1 Algebra

Dette kapitel handler grundlæggende om relationer mellem reelle tal. I afsnit 1.1-1.3 får du en introduktion til at omskrive udtryk, faktorisere og løse ligningssystemer. De kan betragtes som en slags opvarmning til algebra og har fokus på grundlæggende metoder som giver et godt grundlag for mere udfordrende opgaver. De fleste af opgaverne i disse afsnit er standardopgaver der træner teorien, men der er også et par mere udfordrende opgaver i afsnit 1.3.

I afsnit 1.4 introduceres rationale og irrationale tal og centrale sætninger om disse, og afsnit 1.5 og 1.6 har fokus på summer og følger. Her ser vi både på differensrækker, kvotientrækker, teleskopsummer og rekursive følger. Til slut er der introduktion til funktionalligninger og uligheder, som også er centrale emner i algebra. Afsnit 1.7 kræver kendskab til grundlæggende viden om monotoniforhold for funktioner, og afsnit 1.12 kræver yderligere kendskab til differentialregning.

Indhold

1.1 Kvadratsætninger og omskrivning til kvadrat

Kvadratsætningerne kan bruges i rigtig mange sammenhænge, og i dette afsnit skal vi se på hvordan de kan bruges til at løse andengradsligninger og andengradsuligheder, bevise uligheder og faktorisere.

Sætning 1.1.1. Kvadratsætningerne

$$\begin{aligned} &1)\quad (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab,\\ &2)\quad (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab,\\ &3)\quad (a+b)(a-b) = a^2-b^2. \end{aligned}$$

Eksempel 1.1.1. Andengradsligninger og omskrivning til kvadrat

For at løse andengradsligningen $4x^2+12x-7=0$ omskriver vi til kvadrat på følgende måde:

$$0 = 4x^2+12x-7 = (4x^2+12x+9)-9-7 = (2x+3)^2-16.$$

Læg mærke til hvordan vi udnytter første kvadratsætning til at finde ud af hvilket tal vi skal lægge til eller trække fra for at få et kvadrat hvor $4x^2+12x$ indgår. Nu er der ikke langt til en løsning:

$$\begin{aligned} (2x+3)^2 = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x+3 = \pm 4\\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3\pm 4}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{2} \ \vee \ x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Omskrivningen svarer helt til hvordan man udleder diskriminantformlen til at løse andengradsligninger, men når man bliver fortrolig med at omskrive på denne måde, kan man bruge denne metode i mange andre sammenhænge også.

Vi ser på endnu et eksempel, men denne gang er koefficienten til x^2 ikke et kvadrattal. For at løse andengradsligningen $3x^2+5x-2=0$ ganger vi med 3 så koefficienten til x^2 bliver et kvadrattal. Løsningen ser nu sådan ud:

$$\begin{aligned} 3x^2+5x-2=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 9x^2+15x-6=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(3x+\frac{5}{2}\right)^2 = 6+\frac{25}{4} = \frac{49}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 3x+\frac{5}{2} = \pm\frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{3} \vee x=-2. \end{aligned}$$

Opgave 1.1.1. Løs ligningen $x^2-6x+8=0$ ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 1.1.2. Løs ligningen $5x^2-6x+1=0$ ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 1.1.3. Løs ligningen $a^2-a+\frac{1}{4}=0$ ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 1.1.4. Løs ligningen $3x^2+4x+2=0$ ved at omskrive til kvadrat.

Andengradsuligheder kan også løses ved at omskrive til kvadrat. Her får vi brug for følgende helt grundlæggende iagttagelser om uligheder:

Sætning 1.1.2. Grundlæggende regneregler for uligheder

Man må lægge samme tal til og trække samme tal fra på begge sider af et ulighedstegn:

$$x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad x+a \geq y+a.$$

Tilsvarende må man gange og dividere med et positivt tal på begge sider af en ulighed, mens man skal vende ulighedstegnet om hvis man ganger eller dividerer med et negativt tal:

$$\begin{aligned} x \geq y \quad &\Leftrightarrow \quad a\cdot x \geq a\cdot y, \quad \text{hvis } a>0. \\ x \geq y \quad &\Leftrightarrow \quad a\cdot x \leq a\cdot y, \quad \text{hvis } a<0. \end{aligned}$$

