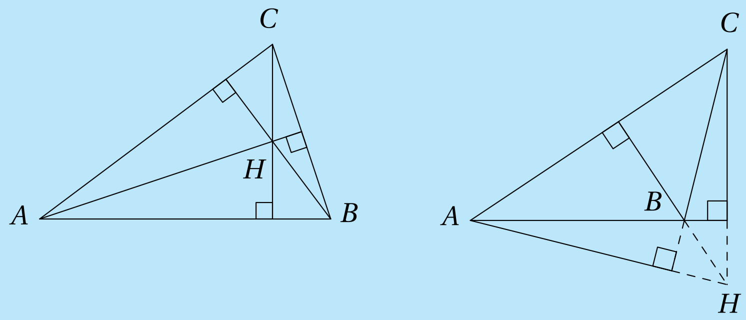
En *højde* i en trekant er en linje der går gennem en vinkelspids og står vinkelret på modstående side. Bemærk at en højde kan falde uden for trekanten!

højde *altitude*



Sætning 1.2.6. Højder

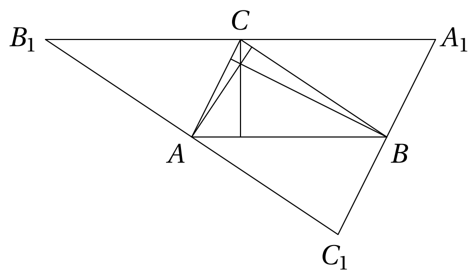
De tre højder i en trekant går gennem samme punkt.



Højdernes skæringspunkt betegnes normalt H.

højdernes skæringspunkt *orthocenter*

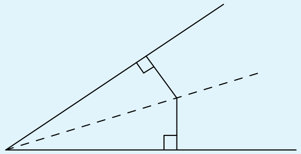
Bevis. Tegn linjer gennem henholdsvis A, B og C som er parallelle med modstående sider, og lad A_1, B_1 og C_1 være skæringspunkterne mellem disse linjer som vist på figuren.



Firkant $ACBC_1$ og firkant ACA_1B er parallelogrammer da siderne per konstruktion er parvis parallelle. Altså er $|C_1B| = |AC| = |BA_1|$. Tilsvarende ses at $|C_1A| = |AB_1|$ og $|B_1C| = |CA_1|$. Punkterne B, A og C er dermed midtpunkter af siderne i $\triangle A_1B_1C_1$. Højderne i $\triangle ABC$ er derfor midtnormaler i $\triangle A_1B_1C_1$, og de går ifølge sætning 1.2.5 om midtnormaler gennem samme punkt. $\square$

Definition af vinkelhalveringslinje

En *vinkelhalveringslinje* til en vinkel er den linje som deler vinklen i to lige store vinkler.

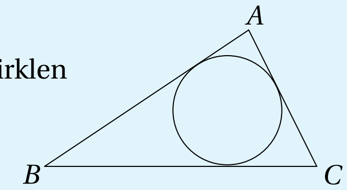


Vinkelhalveringslinjen er altså *geometriske sted* for de punkter der har samme afstand til vinklens ben, da det netop er disse punkter som opfylder betingelsen.

vinkelhalveringslinje *angle bisector*

Definition af den indskrevne cirkel

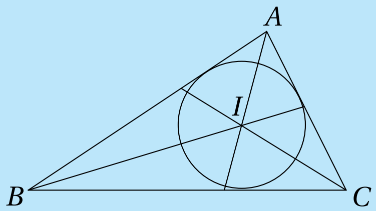
Den *indskrevne cirkel* til trekant ABC er cirklen der tangerer alle tre sider i trekanten.



den indskrevne cirkel *the incircle*
centrum for den indskrevne cirkel *the incenter*

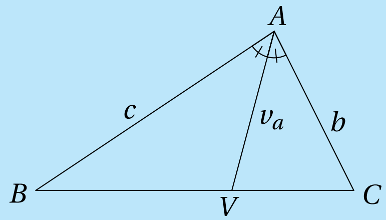
Sætning 1.2.7. Vinkelhalveringslinjer

I en trekant går de tre vinkelhalveringslinjer gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for den indskrevne cirkel.



Vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt betegnes normalt I.

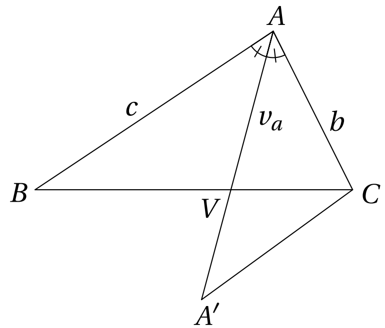
En vinkelhalveringslinje deler modstående side i trekanten i samme forhold som forholdet mellem vinklens to hosliggende sider.



Dvs. hvis fodpunktet for vinkelhalveringslinjen v_a fra A til siden BC betegnes V, så er

$$\frac{|CV|}{|BV|} = \frac{b}{c}.$$

Bevis. Vi beviser sidste del af sætningen og overlader første del til læseren i næste opgave. Lad A' være skæringspunktet mellem linjen gennem C parallel med AB og linjen AV.



Da AB og CA' er parallelle, og AV er vinkelhalveringslinje, er

$$\angle AA'C = \angle VA'C = \angle BAV = \angle VAC = \angle A'AC.$$

Altså er trekant $AA'C$ ligebenet med $|A'C| = b$. Trekanterne BAV og $CA'V$ er pr. konstruktion ligedannede, hvilket giver

$$\frac{|CV|}{|BV|} = \frac{|CA'|}{|BA|} = \frac{b}{c}$$

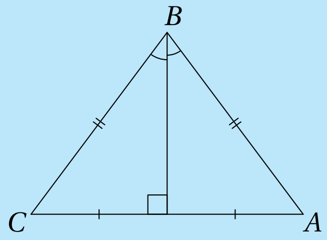
som ønsket. □

Opgave 1.2.4. Bevis første del af sætning 1.2.7. *Hint*: 28

Opgave 1.2.5. I en trekant ABC er sidelængderne $a = 8$, $b = 7$ og $c = 6$. Vinkelhalveringslinjen fra A skærer siden BC i punktet V. Bestem længden af BV.

Sætning 1.2.8. Ligebenede trekanter

Lad ABC være en ligebenet trekant hvor $a = c$. Da er højden fra B, medianen fra B, vinkelhalveringslinjen fra B og midtnormalen på siden AC sammenfaldende.



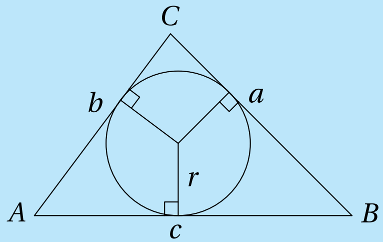
ligebenet trekant *isosceles triangle*

Opgave 1.2.6. Bevis sætning 1.2.8.

Sætning 1.2.9. Areal og radius i den indskrevne cirkel

I en trekant betegner r radius i den indskrevne cirkel, s trekantens halve omkreds og T trekantens areal.
Der gælder at

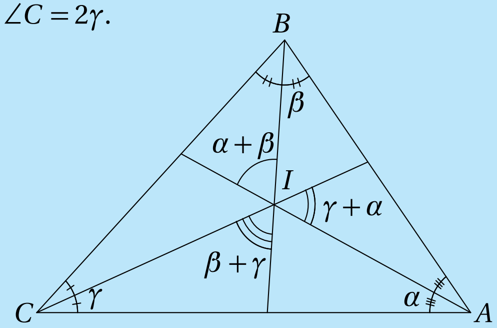
$$T = rs.$$



Opgave 1.2.7. Bevis sætningen 1.2.9.

Sætning 1.2.10. Den indskrevne cirkel og vinkler

I en trekant ABC betegner I centrum for den indskrevne cirkel, og $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$ og $\angle C = 2\gamma$.



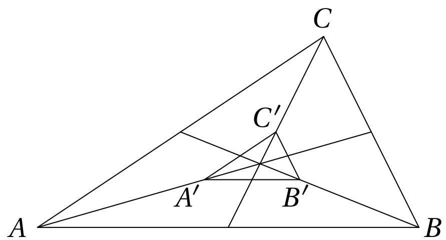
Vinklerne ved I er henholdsvis $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ og $\gamma+\alpha$ som vist på figuren.

Opgave 1.2.8. Bevis sætning 1.2.10.

Opgave 1.2.9. Vis at medianerne i en trekant deler trekanten i seks små trekanter med samme areal.

Opgave 1.2.10. Fra vinkelspidsen C i trekant ABC tegnes en ret linje der halverer medianen fra A. I hvilket forhold deler denne linje siden AB? (Georg Mohr-Konkurrencen 1995) *Hint*: 30

Opgave 1.2.11. I en trekant ABC med areal 1 indtegnes medianerne. Midtpunktet af medianen m_a kaldes for A', midtpunktet af medianen m_b kaldes for B', og midtpunktet af medianen m_c kaldes for C'. Bestem arealet af trekant $A'B'C'$. *Hint*: 45

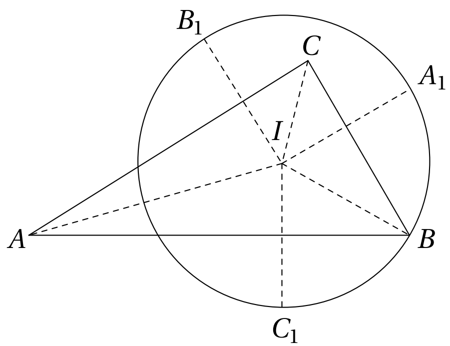


Opgave 1.2.12. Lad I være centrum i den indskrevne cirkel til trekant ABC, og lad yderligere A_1 og A_2 være to forskellige punkter på linjen BC så $|AI| = |A_1I| = |A_2I|$, B_1 og B_2 være to forskellige punkter på linjen AC så $|BI| = |B_1I| = |B_2I|$, og C_1 og C_2 være to forskellige punkter på linjen AB så $|CI| = |C_1I| = |C_2I|$. Vis at

$$|A_1A_2| + |B_1B_2| + |C_1C_2|$$

er trekantens omkreds. *Hint*: 1

Opgave 1.2.13. Lad I være vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt i en trekant ABC, og lad yderligere A_1, B_1 og C_1 være spejlingerne af I i henholdsvis a, b og c. Cirklen gennem A_1, B_1 og C_1 går også gennem B. Bestem vinklen $\angle ABC$. *Hint*: 38

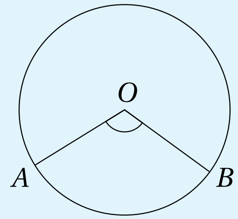


1.3 Cirkler og vinkler

I dette afsnit ser vi på centrale egenskaber for vinkler der spænder over cirkelbuer, dvs. vinkler i cirkler.

Definition af centervinkel

En *centervinkel* i en cirkel er en vinkel der har toppunkt i centrum og radier som vinkelben. En centervinkel måles ved den bue den spænder over.

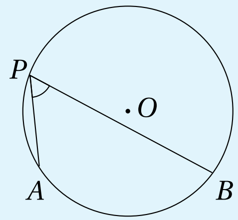


På figuren er $\angle AOB$ en centervinkel som spænder over buen AB, og vi skriver $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$.

bue *arc*
centervinkel *central angle*

Definition af periferivinkel

En *periferivinkel* i en cirkel er en vinkel der har toppunkt på cirklen og korder som vinkelben.

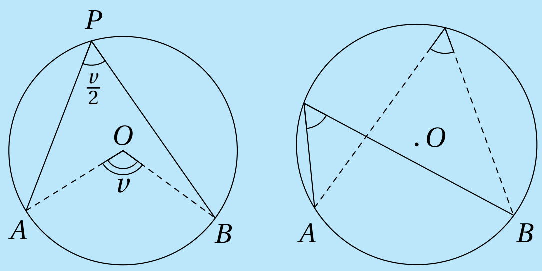


På figuren er $\angle APB$ en periferivinkel som spænder over buen AB.

korde *chord*
periferivinkel *inscribed angle*

Sætning 1.3.1. Periferivinkler

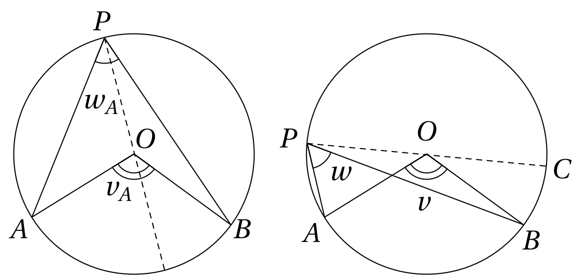
En periferivinkel er halvt så stor som den bue den spænder over.



To periferivinkler som spænder over samme bue, er lige store.

Bevis. Lad v være en centervinkel og w en periferivinkel der begge spænder over buen AB. Kald centrum for O og punktet hvor w rører periferien, for P.

Antag først at vinkelbenene for vinkel v kun skærer vinkelbenene for w i punkterne A og B. Da deler diameteren gennem P vinklerne v og w i to vinkler som vi kalder henholdsvis v_A og v_B og w_A og w_B. Trekant AOP er nu en ligebenet trekant med to lige store vinkler w_A, og den sidste vinkel er $180° - v_A$. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er $2w_A = v_A$. Tilsvarende fås $2w_B = v_B$, dvs. $2w = v$.



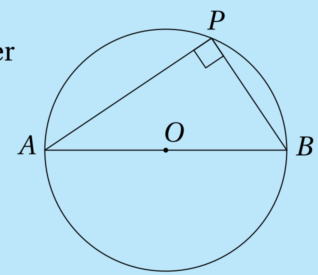
Antag nu at w's ene vinkelben PB skærer v's vinkelben OA. Diameteren gennem P skærer da yderligere periferien i et punkt vi kalder for C. Ifølge det vi lige har vist, er $2\angle BPC = \angle BOC$ og $2\angle APC = \angle AOC$, og dermed

$$2w = 2\angle APC - 2\angle BPC = \angle AOC - \angle BOC = v.$$

En periferivinkel er dermed halvt så stor som den bue den spænder over, og det betyder også at to periferivinkler der spænder over samme bue, er lige store. □

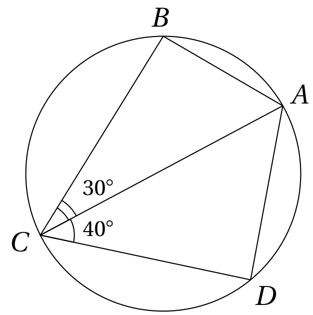
Korollar 1.3.2. Ret periferivinkel

En periferivinkel er ret netop når den spænder over en diameter.

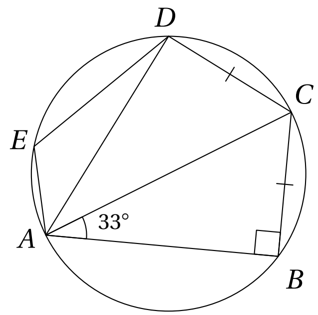


Opgave 1.3.1. Vis korollar 1.3.2.

Opgave 1.3.2. Punkterne A, B, C og D ligger på en cirkel i denne rækkefølge. Desuden er $\angle ACB = 30°$ og $\angle DCA = 40°$. Bestem $\angle BAD$.



Opgave 1.3.2



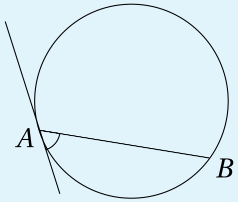
Opgave 1.3.3

Opgave 1.3.3. Punkterne A, B, C, D og E ligger på en cirkel i denne rækkefølge. Desuden er $\angle BAC = 33°$, $\angle ABC = 90°$ og $|BC| = |BD|$. Bestem $\angle DEA$.

Opgave 1.3.4. I en spidsvinklet trekant ABC kaldes centrum for den omskrevne cirkel O og højdernes skæringspunkt for H. Linjen BO skærer den omskrevne cirkel i et punkt Q forskelligt fra B. Vis at $AQCH$ er at parallelogram.
Hint: 3

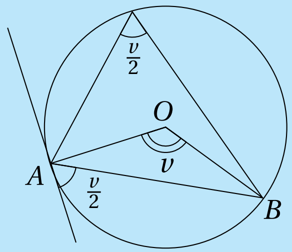
Definition af korde-tangent-vinkel

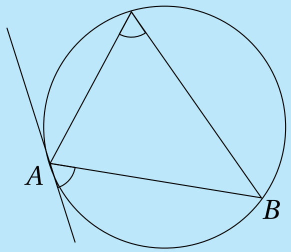
En *korde-tangent-vinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og en korde samt en tangent som vinkelben.



Sætning 1.3.3. Korde-tangent-vinkel

En korde-tangent-vinkel er halvt så stor som den bue korden spænder over, og dermed lige så stor som en periferivinkel der spænder over buen. Se figuren til venstre.





Den omvendte sætning om korde-tangent-vinkler

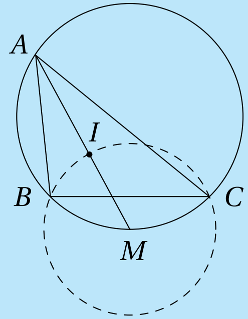
En linje gennem punktet A på cirkelperiferien er tangent til cirklen hvis den vinkel den danner med korden AB, er lige så stor som den periferivinkel der spænder over korden AB. Se figuren til højre.

Opgave 1.3.5. Bevis sætning 1.3.3. *Hint*: 36

Opgave 1.3.6. Lad to cirkler ω_1 og ω_2 skære hinanden i punkterne A og B. Tangenten til ω_1 gennem B skærer ω_2 i punktet C, og tangenten til ω_2 gennem B skærer ω_1 i punktet D. Desuden oplyses at $|AC| = 3$ og $|AD| = 4$. Bestem længden af AB. *Hint*: 18

Sætning 1.3.4. Superpunktet

I en trekant ABC betegner I centrum for den indskrevne cirkel. Lad M være skæringspunktet mellem AI og den omskrevne cirkel. Da er M centrum for cirklen gennem B, C og I.

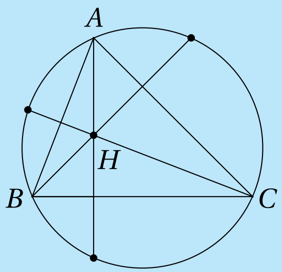


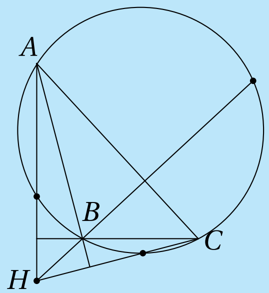
Punktet M kaldes *superpunktet* fordi det har mange interessante egenskaber.

Opgave 1.3.7. Bevis sætning 1.3.4. *Hint*: 4

Sætning 1.3.5. Højdernes skæringspunkt og den omskrevne cirkel

Spejlingen af H i en vilkårlig af trekantens sider ligger på trekantens omskrevne cirkel.



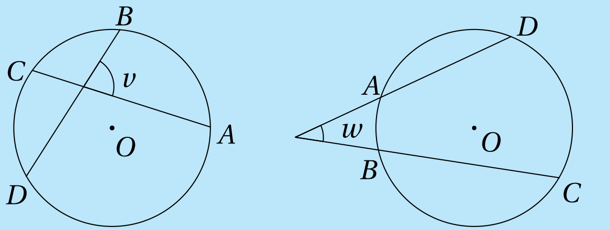


Opgave 1.3.8. Bevis sætning 1.3.5.

Sætning 1.3.6. Vinkler i cirkler

Om vinklerne v og w på figurerne gælder:

$$v = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} \quad \text{og} \quad w = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}.$$

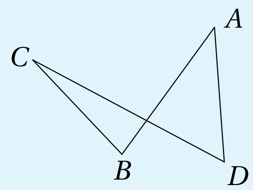


Opgave 1.3.9. Bevis sætning 1.3.6. *Hint*: v: 51, w: 13

1.4 Indskrivelige firkanter

Definition af simple firkanter

En firkant kaldes *simpel* hvis dens sider ikke skærer hinanden. I dette kapitel betegner ordet *firkant* fremover en simpel firkant.



Figuren viser et eksempel på en ikke-simpel firkant.

simpel firkant *simple quadrilateral*

Definition af konvekse firkanter

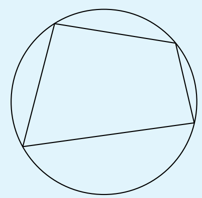
En firkant kaldes *konveks* hvis der for vilkårlige to indre punkter gælder at linjestykket mellem punkterne er indeholdt i firkanten. De konvekse firkanter er altså netop dem der ikke har en vinkel der overstiger 180°.

Generelt defineres en *konveks* figur på tilsvarende måde.

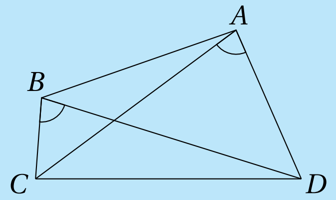
konveks firkant *convex quadrilateral*

Definition af indskrivelige firkanter

En firkant kaldes *indskrivelig* hvis den har en omskreven cirkel.

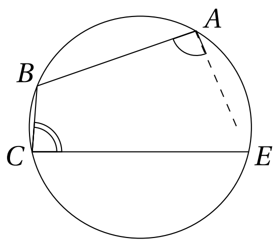


indskrivelig firkant *cyclic quadrilateral*

> **Sætning 1.4.1. Indskrivelige firkanter**
>
> Følgende udsagn om firkanten $ABCD$ er ækvivalente:
>
> i) Firkant $ABCD$ er indskrivelig.
>
> ii) Summen af modstående vinkler er 180°.
>
> iii) Der gælder at $\angle CBD = \angle CAD$ eller tilsvarende.
>
> 
>

Bevis. Først viser vi at i) medfører ii). Antag at en firkant er indskrivelig. To modstående vinkler spænder da tilsammen over hele cirkelperiferien, og summen er derfor 180°.

Derefter viser vi at ii) medfører i). Antag at det for en given firkant $ABCD$ gælder at summen af to modstående vinkler er 180°. Betragt nu den omskrevne cirkel til trekant ABC, og lad punktet E være skæringen mellem cirklen og linjen gennem C og D.



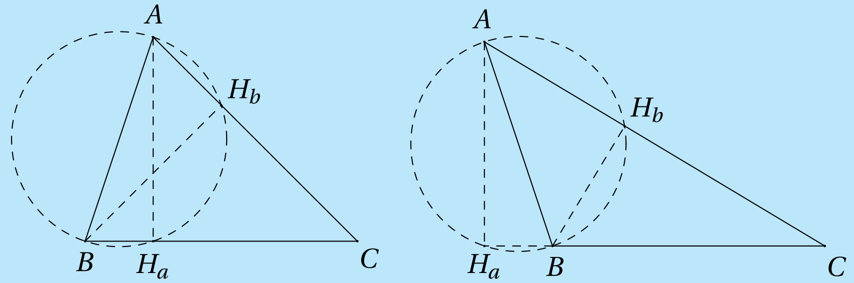
Firkant $ABCD$ er indskrivelig netop hvis D lig E, så det er det vi ønsker at vise. Da vi allerede har vist at i) medfører ii), og firkant $ABCE$ er indskrivelig, må

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle BCE = \angle BAE,$$

dvs. at punktet E ligger på linjen AD og derfor er identisk med D.

Vi har nu vist at de første to udsagn er ækvivalente. Resten af beviset overlades til læseren i følgende opgave. □

Opgave 1.4.1. Bevis resten af sætning 1.4.1.

> **Sætning 1.4.2. Højder og indskrivelige firkanter**
>
> I trekant ABC betegner H højdernes skæringspunkt og H_a og H_b fodpunkterne for højderne fra henholdsvis A og B.
>
> Firkant ABH_aH_b er indskrivelig (evt. AH_aBH_b hvis A eller B er stump), og $\triangle CAB$ og $\triangle CH_aH_b$ er ensvinklede.
>
> 
>

Opgave 1.4.2. Bevis sætning 1.4.2.

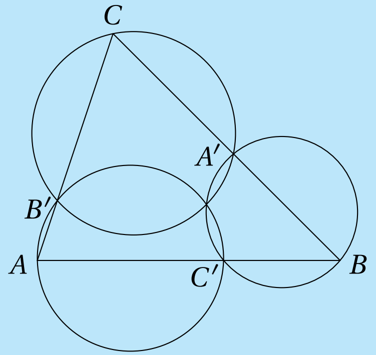
Opgave 1.4.3. Lad H_a, H_b opg H_c være fodpunkterne for højderne fra henholdsvis A, B og C i en spidsvinklet trekant ABC. Vis at AH_a er vinkelhalveringslinje i $\triangle H_aH_bH_c$.

Opgave 1.4.4. Lad ABC være en spidsvinklet trekant. Lad K være fodpunktet for højden fra A, lad L være fodpunktet for højden fra B, og lad M være midtpunktet af AB. Vis at linjen ML og linjen MK tangerer den omskrevne cirkel til trekant CKL. *Hint*: 40

Opgave 1.4.5. I rektanglet $ABCD$ er M midtpunktet af siden AB, og H er et punkt på linjestykket DM så CH står vinkelret på DM. Vis at trekant BCH er ligebenet. *Hint*: 42

Sætning 1.4.3. Miquels sætning

Lad ABC være en trekant, og lad punkterne A', B' og C' ligger på henholdsvis siden BC, siden AC og siden AB.



Da går de omskrevne cirkler til $\triangle AB'C'$, $\triangle BC'A'$ og $\triangle CA'B'$ gennem samme punkt.