Når man arbejder med kvadrater, gælder

$$\begin{aligned} x^2 \geq a \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq -\sqrt{a} \vee \sqrt{a} \leq x, \\ x^2 \leq a \quad &\Leftrightarrow \quad -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Eksempel 1.1.2. Andengradsuligheder

Hvis vi ønsker at bestemme for hvilke reelle tal x følgende ulighed gælder

$$x^2+6x+5 \geq 0,$$

kan vi også benytte metoden med at omskrive til kvadrat kombineret med de grundlæggende regneregler for uligheder:

$$\begin{aligned} x^2+6x+5 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+3)^2 \geq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x+3 \leq -2 \vee 2 \leq x+3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq -5 \vee -1 \leq x. \end{aligned}$$

Endnu et eksempel:

$$\begin{aligned} 3x^2-x<2 \quad &\Leftrightarrow \quad 9x^2-3x<6 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(3x-\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{25}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} < 3x-\frac{1}{2} < \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -2<3x<3 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3}<x<1. \end{aligned}$$

Opgave 1.1.5. Løs uligheden $x^2+2x>3$ ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 1.1.6. Løs uligheden $3y^2+7y+2 \leq 0$ ved at omskrive til kvadrat.

Eksempel 1.1.3. Bevis for uligheder

Nogle uligheder kan man bevise er sande ved at udnytte at et kvadrat altid er større end lig med nul. Fx er

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

for alle reelle tal x og y fordi uligheden kan omskrives til $(x-y)^2 \geq 0$, som er sand da et kvadrat aldrig er negativt.

Uligheden

$$x^2 + 9y^2 + \frac{37}{9} \geq 4x + 2y$$

ser umiddelbart temmelig kompliceret ud, men ved at omskrive til kvadrat kan vi som før nemt vise at den er sand for alle reelle tal x og y:

$$\begin{aligned} x^2 + 9y^2 + \frac{37}{9} \geq 4x + 2y \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2 - 4x + 4) + \left(9y^2 - 2y + \frac{1}{9}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + \left(3y - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Da et kvadrat altid er større end lig med nul, gælder det samme for summen af to kvadrater.

Opgave 1.1.7. Bevis at $a^2+1 \geq 2a$ for alle reelle tal a ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 1.1.8. Bevis at $x + \frac{1}{x} \geq 2$ for alle positive reelle tal x.

Opgave 1.1.9. Bevis at $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ for alle positive reelle tal a of b.

Opgave 1.1.10. Bevis at hvis $x + y = 1$ for to positive reelle tal x og y, da er $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4$. *Hint*: 33

Opgave 1.1.11. Bevis at $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ for alle reelle tal x, y og z.

Opgave 1.1.12. Bevis at $8x^2 + 2y^2 + y + \frac{5}{8} \geq 4x$ for alle reelle tal x og y.

Eksempel 1.1.4. Faktorisering

Indtil videre har vi kun brugt de to første kvadratsætninger. Nu skal vi også bruge den tredje kvadratsætning til at faktorisere udtryk da det ofte er en god ide at omskrive til et produkt.

Udtrykket $x^2 - y^2 + x + y$ kan faktoriseres til

$$x^2 - y^2 + x + y = (x+y)(x-y) + x + y = (x+y)(x-y+1).$$

Her brugte vi først den tredje kvadratsætning og satte derefter $(x+y)$ uden for parentes.

Betragt nu udtrykket $4x^2y^2 + x^2 + 4x^2y - y^2$. Først lægger vi mærke til at de tre første led kan omskrives til et kvadrat, og derefter bruger vi tredje kvadratsætning:

$$4x^2y^2 + x^2 + 4x^2y - y^2 = (2xy + x)^2 - y^2 = (2xy + x + y)(2xy + x - y).$$

I næste eksempel får vi brug for at lægge et ekstra led til og trække det fra igen undervejs i omskrivningen:

$$a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2+1)^2 - a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$$

Her er tricket at se at det der står, næsten er et kvadrat, lægge det til der mangler, og trække det fra igen for at omskrive til kvadrat.