Opgave 1.4.6. Bevis sætning 1.4.3.

Opgave 1.4.7. Lad ABC være en spidsvinklet trekant. Linjen l gennem A er tangent til den omskrevne cirkel til trekant ABC. Linjen gennem C vinkelret på CB skærer l i punktet D. Linjen gennem D parallel med AB skærer siden BC i punktet E. Vis at centrum O for den omskrevne cirkel til trekant ABC ligger på linjen AE. *Hint*: 32

Opgave 1.4.8. En firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med AB som diameter. Lad S være skæringspunktet mellem diagonalerne AC og BD, og lad T være projektionen af S på AB, dvs. det punkt T på AB der opfylder at ST står vinkelret på AB. Vis at linjen ST halverer vinkel $\angle CTD$. *Hint*: 10

Opgave 1.4.9. Lad $ABCD$ være en firkant hvor B og D ligger på cirklen Ω med AC som diameter. Lad L være et indre punkt på den korteste af cirkelbuerne CD. Lad yderligere K være skæringspunktet mellem linjerne AL og CD, M skæringspunktet mellem linjerne AD og CL, og N skæringspunktet mellem linjerne MK og BC. Vis at punkterne B, L, M og N ligger på en cirkel. *Hint*: 31, 21

Sætning 1.4.4. Ptolemæus' ulighed

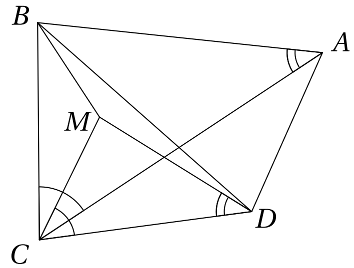
For alle firkanter $ABCD$ gælder Ptolemæus' ulighed

$$|AB||CD| + |BC||DA| \geq |AC||BD|.$$

Der gælder lighedstegn netop hvis firkant $ABCD$ er indskrivelig.

Ptolemæus' ulighed *Ptolemy's inequality*

Bevis. Betragt en firkant $ABCD$. Lad M være et punkt så trekant CDM og trekant CAB er ensvinklede og orienteret samme vej. Dermed er $|AB||CD| = |DM||AC|$.



Pga. konstruktionen er $\angle BCM = \angle ACD$. Da trekant CDM og trekant CAB er ensvinklede, er $|CB||CD| = |CM||CA|$. Altså er også trekant CAD og trekant CBM ensvinklede og dermed $|AD||BC| = |BM||AC|$. I alt giver dette ifølge trekantsuligheden at

$$|AB||CD| + |BC||DA| = |AC|(|DM| + |MB|) \geq |AC||BD|$$

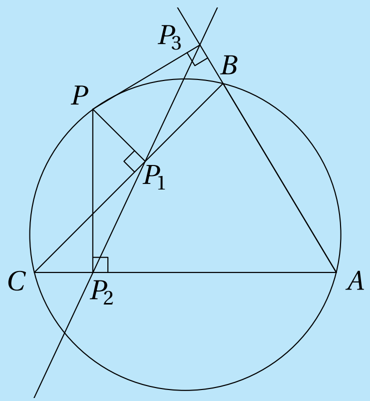
med lighedstegn netop når M ligger på BD. Punktet M ligger på BD netop når $\angle CDB = \angle CAB$, dvs. netop når firkant $ABCD$ er indskrivelig. □

Opgave 1.4.10. En ligesidet trekant ABC er indskrevet i en cirkel. Lad M være et vilkårligt punkt på cirkelbuen BC. Vis at $|MA| = |MB| + |MC|$.

Opgave 1.4.11. En firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med radius 1, $|AB| = 1$, $|AC| = \sqrt{2}$ og $|AD| = 2$. Bestem $|BC|$.

Sætning 1.4.5. Simsonlinjen

Lad ABC være en trekant, P et punkt, P_1 projektionen af P på linjen BC, P_2 projektionen af P på linjen AC og P_3 projektionen af P på linjen AB.



Punktet P ligger på den omskrevne cirkel til trekant ABC netop hvis punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje.

Denne linje kaldes *Simsonlinjen.*

Simsonlinje *Simson line*

Opgave 1.4.12. Bevis sætning 1.4.5. *Hint*: 44

Opgave 1.4.13. Lad ABC være en trekant hvor D, E og F er fodpunkterne for højderne på henholdsvis BC, AC og AB. Lad yderligere P, Q, M og N være projekterne af D på henholdsvis AB, AC, BE og CF. Vis at punkterne P, Q, M og N ligger på linje. *Hint*: 50

1.5 Et punkts potens

Definition af et punkts potens

I en cirkel ω betegnes centrum O og radius r. Et punkt P's *potens* mht. cirklen ω er tallet

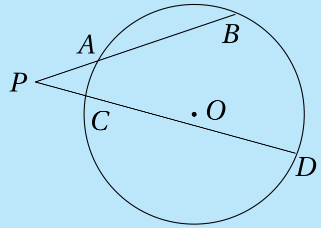
$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = |PO|^2 - r^2.$$

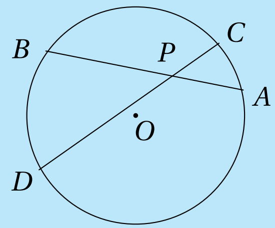
Hvis P ligger på cirkelperiferien, er $\mathrm{Pow}(P,\omega)$ derfor 0, mens den er positiv hvis P ligger uden for cirklen, og negativ hvis P ligger inden for cirklen.

et punkts potens *the power of a point*

Sætning 1.5.1. Et punkts potens

I en cirkel ω betegnes centrum O og radius r. Lad P være et punkt, og lad l og m være to linjer gennem P så l skærer cirklen i punkterne A og B, og m skærer cirklen i punkterne C og D. Hvis en af linjerne tangerer cirklen, er de to punkter sammenfaldende.





Da gælder at

$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$

Hvis P ligger uden for cirklen, er

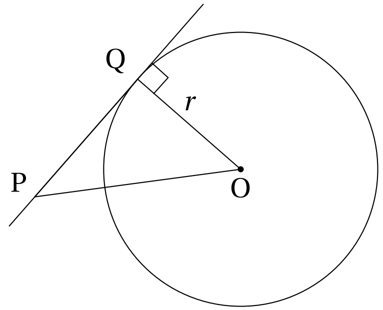
$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = |AP||BP|.$$

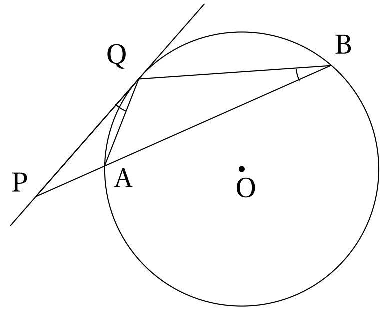
Hvis P ligger inden for cirklen, er

$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = -|AP||BP|.$$

Bevis i tilfældet hvor punktet ligger uden for cirklen. Lad P være et punkt uden for cirklen, og lad l være en vilkårlig linje gennem P som skærer cirklen i to punkter A og B. Vi viser først at

$$|AP||BP| = \mathrm{Pow}(P, \omega).$$





Tegn tangenten til cirklen gennem P som vist på figuren, og kald røringspunktet for Q. Ifølge Pythagoras' sætning er

$$|PQ|^2 = |PO|^2 - r^2 = \mathrm{Pow}(P, \omega).$$

Betragt nu trekanterne $\triangle AQP$ og $\triangle QBP$. Korde-tangent-vinklen $\angle AQP$ er lige så stor som periferivinklen $\angle QBP$ ifølge sætningerne om periferivinkler og korde-tangent-vinkler. Dermed er $\triangle AQP$ og $\triangle QBP$ ensvinklede, og dette giver

$$|PQ|^2 = |AP||BP|.$$

Samlet har vi at

$$|AP||BP| = \mathrm{Pow}(P, \omega).$$

Lad nu m være endnu en linje gennem P som skærer cirklen i to punkter C og D. Ifølge det vi netop har vist, må også

$$|CP||DP| = \mathrm{Pow}(P, \omega),$$

dvs. at

$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$

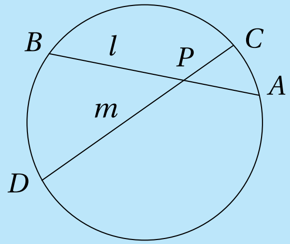
□

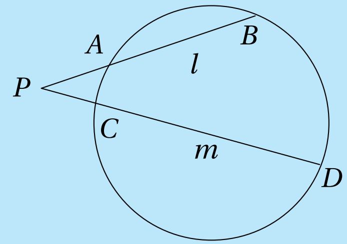
Opgave 1.5.1. Bevis sætningen om et punkts potens i det tilfælde hvor punktet ligger inden i cirklen. (*Hint*: Tegn linjen gennem P og centrum, og vis at $|AP||PB| = (r - |PO|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2$.)

Sætning 1.5.2. Den omvendte sætning om et punkts potens

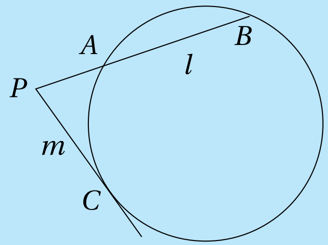
Lad l og m være to forskellige linjer med skæringspunkt P. Lad A og B være to punkter på l på hver sin side af P, og lad C og D være to punkter på m på hver sin side af P. Eller lad både A og B ligge på samme side af P og C og D ligge på samme side af P.

Hvis $|PA||PB| = |PC||PD|$, da ligger A, B, C og D på samme cirkel.





I det tilfælde hvor A og B ligger på samme side af P, og C og D er sammenfaldende, da ligger A, B og C på en cirkel med m som tangent.



Opgave 1.5.2. Bevis sætningen.

Opgave 1.5.3. To cirkler skærer hinanden i punkterne M og N, og den fælles tangent til de to cirkler nærmest N rører cirklerne i P og Q. Vis at trekant PMN og trekant QMN har samme areal. *Hint*: 5

Opgave 1.5.4. I den spidsvinklede trekant ABC skærer højden fra B cirklen med diameter AC i punkterne P og Q, og højden fra C skærer cirklen med diameter AB i punkterne S og T. Vis at P, Q, S og T ligger på samme cirkel. *Hint*: 16

Opgave 1.5.5. To linjer m og n er parallelle. En cirkel tangerer m i punktet A og skærer n i to forskellige punkter B og C. Lad T være et punkt på linjen m så linjestykkerne TC og TB skærer den korteste af cirkelbuerne AC i henholdsvis K og L. Vis at linjen KL halverer linjestykket TA. *Hint*: 2

Opgave 1.5.6. Lad ABC være en ligebenet trekant med $|AB| = |AC|$. Lad E og F være punkter på linjestykket BC så halvcirklen med diameter EF tangerer siderne AB og AC i henholdsvis M og N. Lad yderligere AF skærer halvcirklen i punktet P. Vis at linjen EP halverer linjestykket NM. *Hint*: 26

1.6 Radikalakse og radikalcentrum

Definitionen for punkts potens og sætningen om punkts potens er grundlaget for at indføre begrebet radikalakse:

Definition af radikalakse

Radikalaksen for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler.

radikalakse *radical axis/power line*

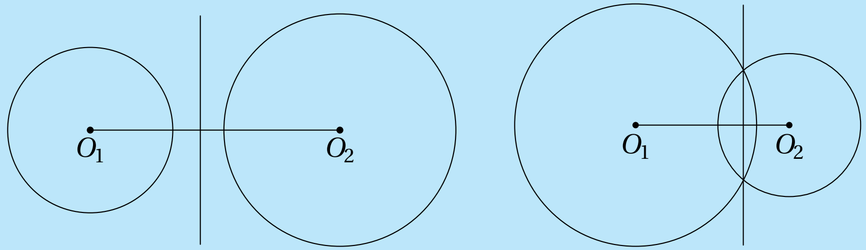
Sætning 1.6.1. Radikalakse

Kald centrum i de to cirkler for henholdsvis O_1 og O_2, cirklernes radier for henholdsvis r_1 og r_2, og lad d betegne afstanden mellem de to centre.

Da er radikalaksen en ret linje der står vinkelret på linjen O_1O_2.

Radikalaksens afstand til henholdsvis O_1 og O_2 er

$$\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \quad \text{og} \quad \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}.$$



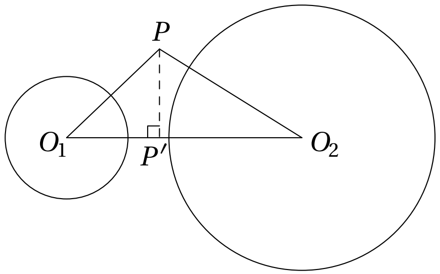
Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Bevis. Antag at P er et punkt på radikalaksen, og lad P' være projektionen af P på O_1O_2. De to første dele af sætningen svarer til at bevise at dette er ensbetydende med at afstanden fra P' til henholdsvis O_1 og O_2 er

$$\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \quad \text{og} \quad \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}.$$

At P er et punkt på radikalaksen, er per definition ensbetydende med at

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2.$$



Dette er ensbetydende med at

$$|PP'|^2 + |O_1P'|^2 - r_1^2 = |PP'|^2 + (d - |O_1P'|)^2 - r_2^2,$$

og yderligere med at

$$|O_1P'| = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \quad \text{og dermed} \quad |O_2P'| = d - \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}.$$

Dermed har vi vist at radikalaksen er en ret linje med de angivne afstande til O_1 og O_2.

Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, har begge punkter potens nul mht. de to cirkler, dvs. A og B ligger på radikalaksen. Da radikalaksen er en linje, er den netop linjen gennem A og B. □

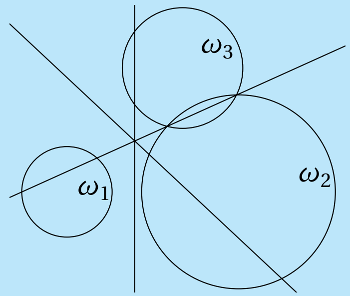
Definition af radikalcentrum

Radikalcentrum for tre cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de tre cirkler.

radikalcentrum *radical center*

Sætning 1.6.2. Radikalcentrum

For tre cirkler ω_1, ω_2 og ω_3 med forskellige centre som ikke alle tre ligger på linje, gælder at radikalakserne for henholdsvis, ω_1 og ω_2, ω_1 og ω_3 samt ω_2 og ω_3 skærer hinanden i et punkt, og at dette punkt er deres radikalcentrum.



Hvis de tre centre ligger på linje, er radikalakserne for henholdsvis, ω_1 og ω_2, ω_1 og ω_3 samt ω_2 og ω_3 parallelle og evt. sammenfaldende, dvs. i dette tilfælde er deres radikalcentrum den tomme mængde eller en ret linje.

Bevis. Hvis de tre centre ikke ligger på linje, ved vi fra sætningen om radikalakse at radikalakserne for henholdsvis ω_1 og ω_2, ω_1 og ω_3 samt ω_2 og ω_3 er parvis ikke-parallelle, samt at radikalcentrum for de tre cirkler pr. definition er fællesmængden af disse radikalakser. Lad P være skæringspunktet mellem radikalaksen for ω_1 og ω_2 og radikalaksen for ω_1 og ω_3. Dermed er potensen af P mht. ω_1 lig potensen af P mht. ω_2, og potensen af P mht. ω_1 er lig med potensen af P mht. ω_3. Altså er potensen af P mht. ω_2 også lig med potensen af P mht. ω_3, hvilket betyder at P ligger på radikalaksen for ω_2 og ω_3. Dermed går alle tre radikalakser gennem P, og P er dermed radikalcentrum for de tre cirkler.

Hvis de tre centre ligger på linje, ved vi fra sætningen om radikalakse at radikalakserne for henholdsvis ω_1 og ω_2, ω_1 og ω_3 samt ω_2 og ω_3 alle er parallelle. Hvis de ikke alle er sammenfaldende, er radikalcentrum for de tre cirkler den tomme mængde, og hvis de alle er sammenfaldende, er radikalcentrum identisk med den fælles radikalakse. □

Definition af degeneret cirkel

En *degenereret cirkel* er en cirkel med radius 0, altså et punkt, eller en cirkel med uendelig stor radius.

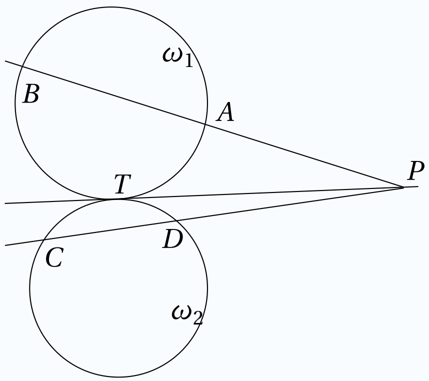
Både for radikalakse og radikalcentrum giver definitionen også mening hvis en eller flere af cirklerne er en degenereret cirkel med radius 0, og sætningerne holder også i dette tilfælde. Det samme gælder for definitionen af og sætningen om punkts potens.

degenereret cirkel *degenerate circle*

Eksempel 1.6.1. Radikalakse og punkter på en cirkel

To cirkler ω_1 og ω_2 tangerer hinanden udvendigt i punktet T. Lad P være et punkt på deres fælles tangent gennem T, lad A og B være to punkter på ω_1 så A, B og P ligger på linje, og lad C og D være to punkter på ω_2 så C, D og P ligger på linje.

Vi ønsker at vise at A, B, C og D ligger på en cirkel.

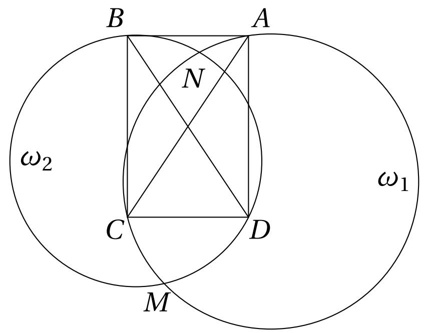


Kald cirklen gennem A, B og C for ω_3. Linjen TP er radikalakse for ω_1 og ω_2, og linjen AP er radikalakse for ω_1 og ω_3. Dermed må skæringspunktet P mellem AP og PT ligge på radikalaksen for ω_2 og ω_3, dvs. denne radikalakse er PC. Da radikalaksen yderligere skærer ω_2 i D, må dette punkt også ligge på ω_3. Dermed ligger A, B, C og D på en cirkel.

Bemærkning. I det foregående eksempel så vi at man kan anvende radikalakse til at vise at fire punkter ligger på en cirkel, men man kan også benytte radikalakser til meget andet. Fx kan man vise at to linjer står vinkelret på hinanden ved at vise at den ene er linjen gennem centrum af to cirkler, mens den anden er cirklernes radikalakse.

Radikalcentrum kan fx benyttes til at vise at tre linjer skærer hinanden i samme punkt, hvis man kan vise at de tre linjer er radikalakser for hvert par af tre cirkler.

Opgave 1.6.1. To cirkler ω_1 og ω_2 skærer hinanden i punkterne M og N. Vis at hvis rektanglet $ABCD$ er placeret så A og C ligger på ω_1, og B og D ligger på ω_2, så vil skæringspunktet mellem rektanglets diagonaler ligge på linjen MN.

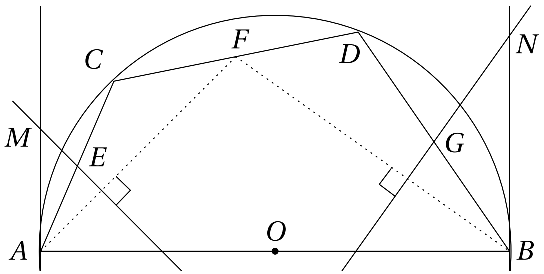


Opgave 1.6.2. Lad ABC være en trekant, og lad trekanterne $\triangle BCD$, $\triangle CAE$ og $\triangle ABF$ være ligebenede trekanter med henholdsvis BC, CA og AB som grundlinje, så disse tre trekanter ligger uden for trekant ABC. Vis at de tre linjer gennem henholdsvis A, B og C som står vinkelret på henholdsvis EF, FD og DE, skærer hinanden i samme punkt.

Opgave 1.6.3. Punkterne P, Q, R og S ligger på cirklen ω i denne rækkefølge så PQ og RS ikke er parallelle. Lad L være mængden af punkter I for hvilke der findes en cirkel ω_1 gennem P og Q samt en cirkel ω_2 gennem R og S så de to cirkler tangerer hinanden i I. Beskriv punktmængden L. *Hint*: 24

Opgave 1.6.4. Punkterne C, E, D og F ligger på en cirkel med centrum O i denne rækkefølge, og korderne CD og EF skærer hinanden i punktet N. Tangenterne til cirklen i C og D skærer hinanden i punktet A, og tangenterne til cirklen i E og F skærer hinanden i B. Vis at ON står vinkelret på AB.

Opgave 1.6.5. Lad AB være diameter i halvcirklen c med centrum O, og C og D to punkter på c så A, C, D og B er fire forskellige punkter der ligger på c i den nævnte rækkefølge. Midtpunkterne af henholdsvis AC, CD og DB betegnes E, F og G. Linjen gennem E vinkelret på AF skærer tangenten til c i A i punktet M, og linjen gennem G vinkelret på FB skærer tangenten til c i B i punktet N. Lad cirklerne ω_1, ω_2 og ω_3 have henholdsvis AO, BO og EG som diameter.



i) Bevis at radikalaksen for ω_1 og ω_3 er ME, samt at radikalaksen for ω_2 og ω_3 er NG. *Hint*: 49

ii) Find radikalcentrum for c, ω_1 og ω_3 samt radikalcentrum for c, ω_2 og ω_3. *Hint*: 8

iii) Vis at MN er parallel med CD.

1.7 Multiplikation omkring et punkt

I dette afsnit gives en kort introduktion til den affine afbildning *multiplikation omkring et punkt* samt eksempler på hvordan denne afbildning kan bruges i løsningen af geometriopgaver. Vi beviser ikke den centrale sætning 1.7.1 da det kræver en grundigere indføring i affine afbildninger. Samtidig præsenterer vi en del kendte geometriske resultater som forholdsvis nemt kan bevises ved multiplikation omkring et punkt.

Definition af multiplikation omkring et punkt

Multiplikation omkring punktet O med *multiplikationsfaktoren* k er en afbildning af planen i sig selv hvor et punkt P afbildes i punktet P' så

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$

I det følgende ser vi bort fra tilfældet $k = 0$.

Hvis $k = 1$ er det blot identitetsafbildningen, mens fx $k = -1$ giver en drejning på 180° om O.

multiplikation omkring et punkt *homothety*
multiplikation omkring O med multiplikationsfaktor k *homothety with center O and ratio k*

Sætning 1.7.1. Egenskaber ved en multiplikation omkring et punkt

i) Ved multiplikation omkring et punkt afbildes en linje i en linje parallel med linjen.

ii) Multiplikation omkring et punkt bevarer vinkler.

ii) Alle figurer afbildes i ligedannede figurer.

iv) For to cirkler med forskellige radier findes netop ét punkt og en multiplikation omkring dette med positiv multiplikationsfaktor som afbilder den ene cirkel i den anden.

v) For to cirkler findes netop ét punkt og en multiplikation med negativ multiplikationsfaktor som afbilder den ene cirkel i den anden.

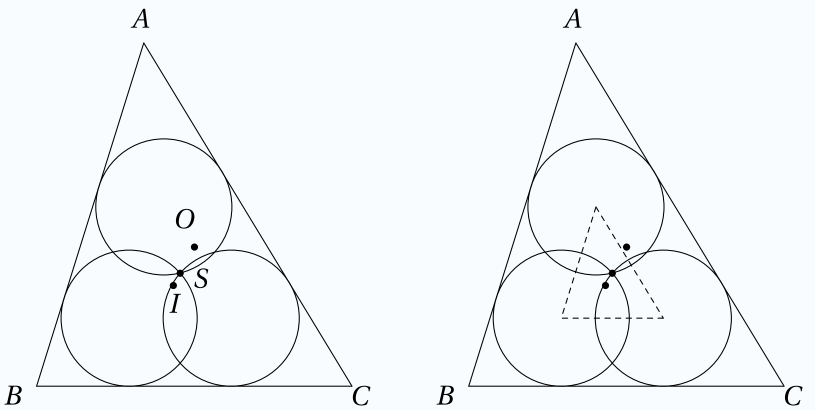
vi) For to ensvinklede trekanter som ikke er kongruente, og hvor ensliggende sider er parallelle, findes netop ét punkt og en multiplikation omkring dette som afbilder den ene trekant i den anden.

vii) Sammensætningen af to multiplikationer om to punkter hvor produktet af de to multiplikationsfaktorer ikke er 1, er igen en multiplikation omkring et punkt, og multiplikationsfaktoren er produktet af de to multiplikationsfaktorer.

Eksempel 1.7.1. Multiplikation og punkter på linje

Multiplikation omkring et punkt kan fx benyttes til at vise at tre punkter ligger på linje, ved at vise at en multiplikation omkring et af punkterne kan afbilde det andet punkt i det tredje.

Hvis vi fx betragter tre cirkler med samme radius som skærer hinanden i et fælles punkt S, og den trekant ABC der opstår ved at tegne tangenter som vist på figuren, kan vi vise at S, centrum I for den indskrevne cirkel og centrum O for den omskrevne cirkel til trekant ABC ligger på linje.



Trekanten som opstår når man forbinder centrene for de tre cirkler, har parvis parallelle sider med trekant ABC da de tre cirkler har samme radius.