Opgave 1.1.13. Faktoriser $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$.

Opgave 1.1.14. Faktoriser $2n^2 + 8m^2 + 8nm$.

Opgave 1.1.15. Faktoriser $9a^2 - b^2 + 6a + 2b$.

Opgave 1.1.16. Faktoriser $a^2 - b^2 + 6a + 9$.

Opgave 1.1.17. Faktoriser $a^2 + 2b^2 + 3ab + b - 1$.

Opgave 1.1.18. Faktoriser $n^4 + 4$.

1.2 Andengradsligninger og skjulte andengradsligninger

Hvis en andengradsligning har heltallige løsninger, kan man forholdsvis nemt gætte dem, og det er ofte hurtige end at bestemme dem på anden vis. Først minder vi om følgende standardsætning til løsning af andengradsligninger:

Sætning 1.2.1. Diskriminantformlen

Betragt andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, med diskriminant $d=b^2-4ac$.

Hvis $d>0$, har ligningen to reelle løsninger $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$.

Hvis $d=0$, har ligningen én reel løsning $x=\dfrac{-b}{2a}$.

Hvis $d<0$, har ligningen ingen reelle løsninger.

Opgave 1.2.1. Bevis sætningen ved at omskrive til kvadrat.

Sætning 1.2.2. Løsningernes sum og produkt

Hvis andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, har løsningerne x_1 og x_2, da er

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2,$$

og $b=-a(x_1+x_2)$ og $c=ax_1x_2$.

Hvis $a=1$, ses specielt at $b=-(x_1+x_2)$ og $c=x_1x_2$.

Bemærk at hvis andengradsligningen kun har én reel løsning x_1, da gælder sætningen også, vi sætter blot $x_1=x_2$.

Bevis. Først ses at

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2.$$

For at vise sætningen skal vi altså vise at $b=-a(x_1+x_2)$ og $c=ax_1x_2$.

Summen af løsningerne er

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}=\frac{(-b-\sqrt{d})+(-b+\sqrt{d})}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

hvilket viser at $b=-a(x_1+x_2)$.

Produktet af løsningerne er

$$\begin{aligned}x_1\cdot x_2&=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}=\frac{(-b-\sqrt{d})\cdot(-b+\sqrt{d})}{(2a)^2}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{d})^2}{4a^2}=\frac{b^2-d}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a},\end{aligned}$$

hvilket viser at $c=ax_1x_2$.

Hvis andengradsligningen kun har én løsning, da er $d=0$, hvilket svarer til at $x_1=x_2$, dvs. sætningen gælder også i dette tilfælde. □

Eksempel 1.2.1. Gæt løsningerne til en andengradsligning

Det er nemt at gætte løsninger til andengradsligninger hvis de er heltallige. Hvis $a=1$ i andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$ med løsningerne x_1 og x_2, ved vi fra sætning 1.2.2 at

$$b=-(x_1+x_2)\quad\text{og}\quad c=x_1x_2,$$

dvs. hvis vi skal gætte løsningerne til ligningen $x^2-5x+6=0$, skal vi gætte to tal x_1 og x_2 så $x_1+x_2=5$ og $x_1x_2=6$. Det er nemt at se at $x_1=2$ og $x_2=3$ løser begge ligninger, og de er derfor løsningerne til $x^2-5x+6=0$, som kan faktoriseres $(x-2)(x-3)=0$.

Løsningerne til andengradsligningen $3x^2-9x-12=0$ kan gættes ved først at faktorisere $3(x^2-3x-4)=0$ og derefter finde løsningerne x_1 og x_2 som opfylder at $x_1+x_2=3$ og $x_1x_2=-4$. Her er $x_1=-1$ og $x_2=4$ løsningerne, og ligningen kan faktoriseres $3(x+1)(x-4)=0$.

Man kan selvfølgelig på helt samme måde gætte løsninger hvis de ikke er heltallige; det er bare sværere.

Opgave 1.2.2. Gæt løsningerne til $x^2-6x+8=0$, og faktoriser.

Opgave 1.2.3. Gæt løsningerne til $2x^2+8x-10=0$, og faktoriser.

Opgave 1.2.4. Gæt løsningerne til $-4x^2+24x+28=0$, og faktoriser.

Ligninger der ikke umiddelbart ligner andengradsligninger, kan være skjulte andengradsligninger hvor den variable fx er x^2, x^3, $\sqrt{x}$ eller andet.

Eksempel 1.2.2. Skjulte andengradsligninger

Ligninger som $x^4-3x^2-4=0$ og $a^6-9a^3+8=0$ kan betragtes som andengradsligninger hvor den variable er henholdsvis x^2 og a^3, da de kan omskrives til $(x^2)^2-3x^2-4=0$ og $(a^3)^2-9a^3+8=0$. Vi kan derfor løse dem på samme måde som andengradsligninger fx ved at gætte løsninger:

$$(x^2)^2-3x^2-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2-4)(x^2+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=4$$

da x^2 ikke kan være negativ. Samtlige løsninger er altså $x=\pm 2$.

Den anden ligning løses tilsvarende:

$$(a^3)^2-9a^3+8=0 \quad\Leftrightarrow\quad (a^3-1)(a^3-8)=0 \quad\Leftrightarrow\quad a^3=1 \vee a^3=8.$$

Samtlige løsninger er derfor $a=1$ og $a=2$.

I de to første eksempler skulle vi blot finde en variabel der gjorde ligningerne til andengradsligninger. Nu ser vi på et eksempel der også kræver at vi skriver om på ligningen:

$$y^2+\frac{14}{y^2}=9$$

Her bemærker vi først at $y^2\neq 0$ da der divideres med y^2. Derfor kan vi gange med y^2 på begge sider af ligningstegnet og få en ligning med præcis de samme løsninger:

$$(y^2)^2-9y^2+14=0 \Leftrightarrow (y^2-2)(y^2-7)=0.$$

Dermed er samtlige løsninger $y=\pm\sqrt{2}$ og $y=\pm\sqrt{7}$.

Opgave 1.2.5. Løs ligningen $x^4-8x^2+7=0$.

Opgave 1.2.6. Løs ligningen $u^{10}+1=2u^5$.

Opgave 1.2.7. Løs ligningen $x-5\sqrt{x}+6=0$.

Opgave 1.2.8. Løs ligningen $a^4=15+\frac{16}{a^4}$.

Opgave 1.2.9. Løs ligningen $4^x-2\cdot 2^x+1=0$.

Opgave 1.2.10. Et A4-papir er rektangulært og ligedannet med A5-papir der fremkommer ved halvering af den lange side af et stykke A4-papir. Bevis at forholdet mellem siderne af et A4-papir er $\sqrt{2}$. *Hint*: 37

Opgave 1.2.11. Et punkt P på et linjestykke AB deler AB i det gyldne snit hvis

$$\frac{|AB|}{|AP|}=\frac{|AP|}{|PB|},$$

og dette forhold kaldes *det gyldne snit*. Bevis at det gyldne snit er lig med $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. *Hint*: 30

1.3 Ligningssystemer

Lineære ligningssystemer kan løses ved standardmetoder, men mange ligningssystemer er mere udfordrende. Her vises hvordan lineære ligningssystemer kan løses ved substitution og ved lige store koefficienters metode. Desuden ser vi på ikke-lineære ligningssystemer og kommer med idéer til hvordan man løser disse.

Eksempel 1.3.1. Lineære ligningssystemer

$$
\begin{aligned}
3x + y - 2z &= 6,\\
-x + 2y + 3z &= -9,\\
5x - 3y + z &= 6.
\end{aligned}
$$

Ligningssystemet består af tre ligninger med tre ubekendte, og det kaldes lineært fordi alle ligningerne er på formen $ax + by + cz = d$, hvor a, b, c, d er konstanter. Den slags ligninger kan løses uden problemer med standardmetoder. Her præsenterer vi to af disse standardmetoder, nemlig *substitution* og *lige store koefficienters metode*.