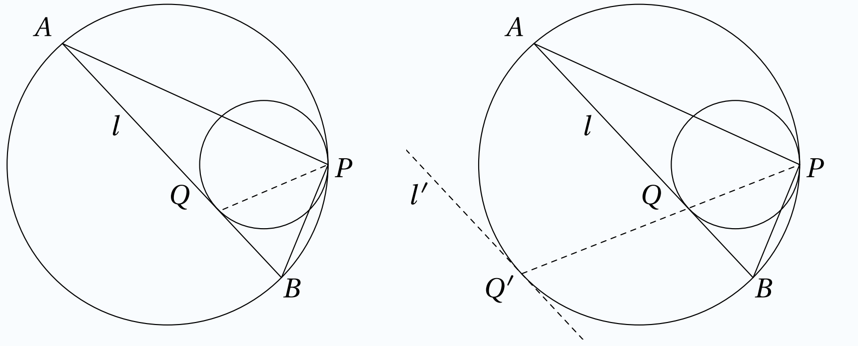
Da I er skæringspunktet mellem vinkelhalveringslinjerne i trekant ABC, og de tre centre ligger på disse vinkelhalveringslinjer, må I være centrum for den multiplikation som afbilder den lille trekant i trekant ABC. Punktet S er centrum for den omskrevne cirkel til den lille trekant da de tre cirkler har samme radius, og dermed afbildes S i O. Dette viser at I, S og O ligger på samme linje.

Eksempel 1.7.2. Multiplikation og vinkler

Multiplikation omkring et punkt kan også benyttes til at vise noget om vinkler fx ved at udnytte sætningen om periferivinkler i en cirkel.

Betragt en cirkel C_1 som tangerer en cirkel C_2 indvendigt i punktet P. Lad l være en tangent til C_1 i et punkt Q forskelligt fra P. Linjen l skærer C_2 i henholdvis A og B. Vi ønsker at vise at PQ er vinkelhalveringslinje i trekant APB.

Multiplikationen omkring punktet P som fører C_1 i C_2, fører Q i Q' og tangenten l til C_1 i en tangent l' til C_2 i punktet Q'.



Da l og l' er parallelle, og l' er tangent til C_2, er cirkelbuerne $\overset{\frown}{AQ'}$ og $\overset{\frown}{BQ'}$ lige store. Derfor er $\angle APQ' = \angle BPQ'$, og altså PQ vinkelhalveringslinje i trekant APB.

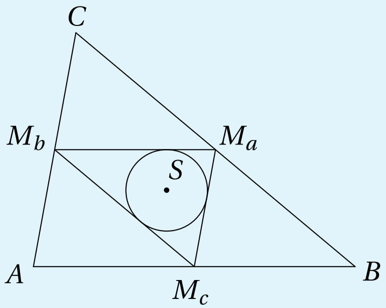
Bemærkning. Multiplikation omkring et punkt kan også benyttes til at vise at nogle punkter ligger på samme cirkel, fx ved at finde en multiplikation som afbilder punkterne i en allerede kendt cirkel. Man kan også vha. af multiplikation omkring et punkt vise at to linjer er parallelle, ved at finde en multiplikation der afbilder den ene i den anden, og man kan benytte multiplikation omkring et punkt til at bestemme forholdet mellem forskellige linjestykker ud fra multiplikationsfaktoren. I de følgende opgaver kan du selv prøve kræfter med dette.

Opgave 1.7.1. To cirkler ω_1 og ω_2 med samme radius tangerer en større cirkel ω indvendigt i henholdsvis A_1 og A_2. Lad M være et punkt på ω forskelligt fra A_1 og A_2, og lad B_1 og B_2 være skæringspunkterne mellem henholdsvis MA_1 og ω_1 og mellem MA_2 og ω_2. Vis at B_1B_2 er parallel med A_1A_2. *Hint*: 48

Opgave 1.7.2. En cirkel ω_1 tangerer en cirkel ω_2 indvendigt i punktet A. En linje l skærer de to cirkler i punkterne M, N, P og Q så punkterne ligger i nævnte rækkefølge på linjen. Vis at $\angle MAN = \angle PAQ$.

Definition af Spieker-cirkel og Spieker-centrum

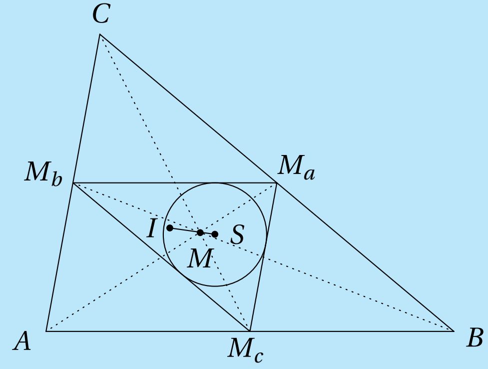
Lad ABC være en trekant, og kald midtpunkterne af siderne BC, AC og AB for henholdsvis M_a, M_b og M_c. Trekant ABC's *Spieker-cirkel* er den indskrevne cirkel til trekant $M_aM_bM_c$, og trekantens *Spieker-centrum* er centrum for dens Spieker-cirkel.



Spieker-cirkel *Spieker circle*
Spieker-centrum *Spieker centre*

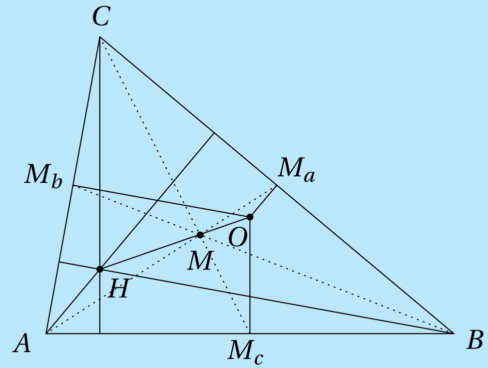
Sætning 1.7.2. Spieker-centrum

I en trekant ligger centrum I for trekantens indskrevne cirkel, medianernes skæringspunkt M og dens Spieker-centrum S på en linje, og M deler SI så $2|MS| = |MI|$.



Sætning 1.7.3. Eulerlinjen

I en trekant ligger højdernes skæringspunkt H, centrum for den omskrevne cirkel O og medianernes skæringspunkt M på en linje som kaldes *Eulerlinjen*, og M deler HO så $2|MO| = |MH|$.



Eulerlinjen *the Euler line*

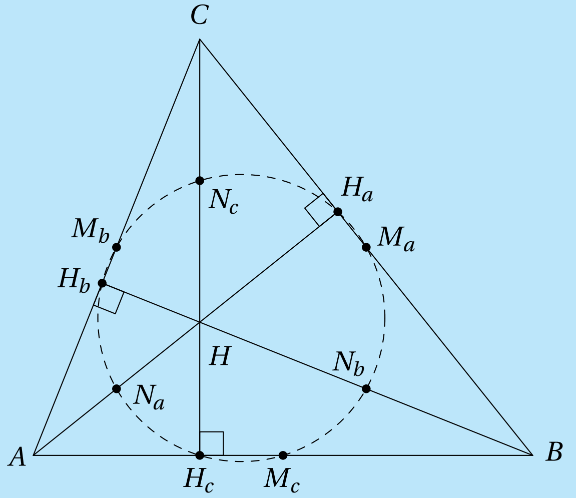
Opgave 1.7.3. Bevis sætning 1.7.2 om Spieker-centrum og sætning 1.7.3 om Eulerlinjen. *Hint*: 33

Opgave 1.7.4. Punktet P er et indre punkt i en spidsvinklet trekant ABC, og X, Y og Z er projektionerne af P på henholdsvis a, b og c. Cirklen gennem X, Y og Z skærer henholdsvis a, b og c i tre nye punkter X_1, Y_1 og Z_1. Vis at linjerne gennem henholdsvis X_1, Y_1 og Z_1 vinkelret på henholdsvis a, b og c skærer hinanden i et punkt. *Hint*: 23

Sætning 1.7.4. Nipunktscirklen

Lad ABC være en trekant hvor H_a, H_b og H_c er fodpunkterne for højderne, M_a, M_b og M_c er midtpunkterne af trekantens tre sider, og N_a, N_b og N_c er midtpunkterne af henholdsvis HA, HB og HC, hvor H er højdernes skæringspunkt.

De ni punkter H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, N_a, N_b og N_c ligger på en cirkel. Denne cirkel kaldes *nipunktscirklen*.



nipunktscirklen *the nine-point circle*

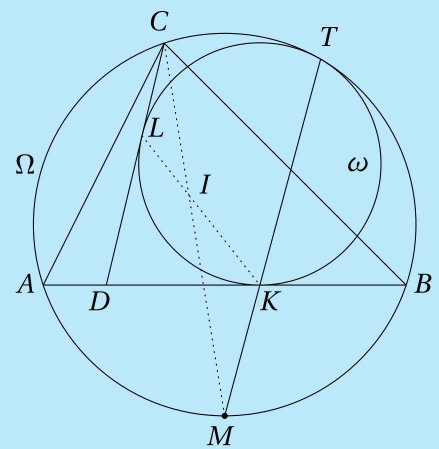
Opgave 1.7.5. Bevis sætning 1.7.4 om nipunktscirklen. *Hint*: 37

Opgave 1.7.6. En cirkel ω_1 tangerer en cirkel ω_2 indvendigt i punktet A. Om to forskellige linjer gennem A oplyses at den ene skærer ω_1 og ω_2 i henholdsvis X_1 og X_2, og den anden skærer ω_1 og ω_2 i henholdsvis Y_1 og Y_2. Linjerne X_1Y_2 og X_2Y_1 skærer hinanden i punktet B. Vis at hvis B ligger på ω_1, da tangerer den omskrevne cirkel til BX_2Y_2 cirklen ω_1. *Hint*: 12

Den næste sætning viser nogle interessante egenskaber om cirkler der tangerer trekantens omskrevne cirkel og mindst en af trekantens sider.

Sætning 1.7.5. Cirkel der tangerer trekantens omskrevne cirkel

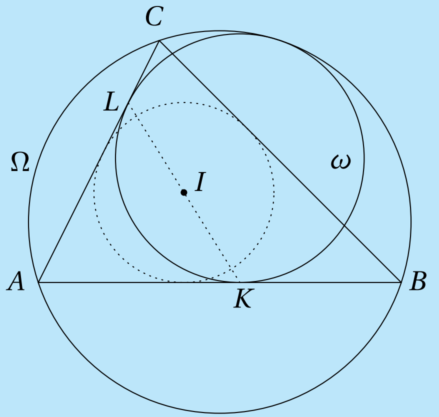
Lad ABC være en trekant, og betragt en cirkel ω der tangerer den omskrevne cirkel Ω til trekant ABC i T og siden AB i K. Lad yderligere D være et punkt på siden AB så CD tangerer ω, og kald røringspunktet for L. Kald desuden skæringspunktet mellem TK og Ω for M, og skæringspunktet mellem LK og CM for I.



Da er M superpunktet , og I er centrum for den indskrevne cirkel.

Opgave 1.7.7. Vis sætning 1.7.5 ved at følge disse skridt: i) Vis at M er superpunktet, og at $\triangle TMB \sim \triangle BMK$. ii) Vis at firkant $CLIT$ er indskrivelig. iii) Vis at $\triangle MKI \sim \triangle MIT$. vi) Kombiner $\triangle TMB \sim \triangle BMK$, $\triangle MKI \sim \triangle MIT$ og viden om superpunktet til at konkludere at I er centrum for den indskrevne cirkel.

Korollar 1.7.6. Lad ABC være en trekant med omskreven cirkel Ω, og lad ω være den cirkel der tangerer siderne AB, AC og Ω. Kald røringspunkterne mellem ω og AB og AC for henholdsvis K og L.



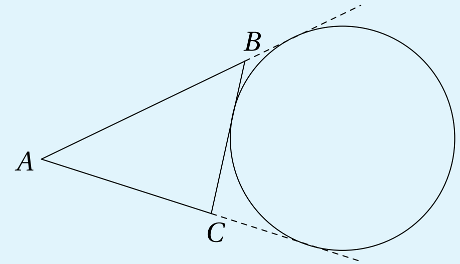
Da er centrum I for den indskrevne cirkel til trekant ABC midtpunktet af KL.

Bevis. Fra sætning 1.7.5 får vi ved at lade $D = A$ at I ligger på KL. Da I også ligger på vinkelhalveringslinjen fra A, som deler KL på midten da K og L er røringspunkter for en cirkel der tangerer AB og AC, må I være midtpunktet af KL. □

1.8 Trekantens ydre røringscirkler

Definition af trekantens ydre røringscirkler

En trekant ABC har tre *ydre røringscirkler*, én for hver side i trekanten. Den ydre røringscirkel til siden BC er en cirkel der ligger uden for trekanten, og som tangerer siden BC samt forlængelserne af AB og AC.

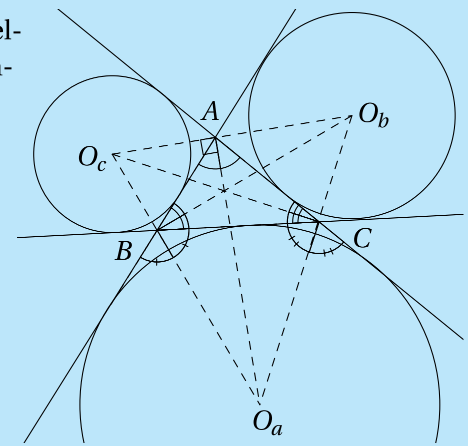


ydre røringscirkel *excircle*
centrum for den ydre røringscirkel *excenter*

Sætning 1.8.1. De ydre røringscirklers centre

Centrum for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel A og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og vinkel C.

De tre ydre røringscirklers centre danner en trekant i hvilken vinkelhalveringslinjerne for trekant ABC er højder.

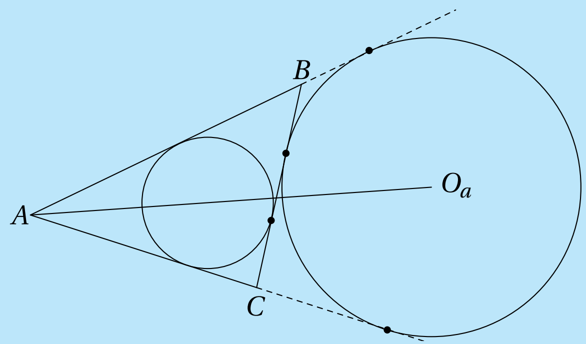


Bevis. Da den ydre røringscirkel til siden BC tangerer BC samt forlængelserne af AB og AC, må dens centrum ligge i samme afstand til disse tre linjer. Fordi vinkelhalveringslinjen er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til de to vinkelben, må den ydre røringscirkels centrum ligge på vinkelhalveringslinjen til vinkel A samt de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og vinkel C.

Af dette ses at de ydre røringscirklers centre O_a, O_b og O_c danner en trekant hvis sider går gennem henholdsvis A, B og C. Vinkelhalveringslinjen til vinkel A står vinkelret på siden O_bO_c, da $\angle BAO_a = \angle CAO_a$ og $\angle O_bAC = \angle O_cAB$. Dermed er O_aA højde i trekant $O_aO_bO_c$. □

Opgave 1.8.1. Lad T være den ydre røringscirkel til trekant ABC modsat A. Lad O_a være dens centrum, og E og F dens røringspunkter med henholdsvis AB og AC. Lad yderligere J være skæringspunktet mellem BO_a og EF. Vis at $\angle BJC$ er ret. *Hint*: 43

Sætning 1.8.2. Den ydre røringscirkels røringspunkter Lad ABC være en trekant, s den halve omkreds og ω_a den ydre røringscirkel til siden BC.



Afstanden fra A til røringspunkterne mellem ω_a og forlængelserne af siderne AB og AC er s, dvs. potensen af A mht. ω_a er s^2.

Røringspunktet mellem BC og den indskrevne cirkel og røringspunktet mellem BC og den ydre røringscirkel ω_a ligger på linjestykket BC symmetrisk omkring dets midtpunkt.

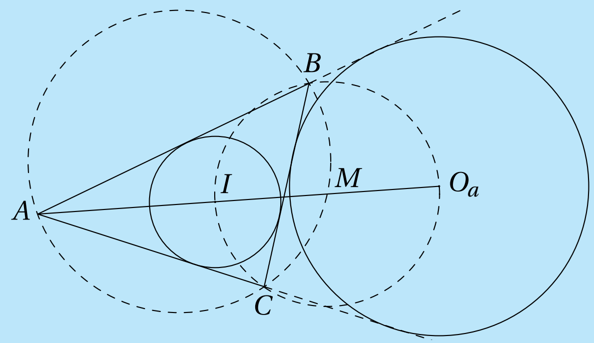
Opgave 1.8.2. Vis sætning 1.8.2.

Opgave 1.8.3. Den ydre røringscirkel til vinkel A i trekant ABC rører siden BC i punktet D. Den ydre røringscirkel til vinkel B i trekant ABD rører siden AD i punktet P, og den ydre røringscirkel til vinkel C i trekant ACD rører siden AD i punktet Q. Undersøg hvornår $P = Q$. *Hint*: 34

Opgave 1.8.4. Lad $ABCD$ være et trapez hvor AB er parallel med CD, og $|AD| = |BC|$. Lad yderligere E være røringspunktet mellem den indskrevne cirkel til trekant BCD og siden CD. Punktet F ligger på vinkelhalveringslinjen til $\angle DAC$ så EF står vinkelret på CD. Den omskrevne cirkel til trekant ACF skærer linjen CD i punkterne C og G. Vis at trekant AFG er ligebenet. *Hint*: 52

Sætning 1.8.3. Den ydre røringscirkel og superpunktet

Lad ABC være en trekant, ω_a den ydre røringscirkel til siden BC med centrum O_a, I centrum for den indskrevne cirkel, og M superpunktet til vinkel A, dvs. skæringspunktet mellem den omskrevne cirkel til trekant ABC og vinkelhalveringslinjen fra A.



Punkterne B, I, C og O_a ligger på en cirkel med M som centrum.

Der gælder at $|AI||AO_a| = |AB||AC|$.

Opgave 1.8.5. Vis sætning 1.8.3. *Hint*: 6

Opgave 1.8.6. Lad I være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ABC, og lad Γ være trekantens omskrevne cirkel. Lad linjen AI skære Γ i et punkt D forskelligt fra A. Lad E være et punkt på cirkelbuen CD som ikke indeholder A, og lad F være et punkt på siden BC så $\angle BAF = \angle CAE$. Lad yderligere G være midtpunktet af linjestykket IF. Vis at linjerne DG og EI skærer hinanden på Γ. (IMO 2010) *Hint*: 9, 53, 41

1.9 Cevas og Menelaos' sætninger

Definition af cevian

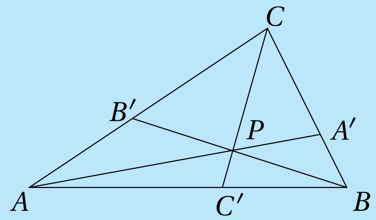
En *cevian* er en linje i en trekant fra en vinkelspids til den modstående side eller dens forlængelse. Fx er højder, medianer og vinkelhalveringslinjer alle cevianer.

cevian *cevian*

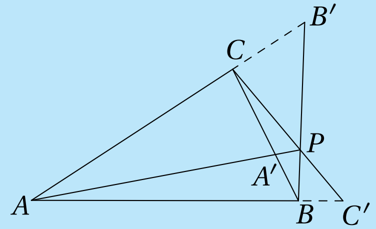
Sætning 1.9.1. Cevas sætning

Cevas sætning siger at cevianerne AA', BB' og CC', hvor A' ligger på BC osv., skærer hinanden i samme punkt netop hvis

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$



Cevas sætning gælder også hvis nogle af cevianerne går fra en vinkelspids til et punkt på forlængelsen af modstående side. I dette tilfælde er det dog nødvendigt at regne længderne med fortegn så postiv retning er AB, BC og CA. Hvis C' fx ligger på forlængelsen af AB tættest på B, da er $|C'B|$ negativ.

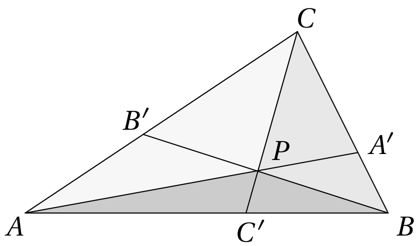


Cevas sætning *Ceva's theorem*

Bevis. Her beviser vi kun sætningen i tilfældet hvor alle tre cevianer ligger inden for trekanten. Hvis nogle af cevianerne falder uden for trekanten, foregår beviset stort set på samme måde.

Først viser vi at hvis de tre cevianer går gennem samme punkt, så vil

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$



Antag at cevianerne går gennem samme punkt P. Der gælder at hvis to trekanter har samme højde, da er forholdet mellem arealerne det samme som forholdet mellem grundlinjerne. Lad $T(\triangle ABC)$ betegne arealet af en trekant. Dermed er

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle ABB')}{T(\triangle CBB')} \quad \text{og} \quad \frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle APB')}{T(\triangle B'PC)}.$$

Samlet får vi

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle ABB')-T(\triangle APB')}{T(\triangle CBB')-T(\triangle B'PC)}=\frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}.$$

Her har vi benyttet brøkregnereglen der siger at hvis $\frac{s}{t}=\frac{u}{v}$, er $\frac{s}{t}=\frac{s-u}{t-v}$, når $t\neq v$. Tilsvarende fås

$$\frac{|BC'|}{|C'A|}=\frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \quad \text{og} \quad \frac{|CA'|}{|A'B|}=\frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}.$$

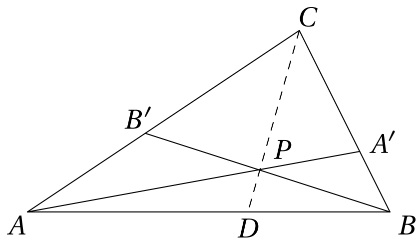
Samlet giver dette

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}\cdot\frac{|BC'|}{|C'A|}\cdot\frac{|CA'|}{|A'B|}=\frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}\cdot\frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)}\cdot\frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}=1.$$

Nu viser vi den modsatte vej. Antag at

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$

Kald skæringspunktet mellem AA' og BB' for P, og betragt cevianen CD fra C gennem P.



Da cevianerne AA', BB' og CD går gennem samme punkt, gælder ifølge det vi lige har vist, at

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$

Ifølge vores antagelse er

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1,$$

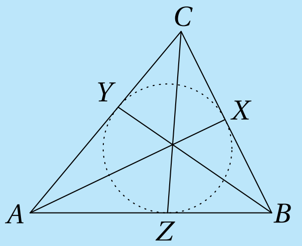
dvs. at $\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AC'|}{|C'B|}$. Af dette ses at D og C' er samme punkt, og dermed at cevianerne AA', BB' og CC' skærer hinanden i samme punkt P. □

Opgave 1.9.1. Vi har tidligere benyttet sætningen om midtnormaler til at bevise at højderne skærer hinanden i samme punkt. Benyt nu i stedet Cevas sætning til at bevise dette.

Opgave 1.9.2. I trekant ABC er P og Q punkter på henholdsvis siden AB og siden AC så PQ er paralleltransversal i trekant ABC, og X er skæringspunktet mellem BQ og CP. Vis at AX deler linjestykket BC på midten.

Sætning 1.9.2. Gergonnepunktet

I en trekant ABC tangerer den indskrevne cirkel siderne siderne BC, AC og AB i henholdsvis X, Y g Z. Linjerne AX, BY og CZ skærer hinanden i et punkt, og dette punkt kaldes trekantens *Gergonnepunkt*.



Opgave 1.9.3. Bevis sætning 1.9.2 om Gergonnepunktet.

Sætning 1.9.3. Røringspunkterne for de ydre røringscirkler

I trekant ABC indtegnes tre cevianer fra vinkelspidserne til røringspunkterne for de tre ydre røringscirkler. Disse tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 1.9.4. Vis sætning 1.9.3.

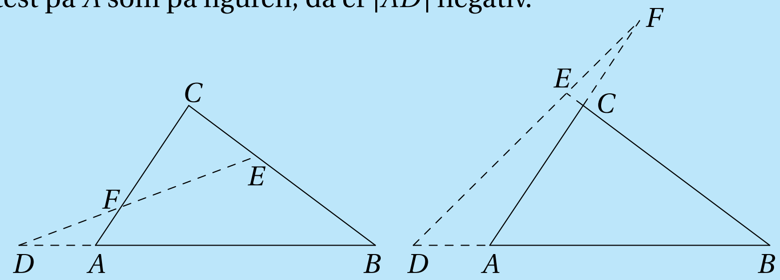
Opgave 1.9.5. I trekant ABC er AD vinkelhalveringslinje og AH højde, og P og Q er projektionerne af D på henholdsvis AC og AB. Vis at AH, BP og CQ skærer hinanden i et punkt.

Sætning 1.9.4. Menelaos' sætning

Lad ABC være en trekant. Menelaos' sætning siger at tre punkter D, E og F som ligger på henholdsvis linjen AB, linjen BC og linjen CA, ligger på samme linje netop hvis

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=-1.$$

Her regnes linjestykkerne ligesom ved Cevas sætning med fortegn så positiv retning er AB, BC og CA. Hvis D fx ligger på forlængelsen af AB tættest på A som på figuren, da er $|AD|$ negativ.

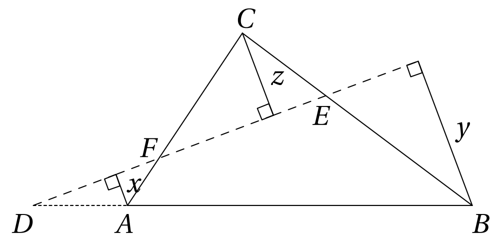


Menelaos' sætning *Menelaus' theorem*

Bevis. Antag først at punkterne D, E og F ligger på samme linje. Bemærk at da denne linje skærer trekanten nul eller to gange, vil der i udtrykket

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}$$

være enten netop én eller netop tre længder med negativt fortegn, dvs. udtrykket er altid negativt. Hvis vi kun regner med positive længder, er det derfor nok at vise at udtrykket er lig med 1. Lad x være afstanden fra A til projektionen af A på linjen DEF, y være afstanden fra B til projektionen af B på linjen DEF og z være afstanden fra C til projektionen af C på linjen DEF, som vist på figuren.



Ensvinklede trekanter giver at

$$\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{x}{y},\quad \frac{|BE|}{|EC|}=\frac{y}{z}\quad \text{og}\quad \frac{|CF|}{|FA|}=\frac{z}{x},$$

og dette er uafhængigt af om linjen DEF skærer trekanten to eller nul gange.

Dermed er

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=-1,$$

når vi regner med fortegn.

Antag omvendt at der om D, E og F gælder at

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=-1.$$

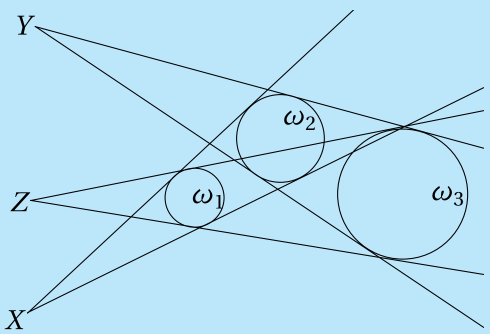
Lad D' være skæringspunktet mellem EF og AB. Da ved vi fra før at

$$\frac{|AD'|}{|D'B|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=-1,$$

og dermed må $D=D'$, dvs. D, E og F ligger på linje. □

Sætning 1.9.5. Monges sætning

Lad ω_1, ω_2 og ω_3 være cirkler som ikke skærer hinanden eller ligger inden i hinanden, og som har forskellige radier. Lad X være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_1 og ω_2 som har cirklerne på samme side af tangenten, lad tilsvarende Y være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_2 og ω_3 som har cirklerne på samme side af tangenten, og Z være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_1 og ω_3 som har cirklerne på samme side af tangenten.



Da ligger punkterne X, Y og Z på linje.

Opgave 1.9.6. Vis sætning 1.9.5.

Sætning 1.9.6. Monge-d'Alemberts sætning

Lad ω_1, ω_2 og ω_3 være cirkler som ikke skærer hinanden eller ligger inden i hinanden, og som har forskellige radier. Lad X være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_1 og ω_2 som har cirklerne på samme side af tangenten, lad Y være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_2 og ω_3 som har cirklerne på hver sin side af tangenten, og Z være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_1 og ω_3 som har cirklerne på hver sin side af tangenten. Da ligger punkterne X, Y og Z på linje.

Opgave 1.9.7. Vis sætning 1.9.6

1.10 Trekantens formler

Sætning 1.10.1. Radius i den omskrevne cirkel

Lad R være radius i den omskrevne cirkel til trekant ABC, og T arealet af trekanten. Da er

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

og

$$4RT = abc.$$

Opgave 1.10.1. Vis sætning 1.10.1.

Sætning 1.10.2. Radius i den indskrevne og omskrevne cirkel

Lad ABC være en trekant, og lad r være radius i den indskrevne cirkel og R radius i den omskrevne cirkel til trekanten. Da gælder at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2rR}.$$

Opgave 1.10.2. Vis sætning 1.10.2.

Sætning 1.10.3. Herons formel

Arealet T af en trekant ABC, hvor s betegner den halve omkreds, kan beregnes ud fra trekantens sidelængder vha. Herons formel:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Herons formel *Heron's formula*

Bevis. Ifølge cosinusrelationen er

$$(2bc)^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Vi ved at $4T = 2bc\sin A$, og ved kvadrering $16T^2 = (2bc)^2 \sin^2 A$. Desuden er $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$. Samlet giver dette

$$\begin{aligned}
16T^2 &= (2bc)^2 - (2bc)^2 \cos^2 A \\
&= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
&= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\
&= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\
&= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\
&= 16s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

Hermed er Herons formel bevist. □

Sætning 1.10.4. Radierne i de ydre røringscirkler

For en trekant ABC betegner T arealet, s den halve omkreds, r radius i den indskrevne cirkel og r_a, r_b og r_c radierne i de tre ydre røringscirkler mht. henholdsvis A, B og C. Da gælder at

$$T = r_a(s-a) \quad \text{og} \quad T^2 = r\,r_a r_b r_c.$$

Opgave 1.10.3. Vis sætning 1.10.4.

Opgave 1.10.4. Højderne i en trekant er 12, 15 og 20. Hvad er arealet af trekanten? (Baltic Way 2006)

Opgave 1.10.5. Vis at der findes uendeligt mange trekanter hvor sidelængderne er tre på hinanden følgende hele tal, og arealet af trekanten er et helt tal. (NMC 1995) *Hint*: 25, 27

1.11 Inversion

Inversion er en bestemt type transformation af planen, og ved at benytte inversion på en geometrisk problemstilling omformer man problemstillingen til en anden ækvivalent problemstilling. Inversion er derfor et interessant redskab i nogle typer geometriopgaver. Dette afsnit er en indføring i inversion, de centrale egenskaber ved inversion samt hvordan man kan benytte inversion.

Definition af inversion

Lad Ω være en cirkel med centrum O og radius r. *Inversion* i denne cirkel er en afbildning af planen, fraregnet punktet O, på sig selv. Et punkt A, $A \neq O$, afbildes i det punkt A' som ligger på halvlinjen fra O gennem A, og som opfylder at $|OA||OA'| = r^2$.

Bemærk at afbildningen fikserer cirklen Ω og afbilder dens indre på dens ydre og omvendt. Deraf navnet.

Det er oplagt at inversionsafbildningen er sin egen inverse. Den er desuden kontinuert hvilket vi ikke vil komme nærmere ind på her.

Man kan på helt tilsvarende vis definere inversion i en kugle i rummet.

inversion *inversion*

Det interessante ved inversion er at den afbilder linjer og cirkler i linjer og cirkler, samt at den bevarer vinkler mellem kurver, hvilket vi skal se nærmere på når det drejer sig om linjer og cirkler.

I det følgende ser vi på inversion i en cirkel med centrum O og radius r, og vi betegner billedet af et punkt A med A', billedet af en cirkel α med α', osv.

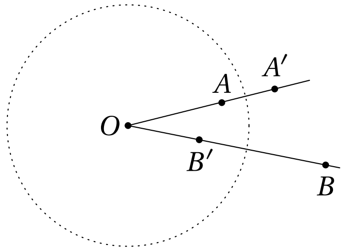
Sætning 1.11.1. Vinkler og afstande

To punkter A og B, begge forskellige fra O, afbildes i punkterne A' og B' så

$$\angle OA'B' = \angle OBA \quad \text{og} \quad |A'B'| = \frac{r^2}{|OA||OB|}|AB|.$$

Bevis. Vi viser at $\triangle OAB$ er ensvinklet med $\triangle OB'A'$ med forholdet $\frac{r^2}{|OA||OB|}$, da det viser sætningen.

Først bemærker vi at $\angle AOB = \angle A'OB'$. Desuden er



$$|OA'| = \frac{r^2}{|AO|} = \frac{r^2}{|OA||OB|}|OB| \quad \text{og}$$
$$|OB'| = \frac{r^2}{|OA||OB|}|OA|,$$

hvilket giver det ønskede. □

Sætning 1.11.2. Linjer og cirkler

Inversion afbilder som sagt linjer og cirkler i linjer og cirkler. Mere præcist gælder:

i) En linje gennem O afbildes på sig selv.

ii) En linje som ikke går gennem O, afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med linjen.

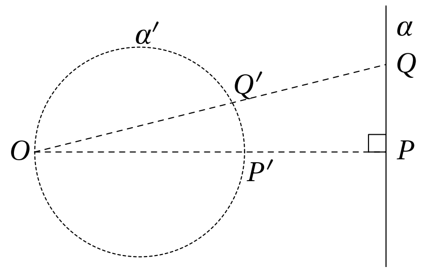
iii) En cirkel gennem O afbildes på en linje som er parallel med tangenten til cirklen i O.

iv) En cirkel som ikke går gennem O, afbildes på en cirkel som ikke går gennem O.

Bevis.

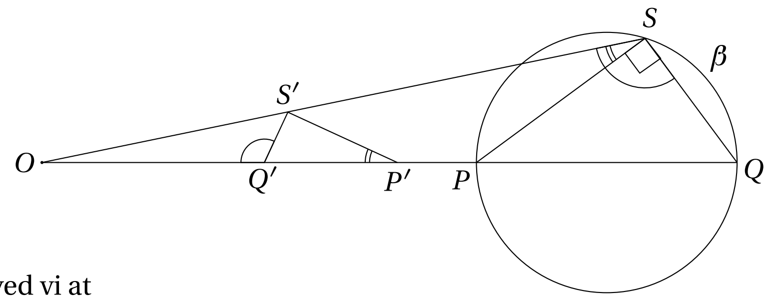
i) En linje gennem O afbildes oplagt på sig selv.

ii) Lad α være en linje som ikke går gennem O, og betragt projektionen P af O på α. Påstanden er nu at α' er cirklen med diameter OP'. Lad Q være et punkt på α. Da gælder at $\angle OQ'P' = \angle OPQ = 90°$, dvs. at Q' ligger på cirklen med diameter OP'. Der gælder dermed at α afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med α.



iii) Tilsvarende afbildes en cirkel gennem O på en linje som er parallel med tangenten til cirklen i O da inversion er sin egen inverse.

iv) Lad β være en cirkel som ikke går gennem O, og betragt linjen l gennem O og centrum af β. Linjen l skærer β i punkterne P og Q, og disse er forskellige fra O da β ikke går gennem O. Vi viser nu at β afbildes i cirklen med $P'Q'$ som diameter. Betragt et punkt S på β forskelligt fra P og Q.



Da ved vi at

$$\begin{aligned}\angle Q'S'P' &= 180^\circ - \angle P'Q'S' - \angle S'P'Q' = \angle S'Q'O - \angle S'P'O \\ &= \angle QSO - \angle PSO = \angle PSQ = 90^\circ,\end{aligned}$$

hvor vi til slut har udnyttet at PQ er diameter i β. Altså ligger S' på cirklen med diameter $P'Q'$, og dette viser at en cirkel som ikke går gennem O, afbildes i en cirkel som ikke går gennem O. $\square$

Bemærkning. Det er vigtigt at bemærke at hvis α er en cirkel som ikke går gennem O, da er billedet af dens centrum ikke centrum i α', med mindre dette centrum ligger på inversionscirklen.

Nu vil vi vise at vinkler mellem linjer og cirkler bevares ved inversion, men først beviser vi at tangens mellem linjer og cirkler bevares ved inversion.

Sætning 1.11.3. Tangens mellem linjer og cirkler
En linje og en cirkel eller to cirkler som tangerer i punktet P, $P \neq O$, afbildes ved inversion på en linje og en cirkel eller to cirkler som tangerer i P'.

Bevis. Da antallet af skæringspunkter forskellig fra O bevares ved inversion, følger det let. $\square$

Opgave 1.11.1. Lad α være en cirkel som ikke går gennem O. Vis at centrum af α, centrum af α' og O ligger på linje.

Opgave 1.11.2. Lad ABC være en trekant, og lad s betegne den halve omkreds. Vis at den ydre røringscirkel til siden c afbildes på sig selv ved inversion i en cirkel med centrum C og radius s.

Sætning 1.11.4. Vinkler bevares ved inversion

Vinklen mellem to linjer, vinklen mellem en linje og en cirkel samt vinklen mellem to cirkler bevares ved inversion. (Vinklen mellem to cirkler der skærer hinanden, er vinklen mellem de to tangenter i skæringspunktet.)

Bevis. Hvis to linjer skærer i punktet O, bevares vinklen oplagt ved inversion.

Lad α og β være to linjer som skærer hinanden i P, $P \neq O$. Da vil α' og β' have netop to skæringspunkter P' og O. Vinklen mellem α' og β' i P' vil være lig med vinklen mellem dem i O. Da en linje gennem O afbildes på sig selv, og en linje der ikke går gennem O, afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med linjen, vil vinklen mellem α' og β' i O være lig med vinklen mellem α og β i P.

Lad α være en linje og β en cirkel som skærer hinanden i P, $P \neq O$. Lad γ være tangenten til β i P. Da er vinklen mellem α og β i P lig med vinklen mellem α

og γ i P, som ifølge det vi lige har vist, er lig med vinklen mellem α' og γ' i P' som er lig med vinklen mellem α' og β' i P' da tangens bevares ved inversion. På tilsvarende vis ses at vinklen mellem to cirkler bevares ved inversion. □

Opgave 1.11.3. I en trekant ABC kaldes røringspunktet mellem den indskrevne cirkel og siden AB for M og røringspunktet mellem den indskrevne cirkel og siden AC for N. Vis at ved inversion i den indskrevne cirkel afbildes A i midtpunktet af linjestykket MN.

Eksempel 1.11.1. Nu skal vi se på hvorfor inversion i nogle sammenhænge er rigtig smart. Fx er Ptolemæus' ulighed helt ligetil hvis man inverterer problemstillingen.

Som vi så i afsnit 1.4, siger Ptolemæus' ulighed at der for en firkant $ABCD$ gælder at

$$|AB||CD|+|AD||BC|\geq|AC||BD|$$

med lighedstegn netop hvis firkant $ABCD$ er indskrivelig.

For at bevise sætningen inverterer vi i en cirkel med centrum i A og radius r. Dette giver

$$\begin{aligned}|AB||CD|+|AD||BC| &= \frac{r^2}{|AB'|}\frac{r^2}{|AC'||AD'|}|C'D'|+\frac{r^2}{|AD'|}\frac{r^2}{|AB'||AC'|}|B'C'| \\ &= \frac{r^4}{|AB'||AC'||AD'|}(|B'C'|+|C'D'|)\end{aligned}$$

og

$$|AC||BD|=\frac{r^2}{|AC'|}\frac{r^2}{|AB'||AD'|}|B'D'|=\frac{r^4}{|AB'||AC'||AD'|}|B'D'|.$$

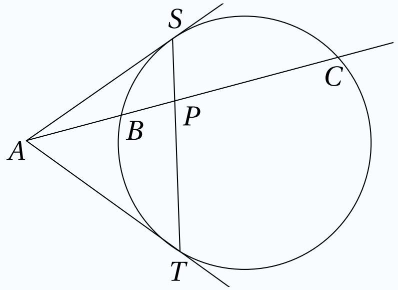
Ptolemæus' ulighed er i den inverterede situation derfor blot trekantsuligheden

$$|B'C'|+|C'D'|\geq|B'D'|,$$

hvor der gælder lighedstegn netop hvis B', C' og D' ligger på en linje i nævnte rækkefølge. I det ikke inverterede tilfælde er dette netop ækvivalent med at B, C og D ligger på en cirkel gennem A, så C ikke ligger ved siden af A, dvs. at firkant $ABCD$ er indskrivelig.

Eksempel 1.11.2. I en opgave fra NMC 2007 kan man med fordel benytte inversion.

En linje gennem A skærer en cirkel i to punkter, B og C, på en sådan måde at B ligger mellem A og C. Fra punktet A tegnes de to tangenter til cirklen. Tangenterne rører cirklen i punkterne S og T. Lad P være skæringspunktet mellem linjerne ST og AC.

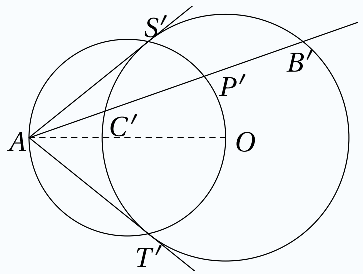


Vis at

$$\frac{|AP|}{|PC|}=2\frac{|AB|}{|BC|}.$$

Allerførst skal vi overveje hvilket punkt vi skal invertere i. De to mest centrale punkter er P og A, og man kan faktisk invertere i dem begge med succes. Her ser vi på en inversion i A.

Ved inversion i en cirkel med centrum A og radius r afbildes linjerne gennem A på sig selv, linjen ST afbildes i en cirkel gennem A, og cirklen afbildes i en cirkel som tangerer linjerne AS' og AT' som vist på figuren.



Nu omregner vi den ligning vi skal vise, til det inverterede tilfælde:

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{r^2/|AP'|}{r^2|P'C'|/(|AP'||AC'|)} = \frac{|AC'|}{|P'C'|}$$

$$2\frac{|AB|}{|BC|} = 2\frac{r^2/|AB'|}{r^2|B'C'|/(|AB'||AC'|)} = 2\frac{|AC'|}{|B'C'|}.$$

Vi skal altså i det inverterede tilfælde blot vise den simplere sammenhæng at

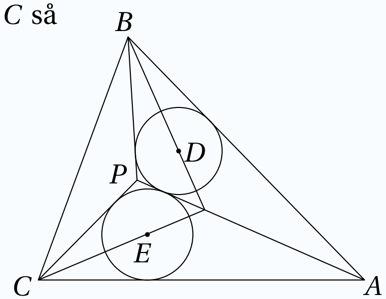
$$|B'C'| = 2|P'C'|.$$

Lad AO være diameter i cirkel $AS'P'T'$. Da er $\angle AS'O = \angle AT'O = 90°$, og derfor er O centrum i cirkel $B'T'C'S'$. Der gælder yderligere at $\angle AP'O = 90°$, hvilket betyder at radius fra O gennem P' i cirkel $B'T'C'S'$ står vinkelret på korden $C'B'$, og derfor deler den på midten. Altså er $|B'C'| = 2|P'C'|$ som ønsket.

Eksempel 1.11.3. I en opgave fra IMO 1996 er der en lidt special vinkelbetingelse som bliver meget simplere ved inversion. Opgaven lyder:

Lad P være et indre punkt i trekant ABC så

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$



Lad D og E være centrene for henholdsvis de indskrevne cirkler i trekant APB og trekant APC. Vis at linjerne AP, BD og CE skærer hinanden i et punkt.

Først bemærker vi at linjen BD er vinkelhalveringslinjen fra B i trekant ABP, og det er kendt at vinkelhalveringslinjen deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de to hosliggende sider. Linjen BD deler altså linjestykket AP i forholdet $|AB|/|BP|$. På tilsvarende vis ses at linjen CE deler linjestykket AP i forholdet $|AC|/|PC|$. At vise at de tre linjer BD, CE og AP går gennem samme punkt, er altså ækvivalent med at vise at

$$\frac{|AB|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|PC|}.$$

Nu skal vi overveje hvilket centrum vores inversionscirkel skal have. I dette tilfælde er der en del vinkler hvis ene vinkelben går gennem A, og i sådant et tilfælde er det ofte en god ide at invertere i en cirkel med centrum i A. Valget af radius er derimod ikke væsentligt.

Når vi inverterer i en cirkel med centrum i A og radius r, svarer identiteten vi skal vise til den væsentligt simplere identitet

$$|P'B'| = |P'C'|.$$

Vinkelbetingelsen bliver i den inverterede situation

$$\angle APB - \angle ACB = \angle AB'P' - \angle AB'C' = \angle C'B'P'$$

og

$$\angle APC - \angle ABC = \angle AC'P' - \angle AC'B' = \angle B'C'P',$$

dvs. $\angle C'B'P' = \angle B'C'P'$. Dermed er $|P'B'| = |P'C'|$ som ønsket.

Ved først at udnytte at vinkelhalveringslinjer deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende cirkler, og efterfølgende invertere omformes problemstillingen til en problemstilling der nærmest giver sig selv.

Kunsten er selvfølgelig at gennemskue at inversion i en cirkel med centrum i A forsimpler problemstillingen.

Opgave 1.11.4. Lad ABC være en trekant, og lad s betegne den halve omkreds. Punkterne P og Q ligger på linjen AB så $|CP| = |CQ| = s$. Vis at den omskrevne cirkel til trekant CPQ tangerer den ydre røringscirkel til siden c i trekant ABC. *Hint*: 22

Opgave 1.11.5. Fire cirkler tangerer hinanden så ω_1 og ω_3 tangerer ω_2 og ω_4, samt så cirklerne ikke overlapper hinanden. Røringspunkterne mellem ω_1 og ω_2, ω_2 og ω_3, ω_3 og ω_4 samt ω_4 og ω_1 betegnes henholdsvis A, B, C og D. Vis at disse fire punkter enten ligger på en ret linje eller på en cirkel. *Hint*: 7

Opgave 1.11.6. Tre cirkler Γ_A, Γ_B og Γ_C har et fælles skæringspunkt O. Det andet skæringspunkt mellem Γ_A og Γ_B er C, det andet skæringspunkt mellem Γ_A og Γ_C er B, og det andet skæringspunkt mellem Γ_B og Γ_C er A. Linjen AO skærer cirklen Γ_A i et punkt X forskelligt fra O. Ligeledes skærer linjen BO cirklen Γ_B i et punkt Y forskelligt fra O, og linjen CO skærer cirklen Γ_C i et punkt Z forskelligt fra O. Vis at

$$\frac{|AY||BZ||CX|}{|AZ||BX||CY|} = 1.$$

(NMC 2010) *Hint*: 39

Opgave 1.11.7. Lad B_1 og C_1 være midtpunkterne af henholdsvis AB og AC i trekant ABC. Skæringspunktet mellem de omskrevne cirkler til trekant AB_1C og trekant ABC_1 betegnes P, og skæringspunktet forskelligt fra A mellem linjen AP og den omskrevne cirkel til trekant AB_1C_1 betegnes P_1. Vis at $2|AP| = 3|AP_1|$. (Baltic Way 2006) *Hint*: 29

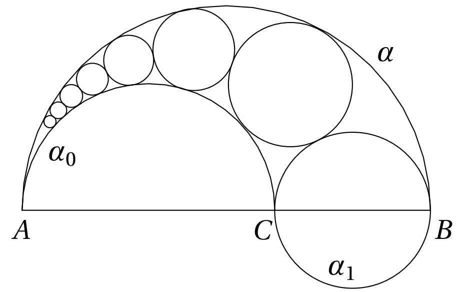
Opgave 1.11.8. Fire cirkler α_1, α_2, α_3 og α_4 går alle gennem et punkt P så α_1 og α_3 tangerer hinanden udvendigt i P, og α_2 og α_4 ligeledes tangerer hinanden udvendigt i P. Antag yderligere at α_1 og α_2, α_2 og α_3, α_3 og α_4 samt α_4 og α_1 skærer hinanden i henholdsvis A, B, C og D, alle forskellige fra P. Vis at

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}.$$

Hint: 14

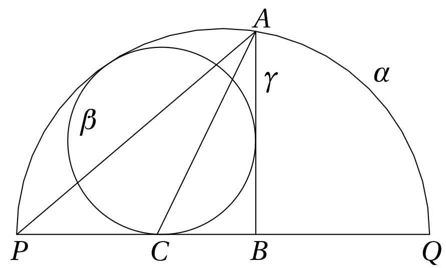
Opgave 1.11.9. Lad $ABCD$ være en konveks firkant så de to diagonaler står vinkelret på hinanden. Kald skæringspunktet mellem diagonalerne for O, og kald fodpunkterne for højderne fra O i trekant OAB, OBC, OCD og ODA for henholdsvis P, Q, R og S. Vis at punkterne P, Q, R og S ligger på en cirkel. *Hint*: 35

Opgave 1.11.10. Lad α være en halvcirkel med diameter AB, C et punkt på linjestykket AB forskelligt fra A og B, og α_0 en halvcirkel med AC som diameter så α og α_0 ligger på samme side af AB. Nu definerer vi en følge af cirkler på følgende måde. Cirklen α_1 er cirklen med diameter BC, og cirklen α_n er cirklen som tangerer α, α_0 og α_{n-1} som vist på figuren.



Kald røringspunktet mellem α_i og α_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots$, for P_i. Vis at alle røringspunkterne $P_1, P_2, P_2, \ldots$ ligger på en cirkel. *Hint*: 15

Opgave 1.11.11. Lad α være en halvcirkel med diameter PQ, β en cirkel som tangerer linjestykket PQ og halvcirklen α, førstnævnte i punktet C, og γ en linje som tangerer β og står vinkelret på PQ i punktet B, så B ligger mellem C og Q. Kald det andet skæringspunkt mellem α og γ for A. Vis at AC er vinkelhalveringslinje i trekant PAB.