Substitution
Ligningssystemet kan løses ved at isolere fx y i første ligning så y er udtrykt ved x og z, og indsætte det i de to andre ligninger. På den måde reduceres ligningssystemet til to ligninger med to ubekendte. Dette kaldes substitutionsmetoden da y substitueres med noget andet. Ifølge den første ligning er $y = 6 - 3x + 2z$. Ved at indsætte dette i de to andre ligninger fås:

$$
\begin{aligned}
-x + 2(6 - 3x + 2z) + 3z &= -9,\\
5x - 3(6 - 3x + 2z) + z &= 6,
\end{aligned}
$$

og altså

$$
\begin{aligned}
-x + z &= -3,\\
14x - 5z &= 24.
\end{aligned}
$$

Nu har vi reduceret til to ligninger med to ubekendte.

Ved at isolere x i den første ligning og indsætte i den sidste fås

$$
14 \cdot (z + 3) - 5z = 24 \quad \Leftrightarrow \quad 9z = -18 \quad \Leftrightarrow \quad z = -2.
$$

Altså er $z = -2$, $x = 3 + z = 3 + (-2) = 1$ og $y = 6 - 3x + 2z = 6 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -1$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $(x, y, z) = (1, -1, -2)$ faktisk løser ligningssystemet.

Lige store koefficienters metode
Vi kan også løse ligningssystemet ved at benytte lige store koefficienters metode. Hvis vi ganger første ligning med 3 og anden ligning med 2 fås:

$$
\begin{aligned}
9x + 3y - 6z &= 18,\\
-2x + 4y + 6z &= -18.
\end{aligned}
$$

Vi har nu to ligninger hvor koefficienten til z er den samme pånær fortegn, og når vi lægger dem sammen fås en ligning i x og y: $7x + 7y = 0$ og altså $x + y = 0$. På den måde har vi elimineret z ved at kombinere de to første ligninger. Nu gør vi det samme med de to sidste ligninger:

$$
\begin{aligned}
-x + 2y + 3z &= -9,\\
15x - 9y + 3z &= 18.
\end{aligned}
$$

Når vi trækker den nederste ligning fra den øverste fås $-16x + 11y = -27$. Nu har vi reduceret til to ligninger med to ubekendte. Vi kan igen få lige store koefficienter til fx x ved at gange første ligning med 16:

$$
\begin{aligned}
16x + 16y &= 0,\\
-16x + 11y &= -27
\end{aligned}
$$

Summen af ligningerne er $27y = -27$ og altså $y = -1$ Nu kan vi udnytte de tidligere ligninger til at bestemme x og z og som før få $(x, y, z) = (1, -1, -2)$.

Opgave 1.3.1. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 5x+2y&=1,\\ 3x+4y&=-5. \end{aligned}$$

Opgave 1.3.2. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x+2y-5z&=5,\\ 2x+y+7z&=-6,\\ x+4y-10z&=0. \end{aligned}$$

Eksempel 1.3.2. Ikke-lineære ligningssystemer

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y}+x&=3,\\ \frac{x}{x+y}&=2. \end{aligned}$$

Disse ligninger er ikke lineære, så vi kan ikke gøre helt som i eksemplet før. Man kan sagtens bruge substitutionsmetoden her, men det er lidt mere besværligt. Vi ser i stedet på ligningerne og overvejer om der ikke er noget smartere vi kan gøre. Hvis vi ganger den første ligning igennem med x, så bliver brøken i denne ligning lig med brøken i den anden ligning, og så kan vi trække dem fra hinanden og få en ligning i x.

Inden vi ganger igennem med x, skal vi sikre os at $x=0$ ikke er en løsning til ligningssystemet. Hvis vi ser på ligning nummer to, er det klart at der ikke findes løsninger hvor $x=0$. Derfor kan vi antage at $x\neq 0$, og få:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y}+x^2&=3x,\\ \frac{x}{x+y}&=2. \end{aligned}$$

Ved at trække de to ligninger fra hinanden og omskrive fås $x^2-3x+2=0$. Dette er en andengradsligning som fx kan løses ved at faktorisere: $(x-1)(x-2)=0$. Dermed er $x=1$ eller $x=2$. Hvis $x=1$, fås ved at indsætte i anden ligning at $\frac{1}{1+y}=2$, og altså $y=-\frac{1}{2}$. Hvis vi indsætter $x=1$ og $y=-\frac{1}{2}$ i første ligning, ses at $(x,y)=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ er en løsning til ligningssystemet. Hvis $x=2$, er $\frac{2}{2+y}=2$, og altså $y=-1$. Ved indsættelse ses at $(x,y)=(2,-1)$ også løser ligningssystemet.