Hint: 20

2 Hints

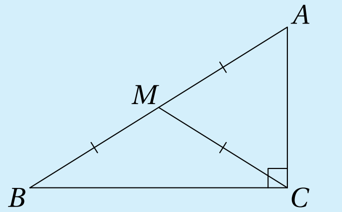
1. Tegn en god tegning med passer og lineal. Det er nemmest at tegne cirklen først. Indtegn kun A_1 og A_2, og altså ikke B_1, B_2, C_1 og C_2. Det gør figuren meget mere overskuelig. Gå på vinkeljagt og længdejagt, og marker alt det du ved der er ens.
2. Vis at $\triangle TPK \sim \triangle LPT$.
3. Tegn en god og præcis tegning med passer og lineal. Husk at det er nemmest at starte med at tegne cirklen og derefter tegne trekanten. Marker alle rette vinkler på figuren.
4. Brug sætning 1.2.10.
5. Lad R være skæringspunktet mellem NM og PQ. Vis at $|PR| = |QR|$.
6. Brug sætning 1.2.10 og sætning 1.3.4.
7. Inversion i en cirkel med centrum A.
8. Radikalcentrene er henholdsvis M og N.
9. Betragt centrum O_a for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC.
10. Vis at firkant $ADST$ og firkant $BCST$ er indskrivelige.
11. Indfør punktet D på forlængelsen af AB så $|DK| = |KA|$.
12. Betragt multiplikationen omkring A med multiplikationsfaktor k som fører ω_1 i ω_2. Betragt derefter multiplikationen omkring B med multiplikationsfaktor $-k$.
13. Vinkel w: Tegn linjestykket BD, og kald vinkelspidsen ved w for P. Betragt $\triangle PBD$ og periferivinkler.
14. Inversion i en cirkel med centrum P.
15. Inversion i en cirkel med centrum A.
16. Betragt højdernes skæringspunkt H og potensen af H mht. til de to cirkler.
17. Vis at højden fra B også er en median.
18. Vis at $\triangle ABD \sim \triangle ACB$.
19. Indtegn diagonalen AC.
20. Inversion i en cirkel med centrum C.
21. Vis at $\triangle PCM \sim \triangle LCA$.
22. Inversion i cirklen med centrum C og radius s.
23. Betragt multiplikationen omkring centrum af cirklen gennem X, Y og Z med multiplikationsfaktor $k = -1$.
24. Lad T være skæringspunktet mellem PQ og RS. Vis at L er cirklen med centrum i T og radius $\sqrt{|TP||TQ|}$ fraregnet enkelte punkter.
25. Benyt Herons formel.
26. Brug punkts potens af A mht. cirklen med diameter EF til at vise at firkant $PFOR$ er indskrivelig.
27. Vis at hvis trekanten med sidelængderne $n-1$, n og $n+1$ har et heltalligt areal, da har trekanten med sidelængderne n^2-3, n^2-2 og n^2-1 også et heltalligt areal.
28. Tegn en god og præcis tegning hvor du kun indtegner to vinkelhalveringslinjer. Vis at deres skæringspunkt ligger i samme afstand til til alle tre sider i trekanten.
29. Inversion i en cirkel med centrum A.
30. Udvid figuren så linjen bliver median i en ny trekant.
31. Vis at firkant $KMDL$ er indskrivelig.
32. Vis at firkant $AECD$ er indskrivelig.
33. Betragt multiplikationen omkring M med multiplikationsfaktor $k = -\frac{1}{2}$.
34. Vis at $P = Q$ netop når $|AB| = |AC|$.
35. Inversion i en cirkel med centrum O.
36. Husk at radien AO står vinkelret på tangenten, og gå på vinkeljagt. Brug sætningen om korde-tangent-vinkler til at bevise den omvendte sætning om korde-tangent-vinkler.
37. Vis at billedet af de ni punkter ved en multiplikation omkring H med en faktor 2 alle ligger på den omskrevne cirkel til trekant ABC.
38. Lad A_2 være skæringspunktet mellem IA og BC. Vis at trekant IA_2B er en 30°-60°-90°-trekant.
39. Inversion i en cirkel med centrum O.
40. Kald højdernes skæringspunkt for H, og udnyt at firkant $CKHL$ er indskrivelig.
41. Vis at $\triangle AO_aF \sim \triangle AEI$.
42. Udnyt at firkant $MHCB$ er indskrivelig.
43. Vis at firkant CJO_aF er indskrivelig.
44. Vis at firkanterne PCP_2P_1, PP_3BP_1 og PP_2AP_3 er indskrivelige, og udnyt dette til at vise at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$.
45. Vis at $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ med forholdet $4:1$.
46. Kan du udvide figuren på en smart måde?

47. Tegn en god og præcis figur hvor du kun indtegner to midtnormaler. Vis at deres skæringspunkt har samme afstand til alle tre vinkelspidser i trekanten.
48. Betragt multiplikationen omkring A med multiplikationsfaktor k_1 som fører ω_1 i ω, og multiplikationen omkring A med multiplikationsfaktor k_2 som fører ω_2 i ω.
49. Husk at firkant $EFGO$ er et parallelogram.
50. Vis at firkant $DCEH$ og firkant $DHFB$ er indskrivelige.
51. Vinkel v: Kald skæringen mellem AC og BD for P. Tegn linjestykket AD, og betragt $\triangle PAD$ og periferivinkler.
52. Vis at F er centrum for den ydre røringscirkel til siden CD i trekant ACD.
53. Vis at $\triangle ABF \sim \triangle AEC$.

3 Løsninger

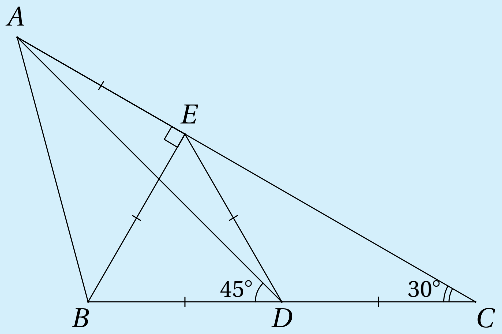
Opgave 1.1.1. Betragt en retvinklet trekant ABC, hvor vinkel C er ret, og lad M være midtpunktet af hypotenusen AB. Fra sætning 1.1.1 i) ved vi at trekant AMC er ligebenet med $|AM| = |CM|$.

Antag først at kateten AC er halvt så lang som hypotenusen. Da er $|AC| = |AM| = |CM|$. Det viser at trekant AMC er en ligesidet trekant, dvs. alle vinkler er 60°. Altså er $\angle ABC = 30°$.



Antag nu omvendt at $\angle ABC = 30°$. Da er $\angle CAB = 60°$, og da trekant AMC er ligebenet, må $\angle ACM = \angle CAM = 60°$, dvs. trekant AMC er ligesidet. Det medfører at $|AC| = |AM| = \frac{1}{2}|AB|$, og altså at kateten AC er halvt så lang som hypotenusen AB.

Opgave 1.1.2. Da $\angle BCE = 30°$, er trekant CBE en 30°-60°-90°-trekant. Det betyder ifølge sætning 1.1.1 ii) at $|BE| = \frac{1}{2}|BC| = |BD|$. Da $\angle EBD = 60°$, må trekant BED være ligesidet, dvs. alle vinkler er 60°.



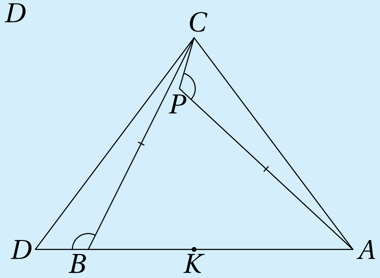
Nu er

$$\angle ADE = \angle BDE - \angle ADB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ,$$
$$\angle DAE = 180^\circ - \angle AEB - \angle BED - \angle ADE = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 15^\circ.$$

Altså er trekant AED ligebenet med $|AE| = |ED| = |EB|$. Det giver yderligere at trekant AEB er en ligebenet retvinklet trekant. Afslutningsvis er

$$\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$

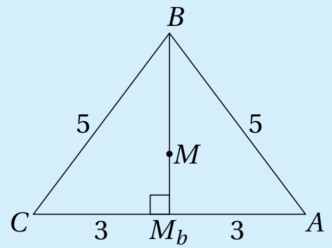
Opgave 1.1.3. Forlæng siden AB, og lad D være punktet på forlængelsen så K er midtpunktet af AD som vist.



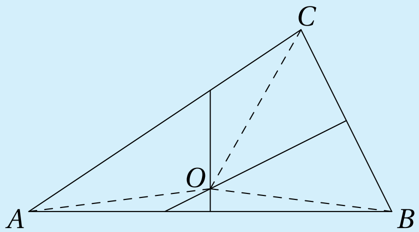
Nu er $|BD| = |AK| - |BK| = |KB| + |PC| - |KB| = |PC|$. Desuden er $\angle CBD = 180° - \angle ABC = \angle APC$. Altså er trekant APC og trekant CBD kongruente da de har to parvis lige lange sider med samme mellemliggende vinkel. Det betyder at $|AC| = |CD|$. Derfor er trekant ACD en ligebenet trekant hvor K er midtpunktet af grundlinjen, og det betyder at CK er højde i trekanten. Altså er $\angle AKC$ ret.

Opgave 1.2.1. Da MN er midtpunktstransversal i trekant ABC, og PQ er midtpunktstransversal i trekant CDA, er både MN og PQ parallelle med AC og derfor også med hinanden. På samme måde ses at NP og MQ er parallelle. Derfor er firkant $MNPQ$ et parallelogram.

Opgave 1.2.2. Højden fra B må dele trekant ABC i to retvinklede trekanter. Længden af hypotenusen i de to trekanter er $a = c = 5$, og desuden deler de en katete. Dermed er de kongruente. Det betyder at højden fra B også er medianen fra B. Kald fodpunktet for medianen fra B på AC for M_b. Ifølge Pythagoras' sætning er $|BM_b| = 4$. Da medianerne deler hinanden i forholdet $1:2$, må $BM = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$.

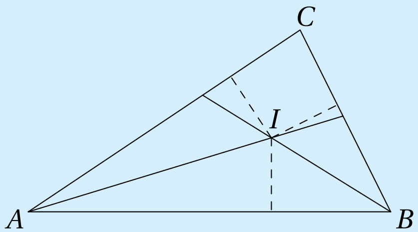


Opgave 1.2.3. Lad ABC være en trekant, tegn midtnormalerne på AB og BC, og kald deres skæringspunkt for O.



Da midtnormalen på AB er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til A og B, og midtnormalen på BC er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til B og C, må afstandene fra O til henholdsvis A, B og C være lige store. Punktet O er dermed centrum for den omskrevne cirkel, og midtnormalen på AC vil på tilsvarende vis gå gennem O.

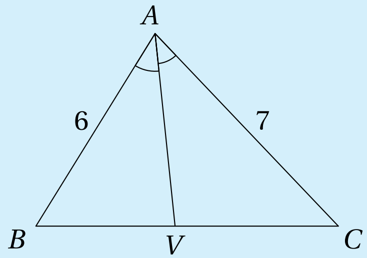
Opgave 1.2.4. Lad ABC være en trekant, tegn vinkelhalveringslinjerne fra A og B, og kald deres skæringspunkt for I.



Da vinkelhalveringslinjerne er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til vinklens ben, må afstandene fra I til alle tre sider være lige store. Punktet I er dermed centrum for den indskrevne cirkel, og vinkelhalveringslinjen fra C vil på tilsvarende vis gå gennem I.

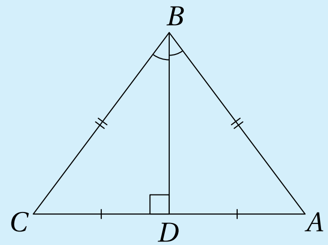
Opgave 1.2.5. Vinkelhalveringslinjen AV deler ifølge sætning 1.2.7 modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende sider:

$$\frac{|CV|}{|BV|} = \frac{b}{c} = \frac{7}{6}.$$



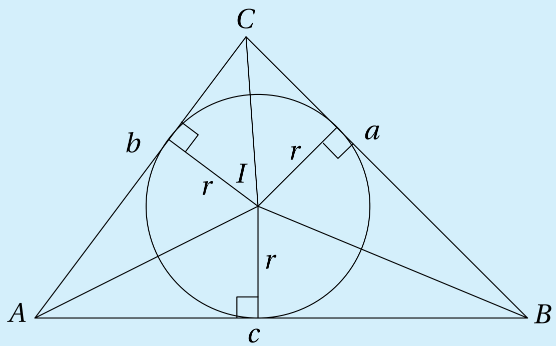
Da vi yderligere ved at $a = 8$, må $|CV| = 8 - |BV|$, hvilket giver $6 \cdot (8 - |BV|) = 7 \cdot |BV|$. Altså er $|BV| = \frac{48}{13}$.

Opgave 1.2.6. Lad ABC være en ligebenet trekant hvor $|AB| = |BC|$. Betragt først højden fra B på AC, og kald fodpunktet af højden for D.



Da er $\triangle BCD$ og $\triangle BAD$ begge retvinklede, hypotenuserne er lige lange, og de deler kateten BD. Dermed er de kongruente. Det betyder at D er midtpunket af AC, og at $\angle ABD = \angle CBD$. Dermed er linjen BD både højden, vinkelhalveringslinjen og medianen fra vinkel B samt midtnormalen på AC.

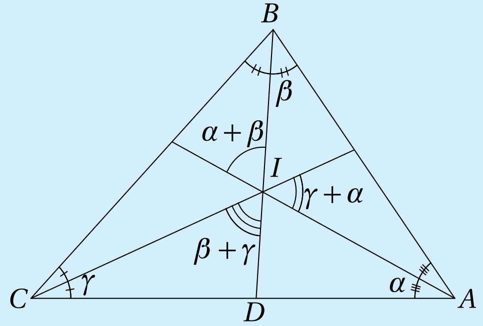
Opgave 1.2.7. Kald centrum for den indskrevne cirkel for I.



Arealet af trekant ABI er da $\frac{1}{2}rc$ da r er højden, og c er grundlinjen. Tilsvarende er arealet af trekant ACI og BCI henholdsvis $\frac{1}{2}rb$ og $\frac{1}{2}ra$. Da arealet af trekant ABC netop er summen af arealerne af disse tre trekanter, er

$$T = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr.$$

Opgave 1.2.8. Lad D være fodpunktet for vinkelhalveringslinjen fra B.

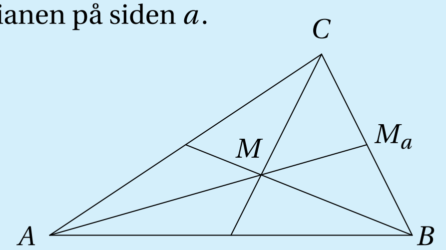


Vi udnytter vinkelsummen i en trekant til at få $\angle BDC = 180° - \beta - 2\gamma$. Dermed er

$$\angle DIC = 180° - (180° - \beta - 2\gamma) - \gamma = \beta + \gamma.$$

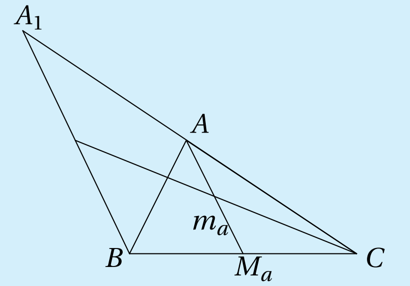
De andre vinkler findes på tilsvarende måde.

Opgave 1.2.9. Lad M betegne medianernes skæringspunkt og M_a betegne fodpunktet for medianen på siden a.



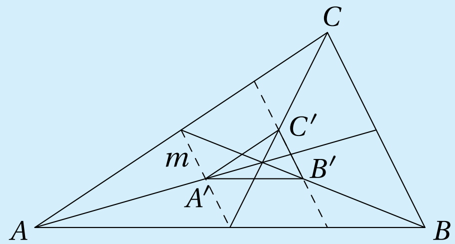
Da $3|MM_a| = |AM_a|$, er højden fra A i trekant ABC tre gange så stor som højden fra M i trekant MBC. Dermed udgør arealet af trekant MBC en tredjedel af arealet af trekant ABC. Desuden har trekant MM_aB og trekant MM_aC samme areal da de har samme højde og lige store grundlinjer. Dermed deler medianerne en trekant i seks små trekanter med samme areal.

Opgave 1.2.10. Kald fodpunktet af medianen m_a på a for M_a. Tegn en linje gennem B parallel med M_aA, og lad A_1 være skæringspunktet mellem denne linje og forlængelsen af siden AC.



Trekanterne ACM_a og A_1CB er per konstruktion ensvinklede med forholdet $1:2$, dvs. at $|CA| = |AA_1|$. Linjen gennem C som halverer m_a, halverer også A_1B da m_a er midtpunktstransversal i trekant A_1BC. Denne linje og AB er derfor begge medianer i trekant A_1BC, og linjen deler dermed AB i forholdet $1:2$.

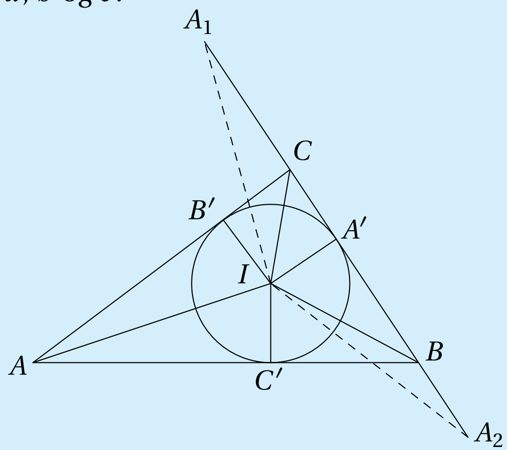
Opgave 1.2.11. Først viser vi at siderne i trekant $A'B'C'$ er parallelle med siderne i trekant ABC. Indtegn midtpunktstransversalen m gennem siderne AB og AC.



Denne midtpunktstransversal går gennem A' og er parallel med BC. Punkterne B' og C' ligger per konstruktion lige langt fra linjen m og linjen BC, og dermed er siden $B'C'$ parallel med BC. Tilsvarende gælder for de andre to sider i trekant $A'B'C'$. Vi har nu at siderne i trekant ABC og siderne i trekant $A'B'C'$ er parallelle.

Da midtpunktstransversalen m deler siden AB på midten, må linjen $B'C'$ dele siden AB i forholdet $1:3$, dvs. at $|AB| = 4|A'B'|$. Dermed er forholdet mellem siderne i trekant $A'B'C'$ og siderne i trekant ABC $1:4$, dvs. at forholdet mellem arealerne er $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Arealet af trekant $A'B'C'$ er derfor $\frac{1}{16}$.

Opgave 1.2.12. Lad A', B' og C' være den indskrevne cirkels røringspunkter med henholdsvis a, b og c.

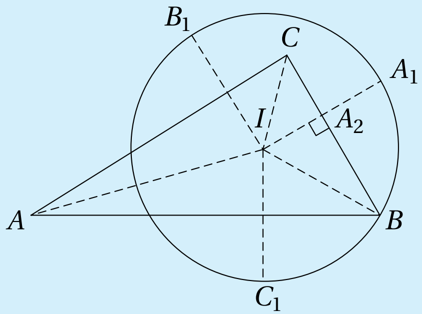


Trekanterne $IA'A_1$, $IA'A_2$, $IB'A$ og $IC'A$ er kongruente, da de alle er retvinklede, $|A'I| = |B'I| = |C'I|$ og $|IA| = |IA_1| = |IA_2|$. Dermed er

$$|A_1A_2| = |A_1A'| + |A'A_2| = |B'A| + |AC'|.$$

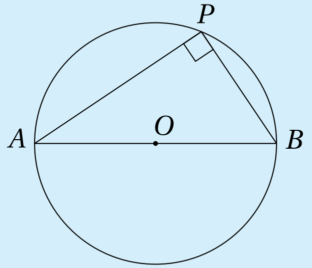
På tilsvarende vis fås $|B_1B_2| = |A'B| + |BC'|$ og $|C_1C_2| = |B'C| + |CA'|$. Dette giver det ønskede.

Opgave 1.2.13. Lad A_2 være skæringspunktet mellem IA_1 og BC.



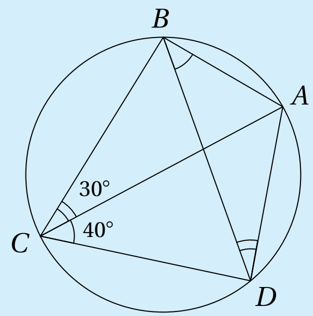
Da A_1 er spejlingen af I i siden CB, står IA_1 vinkelret på BC og $|IA_1| = 2|IA_2|$. Dermed er trekant BA_2I er retvinklet, og $|IB| = |IA_1| = 2|IA_2|$. Da hypotenusen er dobbelt så lang som kateten IA_2, følger det af sætning 1.1.1 at $\angle IBA_2 = 30°$. Fordi BI er vinkelhalveringslinje, kan vi nu konkludere at $\angle ABC = 60°$.

Opgave 1.3.1. Vinklen $\angle APB$ er halvt så stor som den tilsvarende centervinkel $\angle AOB$, dvs. den er ret netop når $\angle AOB = 180°$, og dermed netop når AB er en diameter.

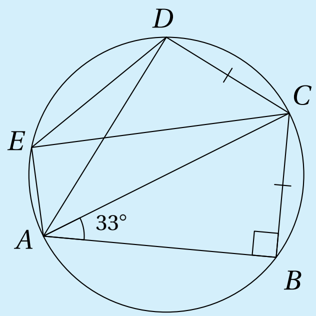


Opgave 1.3.2. Tegn linjen BD. Sætningen om periferivinkler giver at $\angle ADB = \angle ACB = 30°$ og $\angle ABD = \angle ACD = 40°$. Dermed er

$$\angle BAD = 180° - \angle ADB - \angle ABD = 180° - 30° - 40° = 110°.$$



Opgave 1.3.2

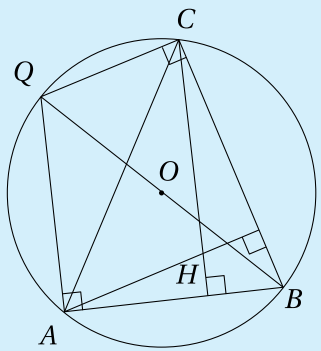


Opgave 1.3.3

Opgave 1.3.3. Da vinkel $\angle ABC$ er ret, må AC være diameter i cirklen ifølge korollar 1.3.2. Det betyder at $\angle AEC = 90°$ da den spænder over en diameter. Ifølge sætningen om periferivinkler er $\angle CED = \angle BAC = 33°$ da de spænder over samme buelængde fordi $|BC| = |CD|$. Samlet er

$$\angle DEA = \angle DEC + \angle CEA = 33° + 90° = 123°.$$

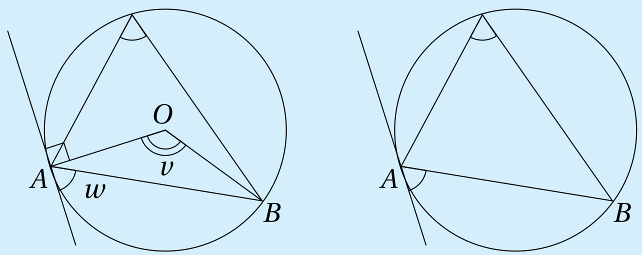
Opgave 1.3.4. Da BQ er diameter i den omskrevne cirkel, står QC vinkelret på CB og er dermed parallel med AH da AH også står vinkelret på CB.



På samme måde ses at QA er parallel med CH. Dermed er $AQCH$ et parallelogram.

Opgave 1.3.5. Vi skal vise at korde-tangentvinklen w er halvt så stor som den centervinkel v der spænder over korden. Linjestykket fra centrum til tangentens røringspunkt står vinkelret på tangenten. Da trekant AOB er ligebenet med $|AO| = |BO|$ fordi de begge er radier i den omskrevne cirkel, er

$$w = 90^\circ - \angle OAB = 90^\circ - \frac{180^\circ - v}{2} = \frac{v}{2}.$$

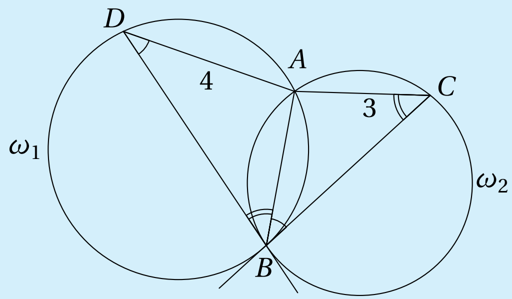


Den omvendte sætning om korde-tangent-vinkler: Ifølge det vi netop har vist, danner tangenten gennem punktet A på cirkelperiferien sammen med korden AB en vinkel der er lige så stor som den periferivinkel der spænder over korden AB. Linjen gennem A, der også danner denne vinkel med korden AB, må derfor være sammenfaldende med tangenten, dvs. den tangerer cirklen.

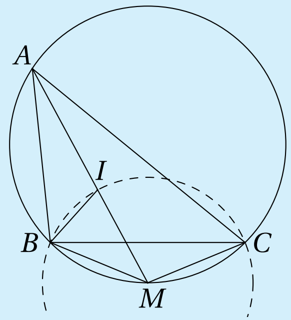
Opgave 1.3.6. Ifølge sætning 1.3.3 om korde-tangentvinkler er $\triangle ABD \sim \triangle ACB$. Dette giver

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|},$$

dvs. $|AB|^2 = |AC||AD| = 12$, og altså $|AB| = \sqrt{12}$.



Opgave 1.3.7. Da AI er vinkelhalveringslinje i trekant ABC, må M være midtpunktet af cirkelbuen BC. Dermed er $|BM| = |CM|$. Lad som sædvanlig α, β og γ være de halve vinkler.

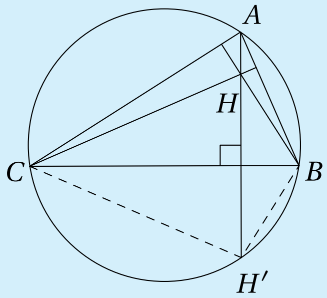


Vi mangler at bevise at $|IM| = |BM|$. Ved at benytte sætningen 1.2.10 om vinkler ved I fås at $\angle BIM = \alpha + \beta$. Da periferivinkler der spænder over samme bue, er lige store, fås

$$\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \angle MAC + \beta = \alpha + \beta.$$

Dermed er $|IM| = |BM|$, og M er centrum for cirklen gennem B, C og I.

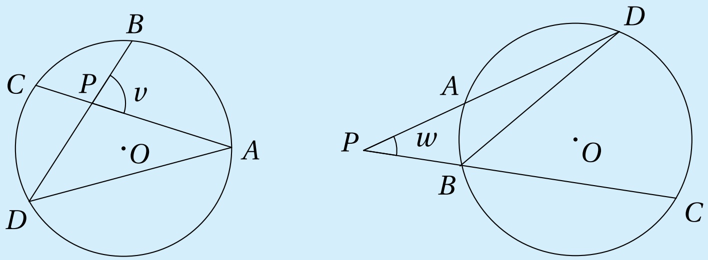
Opgave 1.3.8. Vi viser det i tilfældet hvor ABC er en spidsvinklet trekant. Lad H' være skæringen mellem AH og den omskrevne cirkel til trekant ABC.



Da er $\angle H'CB = \angle H'AB = 90° - \angle ABC = \angle HCB$. Da HA står vinkelret på BC, følger det at H' er spejlingen af H i siden BC. Beviset foregår stort set på samme måde hvis trekant ABC er stumpvinklet.

Opgave 1.3.9. Vinkel v: Betragt trekant ADP. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er

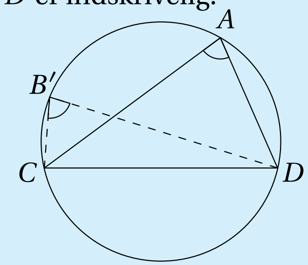
$$v = 180° - \angle APD = \angle PDA + \angle PAD = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$



Vinkel w: Bemærk først at $\angle PBD = 180° - \angle DBC = 180° - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$. Betragt nu trekant PBD. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er

$$w = 180° - \angle ADB - \angle PBD = 180° - \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \left(180° - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\right) = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}.$$

Opgave 1.4.1. Først viser vi at iii) medfører i). Lad $ABCD$ være en firkant hvor $\angle CAD = \angle CBD$. Tegn den omskrevne cirkel til trekant ACD, og lad B' være skæringspunktet mellem BD og den omskrevne cirkel. Da B' ligger på cirkelperiferien, er $\angle CB'D = \angle CAD = \angle CBD$. Trekanterne CDB og CDB' er dermed kongruente da de også har vinklen ved D fælles og siden CD. Dermed er $B = B'$, og firkant $ABCD$ er indskrivelig.

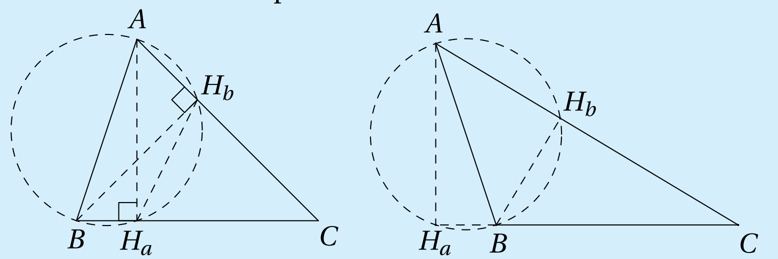


Til slut viser vi at i) medfører iii). Lad omvendt $ABCD$ være en indskrivelig firkant. Da gælder ifølge sætningen om periferivinkler at $\angle CAD = \angle CBD$.

Opgave 1.4.2. Vi ser først på tilfældet hvor trekant ABC er spidsvinklet. Firkant ABH_aH_b er indskrivelig ifølge sætningen om indskrivelige firkanter da $\angle AH_aB = 90° = \angle AH_bB$. Da ABH_aH_b er indskrivelig, må

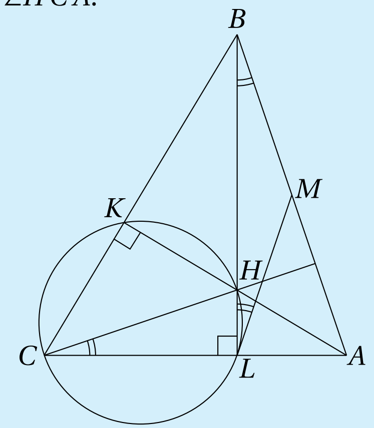
$$\angle CH_aH_b = 180° - \angle BH_aH_b = \angle CAB.$$

Dermed er $\triangle CAB$ ensvinklet med $\triangle CH_aH_b$. Beviset foregår stort set tilsvarende hvis trekanten er stumpvinklet.



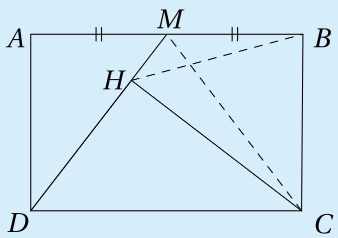
Opgave 1.4.3. Da firkant AH_bH_aB er indskrivelig, er $\angle AH_aH_b = \angle ABH_b$. Tilsvarende er $\angle AH_aH_c = \angle ACH_c$. Da $\triangle ABH_b$ og $\triangle ACH_c$ er retvinklede og har vinkel A fælles, er de ensvinklede, og dermed er $\angle ABH_b = \angle ACH_c$. Samlet er AH_a vinkelhalveringslinje i $\triangle H_aH_bH_c$.

Opgave 1.4.4. Kald højdernes skæringspunkt for H. Da firkant $CKHL$ er indskrivelig, ligger H på den omskrevne cirkel til trekant CKL. Da højderne skærer hinanden i samme punkt, er linjen CH også højde i trekanten. Derfor er $\angle ABL = 90° - \angle BAC = \angle HCA$.



Da M er midtpunktet af hypotenusen i den retvinklede trekant ALB, er $\angle ABL = \angle MLB$. Dermed er vinklen mellem linjen ML og korden HL den samme som periferivinklen $\angle HCL$ der spænder over korden HL. Altså er ML tangent til cirklen ifølge den omvendte sætning om korde-tangentvinkler. Helt tilsvarende vises at MK er tangent til cirklen.

Opgave 1.4.5. Da $\angle MHC = \angle MBC = 90°$, er firkant $MHCB$ indskrivelig ifølge sætningen om indskrivelige firkanter.



Ved at bruge sætningen om indskrivelige firkanter og sætningen om periferivinkler fås

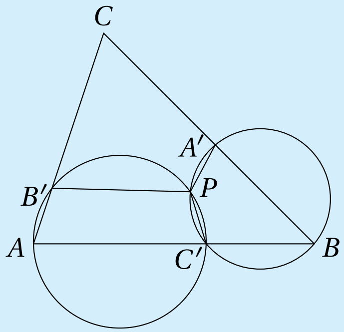
$$\angle BCH = 180° - \angle BMH = \angle AMD = \angle BMC = \angle BHC,$$

hvilket viser at $|BC| = |BH|$.

Opgave 1.4.6. Betragt de omskrevne cirkler til $\triangle AB'C'$ og $\triangle BC'A'$, og kald deres andet skæringspunkt for P. Vi viser at firkant $A'CB'P$ er indskrivelig da det viser det ønskede. Sætningen om indskrivelige firkanter giver

$$\angle CB'P = 180° - \angle AB'P = \angle AC'P = 180° - \angle BC'P = \angle BA'P = 180° - \angle PA'C.$$

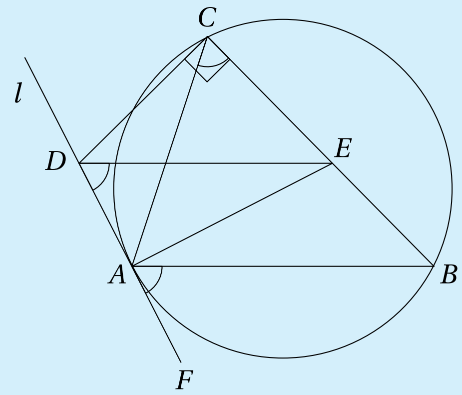
Dette viser at firkant $A'CB'P$ er indskrivelig.



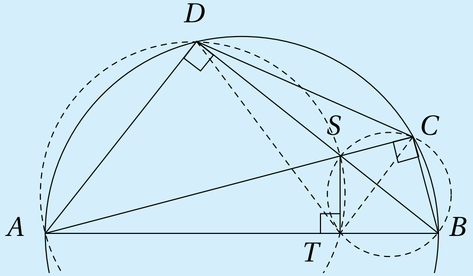
Opgave 1.4.7. Da linjen DE er parallel med AB, giver sætningen om korde-tangent-vinkler at

$$\angle ADE = \angle FAB = \angle ACE.$$

Det betyder ifølge sætningen om indskrivelige firkanter at firkant $AECD$ er indskrivelig, og dermed yderligere at $\angle DAE$ er ret. Da linjen fra centrum af cirklen til røringspunktet for en tangent står vinkelret på tangenten, betyder det at centrum O for den omskrevne cirkel til trekant ABC ligger på linjen AE.



Opgave 1.4.8. Vinkel ADB og vinkel ACB er rette da de spænder over en diameter i cirklen.

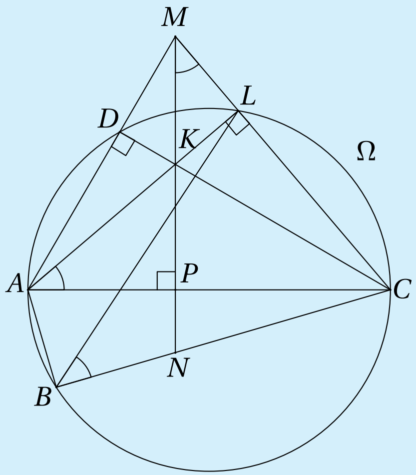


Firkanterne $ADST$ og $BCST$ er derfor indskrivelige da de har to modstående rette vinkler, og firkant $ABCD$ er pr. konstruktion indskrivelig. Dermed er

$$\angle CTS = \angle CBS = \angle CBD = \angle CAD = \angle SAD = \angle STD,$$

hvilket viser at linjen ST halverer vinkel $\angle CTD$.

Opgave 1.4.9. Bemærk først at $\angle CDA$ og $\angle CLA$ begge er rette da de spænder over diameteren i Ω. Altså er firkant $KDML$ indskrivelig. Lad P være skæringspunktet mellem AC og MN. Da K er højdernes skæringspunkt i trekant AMC, må $\angle APN$ være ret. Det betyder at $\triangle PCM$ og $\triangle LCA$ er ensvinklede da de deler vinkel C og begge har en ret vinkel. Dermed er $\angle LAC = \angle CMP$.



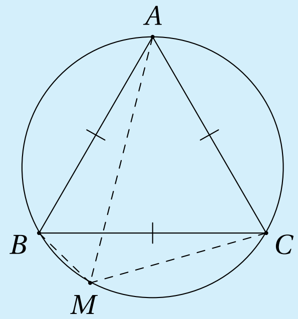
Vi ved yderligere pga. periferivinkler at $\angle LAC = \angle LBC$, dvs.

$$\angle LBN = \angle LBC = \angle LAC = \angle CMP = \angle LMN,$$

hvilket ifølge sætningen om indskrivelige firkanter viser at firkant $BNLM$ er indskrivelig.

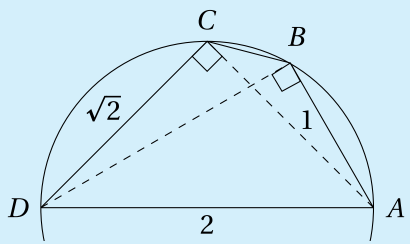
Opgave 1.4.10 Ifølge Ptolemæus' sætning gælder at

$$|MA||BC| = |MB||AC| + |MC||AB|.$$



Da trekant ABC er ligesidet, fås $|MA| = |MB| + |MC|$.

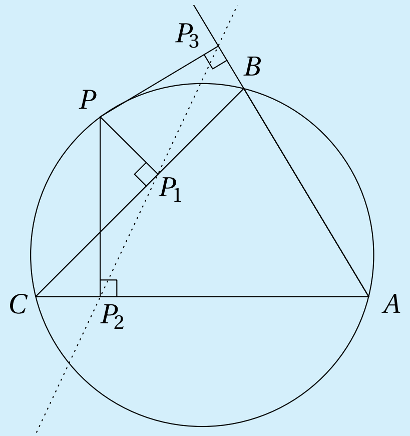
Opgave 1.4.11 Bemærk at AD er diameter i cirklen, og dermed at trekanterne ACD og ABD er retvinklede.

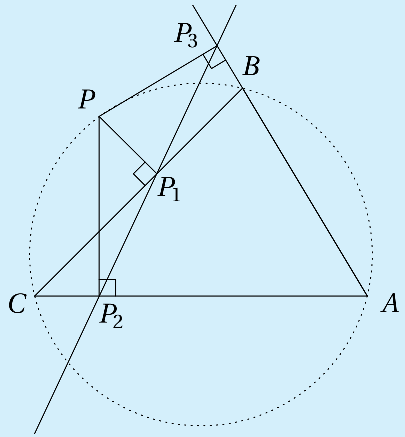


Pythagoras' sætning giver dermed at $|BD| = \sqrt{3}$ og $|CD| = \sqrt{2}$. Ved at anvende Ptolemæus' sætning får vi nu at

$$|BC| = \frac{|AC||BD| - |AB||CD|}{|AD|} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Opgave 1.4.12. Antag først at P er et punkt på den omskrevne cirkel til trekant ABC, og antag uden tab af generalitet at P ligger på buestykket BC så projektionen P_2 af P på linjen AC ligger på linjestykket AC, mens projektionen P_3 af P på linjen AB ikke ligger på linjestykket AB, men dets forlængelse.





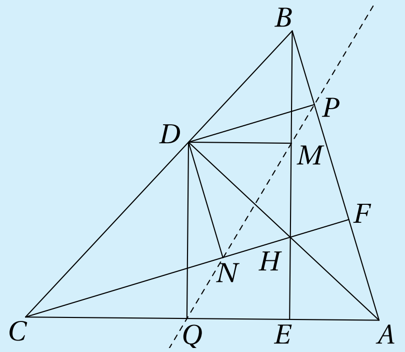
Firkant PCP_2P_1 er indskrivelig da begge diagonaler står vinkelret på en side, og dermed er $\angle CP_1P_2 = \angle CPP_2$. Firkant PP_1BP_3 er indskrivelig da to modstående vinkler er rette, og dermed er $\angle BP_1P_3 = \angle BPP_3$. Firkant PP_2AP_3 er indskrivelig da to modstående vinkler er rette. Da firkant $ABPC$ pr. antagelse er indskrivelig, er $\angle P_3PP_2 = 180° - \angle BAC = \angle BPC$. Af dette følger at $\angle BPP_3 = \angle CPP_2$, og samlet at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$, dvs. at punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje.

Antag omvendt at de tre projektioner P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje. For nemheds skyld antager vi at vi har samme konfiguration som før, men altså hvor vi denne gang ved at P_1, P_2 og P_3 ligger på linje. Firkanterne PCP_2P_1,PP_1BP_3 og AP_3PP_2 er oplagt indskrivelige, og dermed er

$$\begin{aligned}\angle CPB &= \angle CPP_2 + \angle P_2PP_3 - \angle BPP_3\\ &= \angle CP_1P_2 + (180° - \angle P_2AP_3) - \angle BP_1P_3 = 180° - \angle CAB.\end{aligned}$$

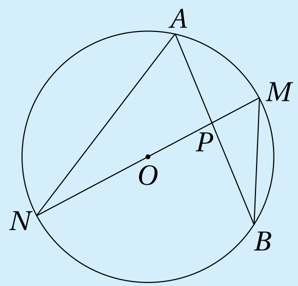
Det viser at P ligger på den omskrevne cirkel til trekant ABC.

Opgave 1.4.13. Firkant $CDHE$ er indskrivelig da den har to modstående rette vinkler. Dermed ligger D på den omskrevne cirkel til trekant CHE, hvilket betyder at Q, M og N ligger på en linje ifølge sætning 1.4.5 om Simsonlinjen.



Tilsvarende ligger D på den omskrevne cirkel til trekant HFB hvilket betyder at M, N og P ligger på linje. Dette viser samlet at alle fire punkter P, Q, M og N ligger på en ret linje.

Opgave 1.5.1. Lad P være et punkt inden i cirklen så $P \neq O$, og lad l være en linje gennem P som skærer cirklen i punkterne A og B.

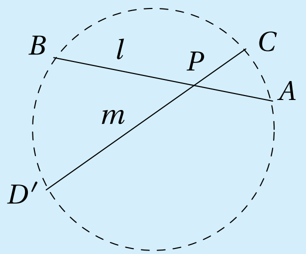


Tegn linjen gennem P og O, og kald skæringspunkterne med cirklen for M og N. Trekanterne $\triangle AMP$ og $\triangle NBP$ er ensvinklede ifølge sætningen om periferivinkler. Altså er

$$|AP||BP| = |MP||NP| = (r - |OP|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2 = -\text{Pow}(P,\omega).$$

Lad nu m være endnu en linje gennem P som skærer cirklen i punkterne C og D. Ifølge det vi netop har vist, må også $|CP||DP| = -\text{Pow}(P,\omega)$, dvs. at $|AP||BP| = |CP||DP|$.

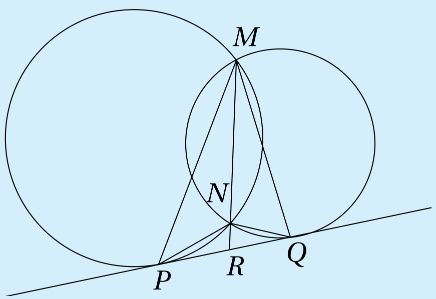
Opgave 1.5.2. Antag at A og B ligger på l på hver sin side af P, og at C og D ligger på m på hver sin side af P. Antag yderligere at $|PA||PB| = |PC||PD|$.



Lad ω være cirklen gennem A, B og C, og lad D' være skæringen (forskellig fra C) mellem ω og linjen m. Da P ligger på korden AB, må P være et indre punkt i ω. Dermed ligger P også på korden CD', dvs. at D og D' ligger på samme side af P på linjen m. Ifølge sætningen om et punkts potens er $|PA||PB| = |PC||PD'|$. Dermed er $|PD| = |PD'|$ og altså $D = D'$. De fire punkter A, B, C og D ligger derfor på samme cirkel.

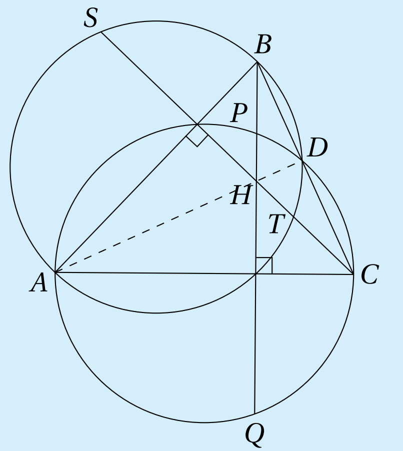
Beviset føres stort set tilsvarende når både A og B ligger på samme side af P, og C og D ligger på samme side af P. I dette tilfælde er P blot et punkt der ligger uden for cirklen.

Opgave 1.5.3. Lad R være skæringspunktet mellem NM og PQ. Ifølge sætningen om punkts potens er $|PR|^2 = |RN||RM| = |QR|^2$, og altså $|PR| = |QR|$.



Dermed har $\triangle MRP$ og $\triangle MRQ$ samme areal da de har samme højde og grundlinje, og $\triangle NPR$ og $\triangle NQR$ samme areal af samme årsag. Altså har $\triangle MNP$ og $\triangle MNQ$ også samme areal.

Opgave 1.5.4. Lad D være skæringspunktet mellem de to cirkler. Vinklerne $\angle ADB$ og $\angle ADC$ er begge rette da de spænder over en diameter, og dermed er D fodpunktet for højden fra A på siden BC.



Højdernes skæringspunkt H ligger derfor på AD, hvilket ifølge sætningen om et punkt potens giver at

$$|HS||HT| = |HA||HD| = |HP||HQ|.$$

Dermed ligger P, Q, S og T på en cirkel ifølge den omvendte sætning om et punkts potens.

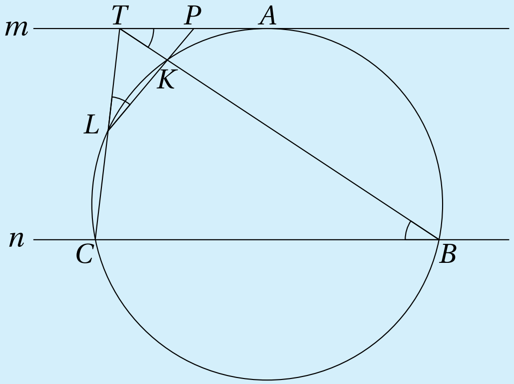
Opgave 1.5.5. Lad P være skæringspunktet mellem linjerne LK og m. Da m og n er parallelle, er $\angle CBT = \angle KTP$. Firkant $BCLK$ er indskrivelig, dvs. modstående vinkler har sum 180°, og derfor får vi yderligere at $\angle TLP = \angle CBT = \angle KTP$. Dermed er $\triangle TPK \sim \triangle LPT$. Dette giver at

$$|TP|^2 = |PK||PL|.$$

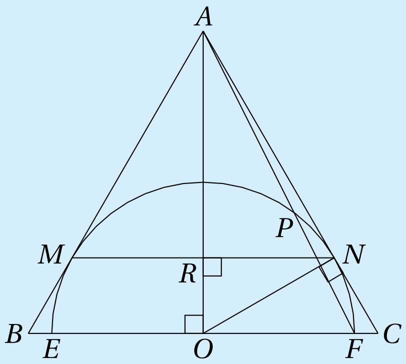
Dette kombineret med sætningen om punkts potens viser at P's potens i forhold til cirklen er

$$|AP|^2 = |PK||PL| = |TP|^2.$$

Altså er P midtpunktet af AT.



Opgave 1.5.6. Lad O være centrum for halvcirklen, og lad R være skæringspunktet mellem AO og NM. Punktet R er da midtpunktet af MN da figuren er symmetrisk omkring linjen AO. Trekanterne $\triangle ARN$ og $\triangle ANO$ er ensvinklede da de begge er retvinklede og desuden deler vinklen ved A. Altså er $|AN|^2 = |AR||AO|$.

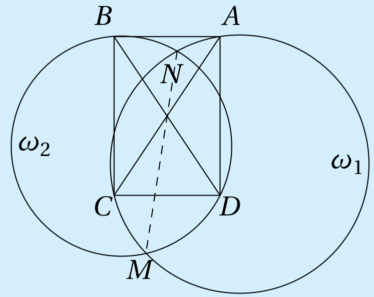


Sætningen om et punkts potens giver nu at

$$|AP||AF| = |AN|^2 = |AR||AO|.$$

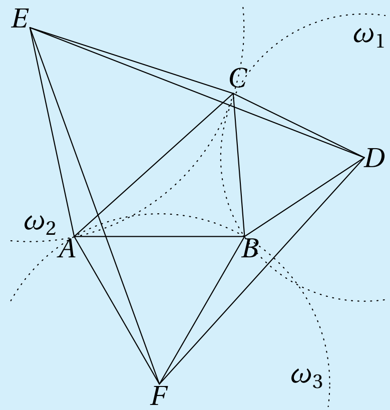
Af den omvendte sætning om et punkt potens følger nu at firkant $PFOR$ er indskrivelig, og altså at $\angle RPF$ er ret. Vinkel $\angle EPF$ er også ret da den spænder over en diameter, og derfor må P, R og E ligge på linje. Det betyder at linjen PE deler linjestykket NM på midten.

Opgave 1.6.1. Radikalaksen for ω_1 og ω_2 er linjen MN. Kald den omskrevne cirkel til rektanglet $ABCD$ for ω.



Radikalaksen for ω og ω_1 er AC, og radikalaksen for ω og ω_2 er BD. Ifølge sætningen om radikalcentrum skærer de tre radikalakser hinanden i et punkt, eller også er de alle tre parallelle. Det sidste er ikke muligt her da AC og BD er diagonalerne i et rektangel. Dermed ligger skæringspunktet mellem AC og BD på linjen MN.

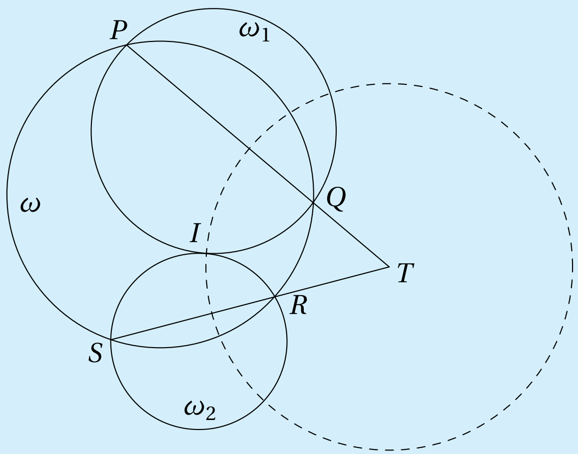
Opgave 1.6.2. Lad ω_1 være cirklen med centrum i D gennem B og C, ω_2 være cirklen med centrum i E gennem A og C, og ω_3 cirklen med centrum i F gennem A og B. Radikalaksen for ω_1 og ω_2 er linjen gennem deres fælles punkt C som står vinkelret på linjen gennem deres centre, dvs. vinkelret på linjen DE. Tilsvarende er radikalaksen for ω_1 og ω_3 linjen gennem B vinkelret på linjen DF, og radikalaksen for ω_2 og ω_3 linjen gennem A vinkelret på EF.



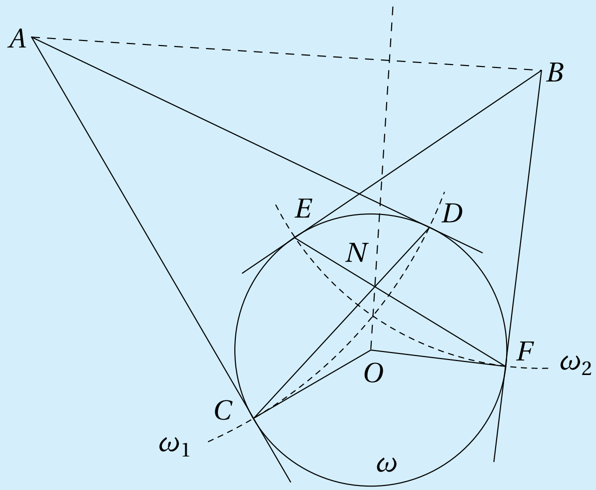
Ifølge sætningen om radikalcentrum skærer de tre linjer hinanden i et punkt, hvis de ikke alle er parallelle. Det sidste er ikke en mulighed da de tre linjer står vinkelret på hver sin side i trekant DEF.

Opgave 1.6.3. Lad T være skæringspunktet mellem PQ og RS, og lad ω_1 og ω_2 være to cirkler gennem henholdsvis P og Q samt R og S som tangerer hinanden i I. Da T ligger på radikalaksen for ω og ω_1, samt på radikalaksen for ω og ω_2, må T være radikalcentrum for de tre cirkler, hvilket betyder at $|TI| = \sqrt{|TP||TQ|}$ uanset valget af ω_1 og ω_2. Dvs. at L er en delmængde af cirklen med T som centrum og $\sqrt{|TP||TQ|}$ som radius.

Lad omvendt I være et punkt på denne cirkel som ikke ligger på nogen af linjerne SR og PQ og ikke på cirklen $PQRS$. Da vil T være radikalcentrum for cirklen ω samt de omskrevne cirkler til $\triangle PQI$ og $\triangle RSI$. Fordi $|TI| = \sqrt{|TP||TQ|}$, må de omskrevne cirkler til $\triangle PQI$ og $\triangle RSI$ tangere hinanden i I ifølge sætningen om et punkts potens. Dermed er L cirklen med centrum i T og radius $\sqrt{|TP||TQ|}$ fraregnet punkterne på linjerne RS og PQ og punkterne på cirklen $PQRS$. (Disse punkter opfylder oplagt ikke betingelsen).



Opgave 1.6.4. Kald cirklen gennem C, E, D, F for ω, cirklen med centrum i A og radius $|AC|$ for ω_1 og cirklen med centrum i B og radius $|BF|$ for ω_2. Vi ønsker at vise at O og N ligger på radikalaksen for ω_1 og ω_2 da dette viser at ON står vinkelret på linjen AB.



Da AC er tangent til ω og dermed står vinkelret på CO, må CO være tangent til ω_1. Tilsvarende er FO tangent til ω_2. Derfor er

$$P(O,\omega_1) = |OC|^2 = |OF|^2 = P(O,\omega_2),$$

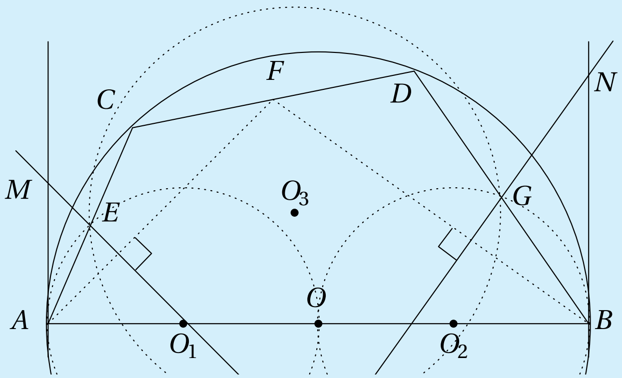
dvs. at O ligger på radikalaksen for ω_1 og ω_2. Desuden er

$$P(N,\omega_1) = -|CN||ND| = P(N,\omega) = -|EN||FN| = P(N,\omega_2).$$

Dermed ligger også N på radikalaksen for ω_1 og ω_2, og det ønskede er vist.

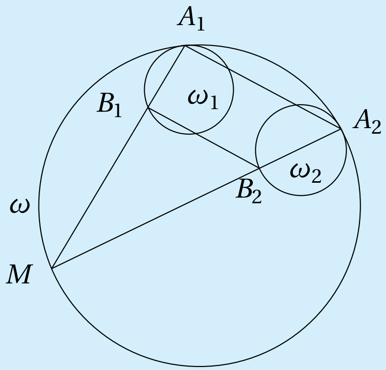
Opgave 1.6.5. i) Kald centrene i cirklerne ω_1, ω_2 og ω_3 for henholdsvis O_1, O_2 og O_3. Firkant $EFGO$ er ifølge sætning 1.2.3 pr. konstruktion et parallelogram, diagonalerne skærer dermed hinanden på midten, og O_3 er derfor deres skæringspunkt. Linjen gennem O_1O_3 er derfor midtpunktstransversal i trekant AFO, og altså parallel med AF, og dermed ortogonal med ME. Punktet E ligger på ω_1 da E er midtpunktet af korden AC i cirklen c, og vi dermed ved at $\angle AEO = 90°$. Radikalaksen for ω_1 og ω_3 er derfor ME da E ligger på begge cirkler, og ME står vinkelret på linjen gennem cirklernes centre. Tilsvarende ses at NG er radikalakse for ω_2 og ω_3.

ii) Radikalaksen for ω og ω_1 er deres fælles tangent i A, og dermed er radikalcentrum for ω, ω_1 og ω_3 skæringen mellem denne tangent og radikalaksen for ω_1 og ω_3, dvs. punktet M. På tilsvarende vis ses at radikalcentrum for c, ω_2 og ω_3 er N.



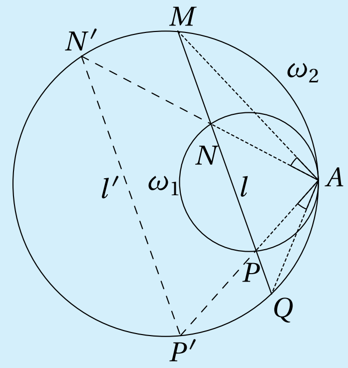
iii) Af ii) følger at MN er radikalakse for ω og ω_3, og dermed står NM vinkelret på OO_3. Vi ved desuden at CD står vinkelret på OO_3, da OO_3 halverer CD. Dermed er MN parallel med CD.

Opgave 1.7.1. Der findes en multiplikation omkring A_1 med multiplikationsfaktor k_1 som fører ω_1 i ω, og tilsvarende en multiplikation omkring A_2 med multiplikationsfaktor k_2 som fører ω_2 i ω.



Da ω_1 og ω_2 har samme radius, betyder det at $k_1 = k_2$. Altså vil en multiplikation omkring M med multiplikationsfaktor $\frac{k_1}{k_1-1}$ afbilde B_1 i A_1 og B_2 i A_2, og dermed B_1B_2 i A_1A_2. De to linjer er derfor parallelle.

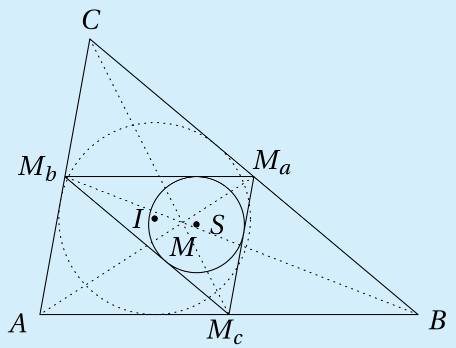
Opgave 1.7.2. Der findes en multiplikation omkring A som afbilder ω_1 i ω_2. Ved denne multiplikation afbildes N i N' og P i P' som vist på figuren.

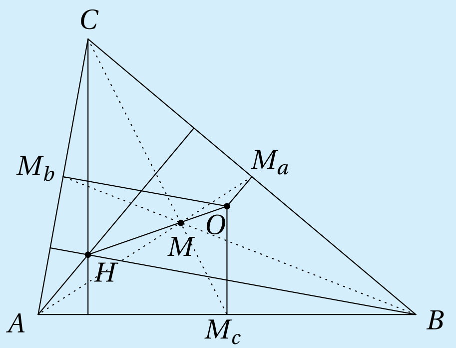


Linjerne l og l' er parallelle, og cirkelbuerne $\overset{\frown}{MN'}$ og $\overset{\frown}{QP'}$ er derfor lige store. Altså er $\angle MAN = \angle PAQ$.

Opgave 1.7.3 Da medianerne deler hinanden i forholdet 1 : 2, vil en multiplikation i M med multiplikationsfaktor $k = -\frac{1}{2}$ føre A i M_a, B i M_b og C i M_c.

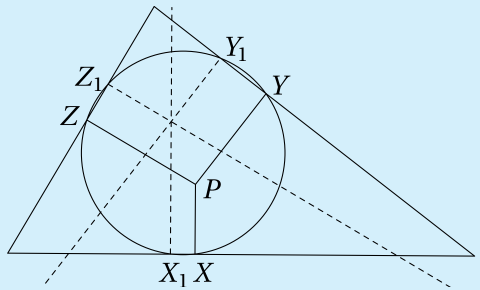
Trekant ABC føres derfor i trekant $M_aM_bM_c$, og det vil sige at den indskrevne cirkel for trekant ABC føres i Spieker-cirklen. Dermed føres I i S, og punkterne I, M og S ligger på linje med $2|MS| = |MI|$.





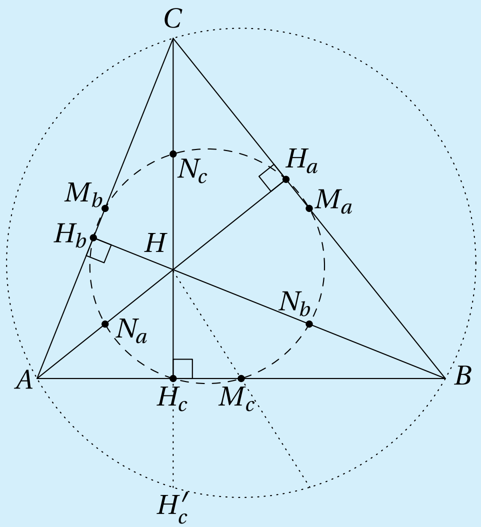
Ved samme multiplikation føres højderne i midtnormalerne. Dermed føres H i O, og punkterne H, M og O ligger på linje med $2|MO| = |MH|$.

Opgave 1.7.4. Linjen gennem X_1 vinkelret på a og linjen gennem X vinkelret på a er parallelle, og da de begge står vinkelret på korden XX_1 i cirklen, må de have samme afstand til cirklens centrum.



Ved en multiplikation om cirklens centrum med multiplikationsfaktor -1 føres linjen gennem X_1 vinkelret på a derfor i linjen gennem X vinkelret på a. Tilsvarende føres linjen gennem Y_1 vinkelret på b i linjen gennem Y vinkelret på b, og linjen gennem Z_1 vinkelret på c i linjen gennem Z vinkelret på c. Da de tre linjer føres i tre linjer som skærer hinanden i et punkt, må de tre linjer også selv skærer hinanden i et punkt.

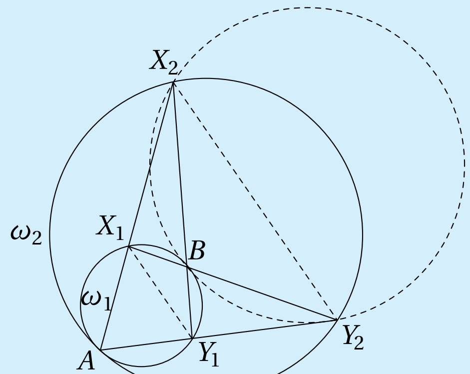
Opgave 1.7.5. Ifølge sætning 1.3.5 ligger spejlingen af H i linjen AB på den omskrevne cirkel til trekant ABC.



Ved en multiplikation omkring H med multiplikationsfaktor 2 bliver H_a, H_b og H_c derfor afbildet i punkter på den omskrevne cirkel. Punkterne N_a, N_b og N_c bliver afbildet i henholdsvis A, B og C. Lad H_c' være det punkt som H_c afbildes i på den omskrevne cirkel. Punktet M_c bliver afbildet i spejlingen af H_c' i midtnormalen til AB der går gennem M_c, og dette punkt ligger også på den omskrevne cirkel da den er symmetrisk om midtnormalen til AB. Altså afbildes M_a, M_b og M_c også i den omskrevne cirkel ved en multiplikation i H med multiplikationsfaktor 2.

De ni punkter H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, N_a, N_b og N_c bliver dermed alle afbildet på den omskrevne cirkel, og derfor ligger de alle på samme cirkel.

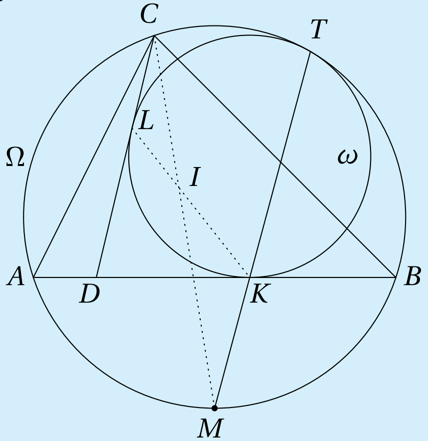
Opgave 1.7.6. Der findes en multiplikation omkring A som afbilder ω_1 i ω_2, og multiplikationsfaktoren for denne afbildning kaldes k. Dermed er $|X_2Y_2| = k|X_1Y_1|$.



Trekanterne X_1BY_1 og Y_2BX_2 er derfor ensvinklede med $|BY_2| = k \cdot |BX_1|$ og $|BX_2| = k \cdot |BY_1|$. En multiplikation omkring B med multiplikationsfaktoren $-k$ fører dermed X_1 i Y_2 og Y_1 i X_2, og altså cirklen ω_1 i den omskrevne cirkel til BX_2Y_2. Dermed tangerer ω_1 og den omskrevne cirkel til BX_2Y_2 hinanden.

Opgave 1.7.7. i) Bemærk først at den multiplikation om T der fører ω i Ω, fører K i T. Det betyder at tangenten til Ω i M er parallel med AB, og dermed er M midtpunktet af buen $\overset{\frown}{AB}$ og altså superpunktet. Af samme årsag svarer korden TK i ω til korden TM i Ω, hvilket viser at $\angle MBT = \angle TKA = \angle BKM$. Dermed er $\triangle TMB \sim \triangle BMK$ da de deler vinkel i M. ii) Desuden ved vi at $\angle TCM =$

$\angle TLK$, og altså at $\angle TCI = \angle TCM = \angle TLK = \angle TLI$, hvilket viser at firkant $CLIT$ er indskrivelig.



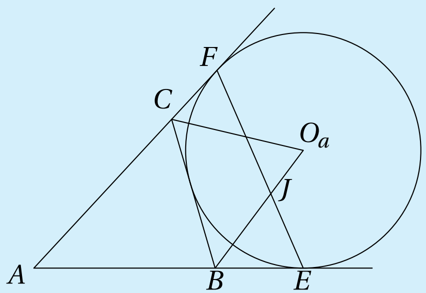
iii) For at vise at $\triangle MKI \sim \triangle MIT$ er det nok at vise at $\angle IKM = \angle TIM$ da trekanterne deler vinklen ved M. Ved at udnytte at firkant $CLIT$ er indskrivelig får vi

$$\angle TIM = 180^\circ - \angle CIT = 180^\circ - \angle CLT = 180^\circ - \angle LKT = \angle IKM.$$

vi) At $\triangle MKI \sim \triangle MIT$, giver at $|MK||MT| = |MI|^2$. Vi ved yderligere at $\triangle TMB \sim \triangle BMK$, og dermed $|MK||MT| = |MB|^2$, dvs. $|MI| = |MB|$. Desuden ved vi at superpunktet M er centrum for cirklen gennem A, B og centrum for den indskrevne cirkel til trekant ABC, og at dette centrum ligger på vinkelhalveringslinjen CM til vinkel C. Dette viser at I er centrum for den indskrevne cirkel.

Opgave 1.8.1. Lad 2α, 2β og 2γ være henholdsvis vinkel A, B og C. Trekant AEF er ligebenet, og derfor er

$$\angle AFE = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = \beta + \gamma.$$

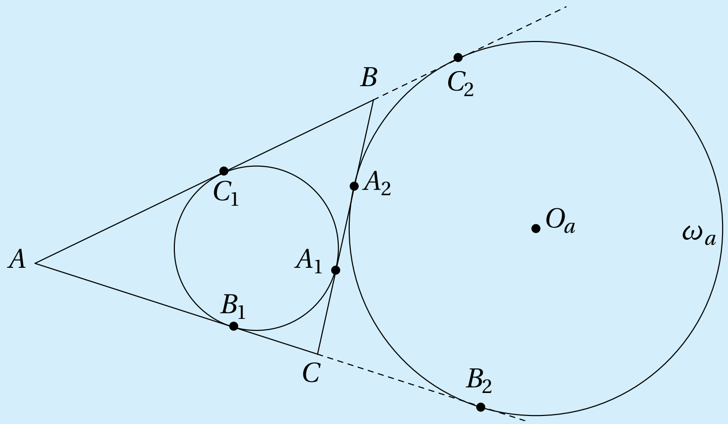


Da O_aB og O_aC er de ydre vinkelhalveringslinjer til henholdsvis vinkel B og C, er

$$\angle BO_aC = 180^\circ - \angle O_aBC - \angle O_aCB = 180^\circ - (\alpha+\gamma) - (\alpha+\beta) = \beta + \gamma.$$

Dette viser at firkant CJO_aF er indskrivelig, og dermed at $\angle BJC = \angle O_aFC = 90^\circ$.

Opgave 1.8.2. Lad A_1, B_1 og C_1 være røringspunkterne for den indskrevne cirkel med henholdsvis BC, AC og AB, og lad A_2, B_2 og C_2 være røringspunkterne mellem den ydre røringscirkel ω_a og henholdsvis BC, AC og BC.



Afstanden fra A til punkterne B_2 og C_2 er den samme da AB_2 og AC_2 er tangenter til ω_a. Dermed er

$$\begin{aligned}|AB_2| &= \frac{1}{2}(|AB_2| + |AC_2|) = \frac{1}{2}(|AC| + |CB_2| + |AB| + |AC_2|)\\ &= \frac{1}{2}(|AC| + |CA_2| + |AB| + |BA_2|) = s.\end{aligned}$$

Potensen af A mht. ω_a er $|AB_2|^2$. Altså er potensen af A mht. ω_a lig s^2.

Desuden er $|CA_2| = s - |AC| = s - (|CB_1| + |B_1A|)$. Da $s = |BA_1| + |CB_1| + |B_1A|$, er $|BA_1| = |CA_2|$. Altså ligger A_1 og A_2 symmetrisk på linjestykket BC omkring dets midtpunkt.

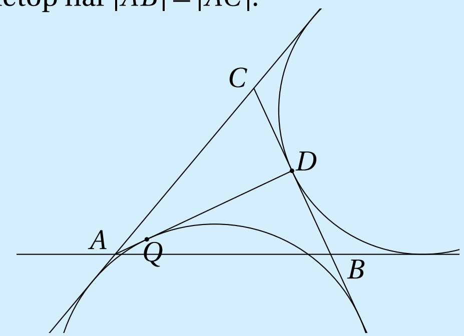
Opgave 1.8.3. Lad s_{ABC} være den halve omkreds i trekant ABC. Fra sætning 1.8.2 ved vi at

$$|DB| = s_{ABC} - |AB| \text{ og } |DC| = s_{ABC} - |AC|.$$

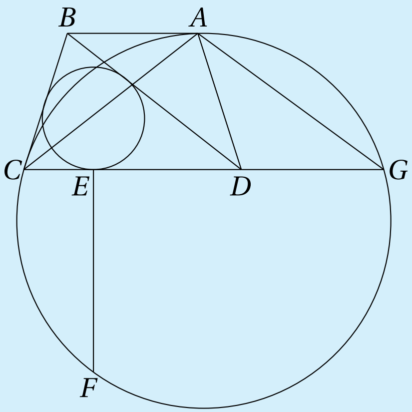
Det tilsvarende gælder for trekant ABD og trekant ACD, dvs.

$$|PD| = s_{ABD} - |BD| = \frac{|AD| + |AB| - |BD|}{2} = \frac{|AD| + 2|AB| - s_{ABC}}{2}$$
$$|QD| = s_{ACD} - |CD| = \frac{|AD| + |AC| - |CD|}{2} = \frac{|AD| + 2|AC| - s_{ABC}}{2}$$

Dermed er $P = Q$ netop når $|AB| = |AC|$.



Opgave 1.8.4. Da trapezet $ABCD$ er symmetrisk omkring midtnormalen til CD, ligger røringspunktet mellem den indskrevne cirkel til trekant ACD og CD symmetrisk i forhold til E på linjestykket CD.

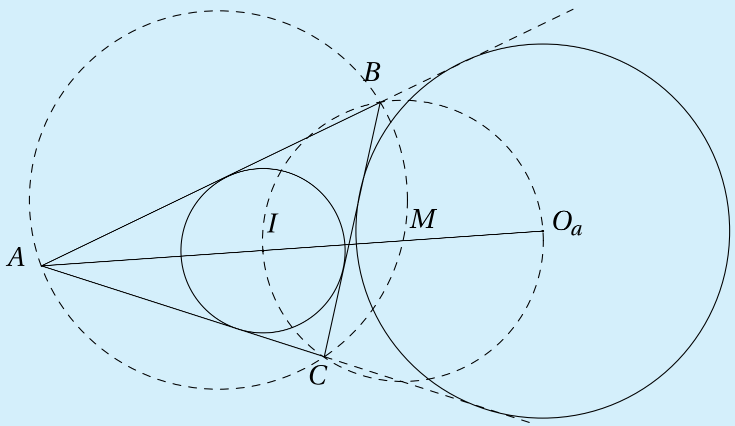


Fra sætning 1.8.2 ved vi at E er røringspunktet for den ydre røringscirkel til trekant ACD til siden CD. Punktet F må derfor være centrum for denne ydre røringscirkel da F både ligger på vinkelhalveringslinjen fra A i trekant ACD, og EF står vinkelret på CD. Dette betyder at $\angle GCF$ er den ydre vinkelhalveringslinje til vinkel C i trekant ACD, og dermed at $\angle GCF = \frac{180^\circ - \angle ACD}{2}$. Da firkant $ACFG$ er indskrivelig, er

$$\begin{aligned}
\angle AGF &= \angle 180^\circ - \angle ACF = 180^\circ - \angle ACD - \angle GCF \\
&= 180^\circ - \angle ACD - \left(\frac{180^\circ - \angle ACD}{2}\right) \\
&= \left(\frac{180^\circ - \angle ACD}{2}\right) \\
&= \angle GCF = \angle GAF.
\end{aligned}$$

Dette viser det ønskede.

Opgave 1.8.5 Ifølge sætning 1.3.4 om superpunktet ligger punkterne B, C og I på en cirkel med M som centrum. Sæt $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ og $\angle ACB = 2\gamma$.



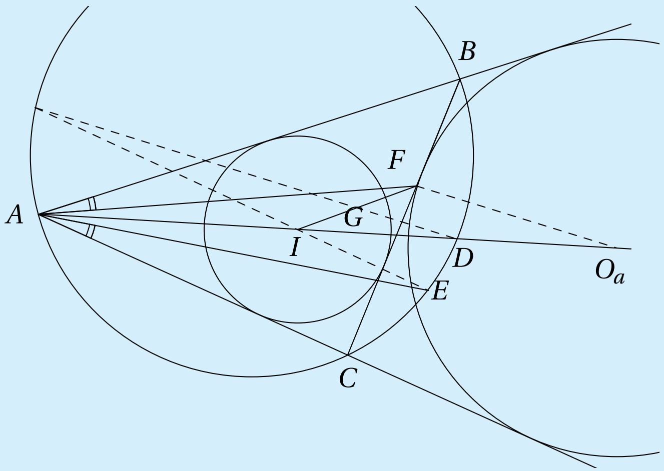
Ved yderligere at benytte sætning 1.2.10 og huske at BO_a er den ydre vinkel-

halveringslinje til vinkel B fås

$$\begin{aligned}\angle IO_aB &= 180^\circ - \angle O_aBI - \angle O_aIB\\ &= 180^\circ - \angle O_aBC - \angle CBI - \angle O_aIB\\ &= 180^\circ - (\alpha+\gamma) - \beta - (\alpha+\beta)\\ &= \gamma = \angle BCI\end{aligned}$$

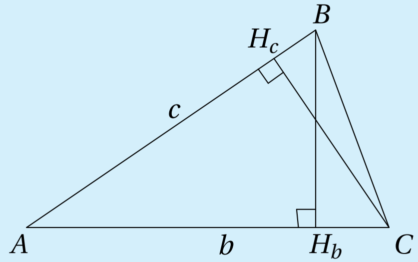
Dermed er firkant $BICO_a$ indskrivelig, og B, I, C og O_a ligger på en cirkel med M som centrum. Trekanterne $\triangle ACI$ og $\triangle AO_aB$ er ensvinklede da $\angle CAI = \angle O_aAB$ og $\angle BO_aA = \angle BO_aI = \angle BCI = \angle ACI$. Dermed er $|AI||AO_a| = |AB||AC|$.

Opgave 1.8.6. Lad O_a være centrum for den ydre røringscirkel til siden BC. Ifølge sætning 1.8.3 om den ydre røringscirkel og superpunktet er D centrum for cirklen gennem B, I C og O_a, og $|AI||AO_a| = |AB||AC|$. Trekanterne $\triangle ABF$ og $\triangle AEC$ er ensvinklede fordi $\angle BAF = \angle CAE$ per konstruktion, og $\angle ABF = \angle AEC$ da de spænder over samme buestykke.



Dermed er $|AF||AE| = |AB||AC| = |AI||AO_a|$, hvilket viser at $\triangle AO_aF$ og $\triangle AEI$ er ensvinklede. Da D er midtpunktet af IO_a, og G er midtpunktet af FI, er DG midtpunktstransversal i trekant $\triangle IO_aF$, dvs. $\angle ADG = \angle AO_aF = \angle AEI$, hvilket viser at $\angle AEI$ og $\angle ADG$ spænder over samme buestykke i Γ, og dermed at DG og EI skærer hinanden på Γ.

Opgave 1.9.1. Kald fodpunkterne for højderne i trekant ABC for H_a, H_b og H_c.



Da er $\triangle AH_aB$ og $\triangle AH_cC$ er ensvinklede, er

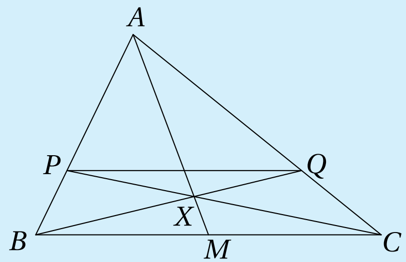
$$\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{c}{b}.$$

Det tilsvarende gælder for de andre sider. Derfor er

$$\frac{|AH_b|}{|H_bC|}\cdot\frac{|BH_c|}{|H_cA|}\cdot\frac{|CH_a|}{|H_aB|} = \frac{a\,b\,c}{a\,b\,c} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning går højderne dermed gennem samme punkt.

Opgave 1.9.2. Da PQ er paralleltransversal i trekant ABC, er $\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|BP|}{|CQ|}$ ifølge sætningen om transversaler. Kald skæringspunktet mellem AX og BC for M.

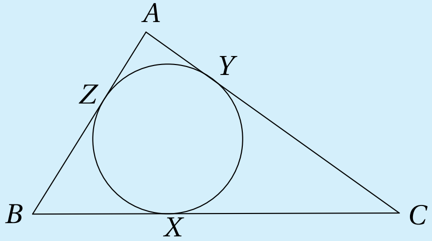


Ifølge Cevas sætning er

$$\frac{|CQ|}{|QA|}\cdot\frac{|AP|}{|PB|}\cdot\frac{|BM|}{|MC|} = 1.$$

Da $\frac{|CQ|}{|QA|}\cdot\frac{|AP|}{|PB|} = 1$, må $\frac{|BM|}{|MC|} = 1$, og AM deler dermed BC på midten.

Opgave 1.9.3. Da den indskrevne cirkel tangerer AB og AC, er afstanden fra A til de to røringspunkter Y og Z den samme. Altså er $|AY| = |AZ|$, og tilsvarende $|BX| = |BZ|$ og $|CX| = |CY|$.



Dermed er

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

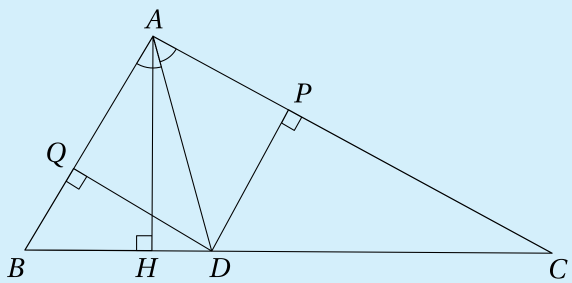
Ifølge Cevas sætning betyder dette at AX, BY og CZ skærer hinanden i et punkt.

Opgave 1.9.4. Kald røringscirklernes røringspunkter med siderne BC, AC og AB for henholdsvis A', B' og C' og den indskrevne cirkels røringspunkter med siderne BC, AC og AB for henholdsvis A_1, B_1 og C_1. Fra sætning 1.8.2 om de ydre røringscirkler ved vi at

$$\frac{|CB'|}{|B'A|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|} \cdot \frac{|CA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1.$$

Cevas sætning giver nu at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 1.9.5. Trekant APD og trekant AQD er kongruente da de har en fælles side AD, $\angle PAD = \angle QAD$ og $\angle APD = 90° = \angle AQD$, dvs. at $|AP| = |AQ|$.

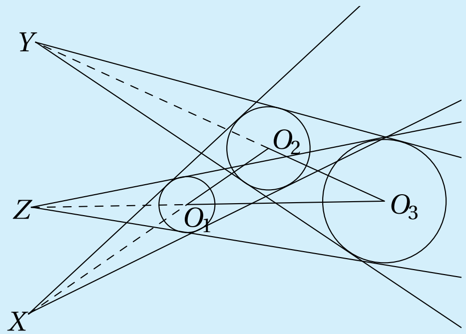


Trekant AHB og trekant DQB er ensvinklede da de begge har en ret vinkel samt den fælles vinkel B. Dermed er $\frac{|BQ|}{|BH|} = \frac{|BD|}{|AB|}$. Tilsvarende er $\frac{|CP|}{|CH|} = \frac{|CD|}{|AC|}$. Da AD er vinkelhalveringslinje, er $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$. Samlet er

$$\frac{|AP|}{|PC|} \cdot \frac{|CH|}{|HB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QA|} = \frac{|CH|}{|PC|} \cdot \frac{|BQ|}{|HB|} = \frac{|AC|}{|CD|} \cdot \frac{|BD|}{|AB|} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning skærer linjerne AH, BP og QC hinanden i et punkt.

Opgave 1.9.6 Kald centrene for de tre cirkler O_1, O_2 og O_3 og deres radier for r_1, r_2 og r_3. Ensvinklede trekanter giver at $\frac{|XO_1|}{|XO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$, $\frac{|YO_2|}{|YO_3|} = \frac{r_2}{r_3}$ og $\frac{|ZO_3|}{|ZO_1|} = \frac{r_3}{r_1}$.



Betragt trekanten $O_1O_2O_3$. Punkterne X, Y og Z er punkter på henholdsvis linjerne O_1O_2, O_2O_3 og O_3O_1. Nu benytter vi Menelaos' sætning til at vise at X, Y og Z ligger på linje. Hvis vi regner med fortegn, er

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|} \cdot \frac{|O_2Y|}{|YO_3|} \cdot \frac{|O_3Z|}{|ZO_1|} = \left(-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(-\frac{r_2}{r_3}\right)\left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1.$$

Dermed ligger de tre punkter X, Y og Z på linje.

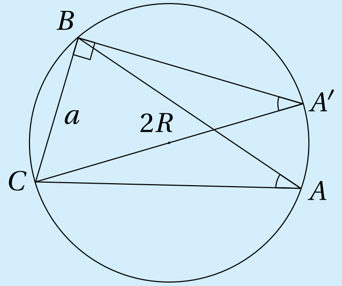
Opgave 1.9.7 Kald centrene for de tre cirkler O_1, O_2 og O_3 og deres radier for r_1, r_2 og r_3. Som i opgave 1.9.6 ses at $\frac{|XO_1|}{|XO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$, $\frac{|YO_2|}{|YO_3|} = \frac{r_2}{r_3}$ og $\frac{|ZO_3|}{|ZO_1|} = \frac{r_3}{r_1}$. Betragt trekanten $O_1O_2O_3$. Punkterne X, Y og Z er punkter på henholdsvis linjerne O_1O_2, O_2O_3 og O_3O_1. Nu benytter vi Menelaos' sætning til at vise at X, Y og Z ligger på linje. Hvis vi regner med fortegn, er

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|} \cdot \frac{|O_2Y|}{|YO_3|} \cdot \frac{|O_3Z|}{|ZO_1|} = \left(-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(\frac{r_2}{r_3}\right)\left(\frac{r_3}{r_1}\right) = -1.$$

Dermed ligger de tre punkter X, Y og Z på linje.

Opgave 1.10.1. Lad $A'C$ være diameter i den omskrevne cirkel til trekant ABC. Da er

$$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}.$$



Tilsvarende ses at $\sin B = \frac{b}{2R}$ og $\sin C = \frac{c}{2R}$, og dermed i alt

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Ved at benytte formlen for arealet af en trekant $T = \frac{1}{2} b c \sin(A)$ fås yderligere

$$4RT = 2 \cdot 2R \cdot T = 2 \cdot \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{1}{2} b c \sin A = a b c.$$

Opgave 1.10.2. Bemærk først at

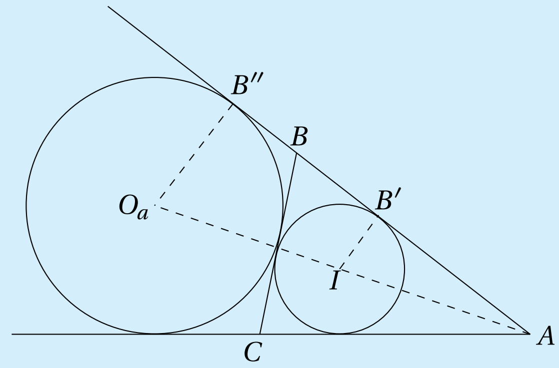
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a+b+c}{abc}.$$

Kald arealet af trekanten for T. Da er $a+b+c = \frac{2T}{r}$ og $abc = 4RT$. Vi har nu

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{2T}{r \cdot 4RT} = \frac{1}{2rR}.$$

som ønsket.

Opgave 1.10.3. Kald centrum for den indskrevne cirkel for I, og røringspunktet mellem den indskrevne cirkel og linjen AB for B'. Betragt den ydre røringscirkel til siden a, kald centrum for O_a, og kald røringspunktet mellem den ydre røringscirkel og linjen AB for B''.



Trekanterne $AB'I$ og $AB''O_a$ er oplagt ensvinklede. Desuden ved vi fra sætning 1.8.2 at $|AB'| = s-a$ og $|AB''| = s$. Dette giver $\frac{s-a}{r} = \frac{s}{r_a}$, og altså

$$T = sr = r_a(s-a).$$

Nu har vi

$$T = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c).$$

Fra Herons formel fås yderligere at

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Dette giver samlet

$$T^2 = \frac{T^4}{T^2} = \frac{r s r_a(s-a) r_b(s-b) r_c(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = r r_a r_b r_c.$$

Opgave 1.10.4. Kald trekanten ABC og de tre højder for h_a, h_b og h_c så $h_a = 12$, $h_b = 15$ og $h_c = 20$. Af ensvinklede trekanter følger at $\frac{a}{b} = \frac{h_a}{h_b}$, og altså $b = \frac{h_a}{h_b} a = \frac{4}{5} a$. Tilsvarende $c = \frac{h_a}{h_c} = \frac{3}{5} a$. Dermed er trekantens halve omkreds

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(a + \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}a) = \frac{6}{5}a.$$

Arealet T af trekant ABC er derfor

$$T = \frac{1}{2} a h_a = 6a.$$

Vi ved yderligere ifølge Herons formel at

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{6}{5}a \cdot \frac{1}{5}a \cdot \frac{2}{5}a \cdot \frac{3}{5}a} = \frac{6}{25}a^2.$$

Altså er $a = 25$ og $T = 150$.

Opgave 1.10.5. Lad $n \geq 3$, og lad $n-1$, n og $n+1$ være sidelængderne i en trekant. Den halve omkreds er da $\frac{3n}{2}$. Ifølge Herons formel er arealet

$$T_n = \sqrt{\frac{3n}{2}\Big(\frac{3n}{2} - n + 1\Big)\Big(\frac{3n}{2} - n\Big)\Big(\frac{3n}{2} - n - 1\Big)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2-4)}.$$

For $n = 4$ er $T = 6$, så vi har mindst en trekant der opfylder betingelserne. Vi viser nu at vi ud fra en trekant der opfylder betingelserne, kan konstruere endnu en trekant med den ønskede egenskab og større sidelængde. Dette giver nemlig at der findes uendeligt mange. Lad n være et lige tal, $n \geq 4$, og antag at $\frac{3}{4}(n^2-4)$ er et kvadrattal. Betragt trekanten med sidelængderne $m-1$, m og $m+1$ hvor $m = n^2 - 2$. Da er $m > n$, m er lige, og

$$\frac{3}{4}(m^2-4) = \frac{3}{4}(m-2)(m+2) = \frac{3}{4}(n^2-4)n^2.$$

Dermed er

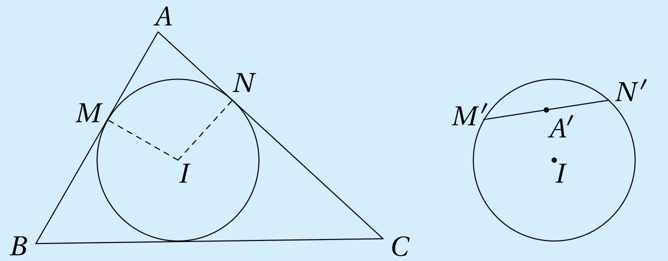
$$T_m = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2-4)}$$

et helt tal. Der findes altså uendeligt mange trekanter med de ønskede egenskaber.

Opgave 1.11.1. Betragt diameteren i α hvis forlængelse går gennem O. Denne diameter vil af symmetrigrunde afbildes i diameteren til α', og da linjer gennem O afbildes på sig selv, følger det at centrum for α, centrum for α' og punktet O ligger på linje.

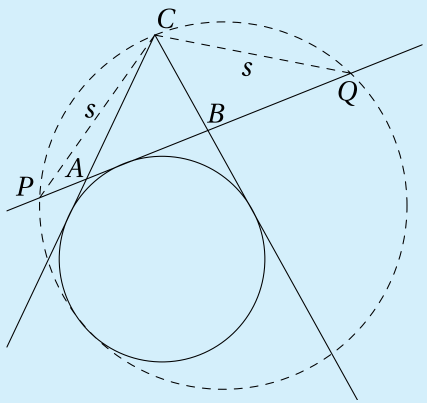
Opgave 1.11.2. Kald røringspunkterne mellem den ydre røringscirkel og linjerne AC og BC for henholdsvis M og N. Det er velkendt fra afsnittet om ydre røringscirkler at $|CM| = |CN| = s$. Punkterne M og N fikseres derfor ved inversionen, dvs. at den ydre røringscirkel afbildes i en cirkel gennem M og N som tangerer billederne af linjerne AC og BC. Da AC og BC afbildes på sig selv, må også cirklen afbildes på sig selv.

Opgave 1.11.3. Kald centrum for den indskrevne cirkel for I. Firkant $AMIN$ er indskrivelig da $\angle AMI = \angle ANI = 90°$.



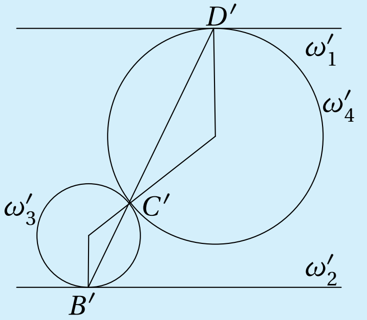
Cirklen AMN afbildes derfor i en linje gennem M og N da disse to punkter ligger på inversionscirklen. Billedet af A er altså skæringspunktet mellem linjestykket NM og linjen AI. Dette skæringspunkt er netop midtpunktet af MN, da AI er vinkelhalveringslinje til vinkel $\angle NAM$ og $|AM| = |AN|$.

Opgave 1.11.4.



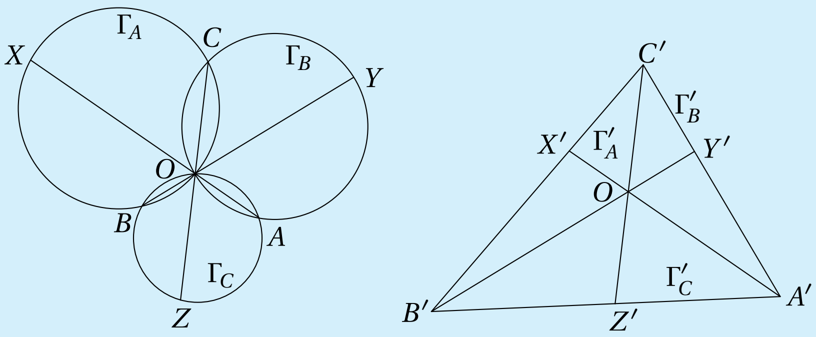
Ved inversion i en cirkel med centrum C og radius s afbildes den ydre røringscirkel på sig selv ifølge opgave 1.11.2. Vi skal altså vise at billedet af den omskrevne cirkel til trekant CPQ tangerer den ydre røringscirkel. Da P og Q afbildes på sig selv, vil den omskrevne cirkel til trekant CPQ afbildes i linjen PQ, som tangerer røringscirklen.

Opgave 1.11.5. Ved inversion i en cirkel med centrum i A afbildes ω_1 og ω_2 i to parallelle linjer, og ω_3 og ω_4 afbildes i to cirkler der tangerer hinanden samt henholdsvis billedet af ω_2 og ω_1.



Ved at regne på vinklerne ses let at B', C' og D' ligger på linje. Hvis denne linje går gennem A, vil A, B, C og D ligge på linje, og hvis linjen ikke går gennem A, vil A, B, C og D ligge på en cirkel.

Opgave 1.11.6. Ved inversion i punktet O afbildes cirklerne Γ_A, Γ_B og Γ_C i linjer således at $A'B'C'$ er en trekant, og $A'X'$, $B'Y'$ og $C'Z'$ er cevianer i trekanten som går gennem samme punkt O.

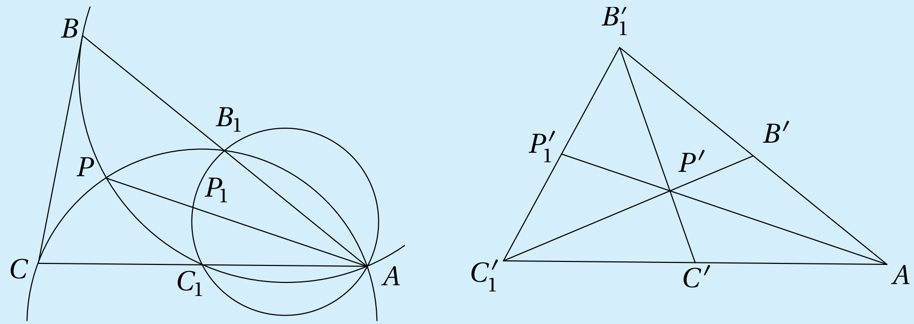


Ved at udnytte at $|AY| = \frac{r^2}{|AO||YO|}|A'Y'|$ osv. ses at ligningen vi skal vise, i det inverterede tilfælde er ækvivalent med

$$\frac{|A'Y'||B'Z'||C'X'|}{|A'Z'||B'X'||C'Y'|} = 1.$$

Dette er sandt ifølge Cevas sætning.

Opgave 1.11.7. Invertér i en cirkel med centrum i A og radius r. Linjerne AB, AP og AC afbildes på sig selv, cirklen gennem A, B, C_1, P afbildes på en linje gennem B', C_1' og P', cirklen gennem A, B_1, C, P afbildes i en linje gennem B_1', C' og P', og cirklen gennem $AB_1P_1C_1$ afbildes i en linje gennem B_1', C_1' og P_1'.



Da B_1 og C_1 er midtpunkt på henholdsvis AB og AC, er B' og C' midtpunkt på henholdsvis linjestykkerne AB_1' og AC_1'. Dermed er $AB_1'C_1'$ en trekant med $B_1'C'$ og $B'C_1'$ som medianer. Da linjen gennem A, P' og P_1' går gennem skæringspunktet mellem $B_1'C'$ og $B'C_1'$, er AP_1' også median i trekant $AB_1'C_1'$. Da medianerne skærer hinanden i forholdet $1:2$, får vi

$$2|AP| = 2\frac{r^2}{|AP'|} = 3\frac{r^2}{|AP_1'|} = 3|AP_1|.$$

Opgave 1.11.8. Da P er det centrale punkt, inverterer vi i en cirkel med centrum i P og radius r. Dermed er α_1' og α_3' to parallelle linjer, og α_2' og α_4' er to parallelle linjer. Firkant $A'B'C'D'$ er derfor et parallelogram.

Nu omformer vi på begge sider af af den identitet vi skal vise, til det inverterede tilfælde:

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{\frac{r^2|A'B'|}{|PA'||PB'|}\frac{r^2|B'C'|}{|PB'||PC'|}}{\frac{r^2|A'D'|}{|PA'||PD'|}\frac{r^2|D'C'|}{|PD'||PC'|}} = \frac{|A'B'||B'C'||PD'|^2}{|A'D'||D'C'||PB'|^2},$$

og

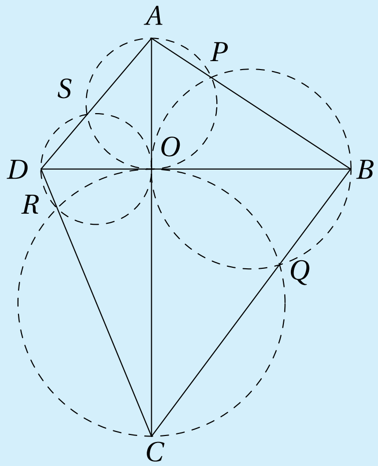
$$\frac{|PB|^2}{|PD|^2} = \frac{\frac{r^4}{|PB'|^2}}{\frac{r^4}{|PD'|^2}} = \frac{|PD'|^2}{|PB'|^2}.$$

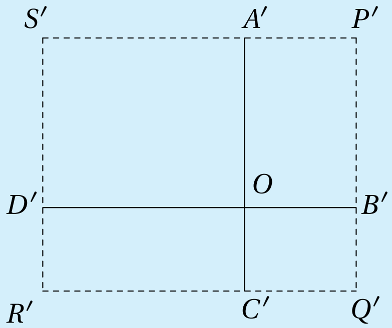
Identiteten som vi skal vise, reduceres dermed til

$$\frac{|A'B'||B'C'|}{|A'D'||D'C'|} = 1,$$

hvilket er sandt da $A'B'C'D'$ er et parallelogram.

Opgave 1.11.9. Bemærk først at firkanterne $APOS$, $BQOP$, $CROQ$ og $DSOR$ er indskrivelige, og kald deres omskrevne cirkler for henholdsvis α_A, α_B, α_C og α_D. Da AO og CO er diameter i henholdsvis α_A og α_C, tangerer α_A og α_C begge linjen BD i O. Tilsvarende tangerer α_B og α_C linjen AC i O.

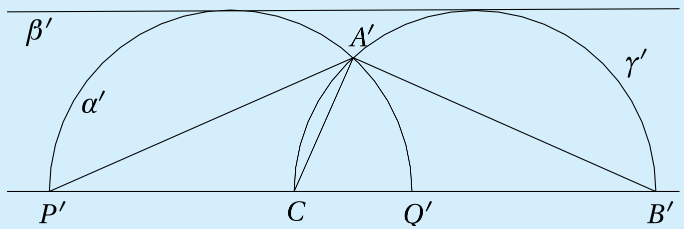




Inverter i en cirkel med centrum i O. Da afbildes α_A og α_C i to linjer som er parallelle med DB, og α_B og α_D i to linjer parallelle med AC. Skæringspunkterne mellem de fire cirkler er netop P, Q, R og S, dvs. at $P'Q'R'S'$ er et rektangel og dermed indskrivelig. Punkterne P, Q, R og S ligger derfor også på en cirkel.

Opgave 1.11.10. Inverter i en cirkel med centrum i A da α og α_0 derved afbildes i to parallelle linjer som alle billederne af cirklerne i følgen tangerer. Røringspunkternes billeder $P_1', P_2', P_3', \ldots$ ligger derfor på en ret linje, dvs. at $P_1, P_2, P_3, \ldots$ ligger på en cirkel gennem A.

Opgave 1.11.11. Inverter i en cirkel med centrum i C. Da afbildes linjen PQ på sig selv, cirklen β i en linje parallel med $P'Q'$, halvcirklen α i en halvcirkel som tangerer β' og har $P'Q'$ som diameter, og linjen γ i en cirkel som tangerer β' og har CB' som diameter.



Da linjen gennem P', C, Q' og B' er parallel med linjen β', må de to cirkler α' og γ' have samme radius. Derfor er

$$\angle PAC = \angle A'P'C = \angle A'B'C = \angle BAC,$$

dvs. at AC er vinkelhalveringslinje i trekant PAC.

Stikordsregister