Bemærk at vi ved at omskrive ligningssystemet først finder alle mulige løsninger, men at vi skal indsætte i begge ligninger til slut for at se om de faktisk er løsninger.

Advarsel: Pas på ikke at gange eller dividere med nul når du omskriver i de følgende opgaver!

Opgave 1.3.3. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} y+2x&=x^2-10,\\ 2y-2x&=-20. \end{aligned}$$

Opgave 1.3.4. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{5}{x}-\frac{3}{y}&=1,\\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}&=7. \end{aligned}$$

Opgave 1.3.5. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{12}{x^2+y}+y&=4,\\ \frac{3y}{x^2+y}+2y&=5. \end{aligned}$$

Opgave 1.3.6. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x+y&=1,\\ \frac{x}{x^2+y^2}&=2x. \end{aligned}$$

Hint: 21

Opgave 1.3.7. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} xy &= 3, \\ yz &= 1, \\ zx &= 12. \end{aligned}$$

Definition af heltalsdel og brøkdel

Heltalsdelen af x betegnes $\lfloor x \rfloor$ og er det største hele tal mindre end lig med x.

Brøkdelen af x betegnes $\{x\}$ og er $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Fx er $\lfloor 5{,}39 \rfloor = 5$ og $\{5{,}39\} = 0{,}39$.

Opgave 1.3.8. Bestem samtlige reelle løsninger til ligningssystemet.

$$\begin{aligned} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} &= 1{,}1 \\ z + \lfloor x \rfloor + \{y\} &= 2{,}2 \\ y + \lfloor z \rfloor + \{x\} &= 3{,}3. \end{aligned}$$

Hint: 24

1.4 Rationale og irrationale tal

Definition af rationale tal

Et *rationalt tal* er et tal der kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$ med et helt tal i tæller og nævner (og selvfølgelig $b \neq 0$). Fx er 3, $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{7}$ og 0 rationale tal.

Mængden af de rationale tal betegnes $\mathbb{Q}$.

Sætning 1.4.1. Summen, differensen, produktet og kvotienten af to rationale tal er et rationalt tal.

Bevis. Vi beviser kun at summen af to rationale tal er rational. Resten overlades til læseren i næste opgave.

Summen af de to rationale tal $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$, hvor $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ og $d \neq 0$, er

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

og altså et rationalt tal da $ad + bc$ og bd er hele tal, og $bd \neq 0$. □

Opgave 1.4.1. Bevis sætning 1.4.1.

Definition af irrationale tal

Et *irrationalt tal* er et reelt tal der ikke er rationalt, dvs. et reelt tal som ikke kan skrives som en brøk med et helt tal i tæller og nævner. Man kan bevise at fx $\sqrt{2}$ og π er irrationale tal.

Sætning 1.4.2. Summen, differensen, produktet og kvotienten af et rationalt og et irrationalt tal er irrationalt, med undtagelse af produkt og kvotient hvor det rationale tal er 0.

Summen, differensen, produktet og kvotienten af to irrationale tal kan derimod både være et rationalt og irrationalt tal.

Bevis. Vi viser kun den del af sætningen der handler om sum. Resten overlades til læseren i en opgave.

Summen af et rationalt tal og et irrationalt tal er et irrationalt tal, for hvis den var rational, ville det irrationale tal være differensen mellem to rationale tal og altså selv et rationalt tal, hvilket er en modstrid. Dermed er summen af et rationalt og et irrationalt tal irrationalt.

Hvis vi ser på summen af to irrationale tal, bemærker vi først at $3-\sqrt{2}$ og $2\sqrt{2}$ er irrationale tal da både differens og produkt af et rationalt og et irrationalt tal er irrationale. Summen $\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})=3$ er rational, mens summen $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ er irrational. Dette illustrerer at summen af to irrationale tal både kan være et rationalt og et irrationalt tal. □

Sætning 1.4.3. Lad n være et positivt heltal.

Da er $\sqrt{n}$ et rationalt tal netop hvis n er et kvadrattal.

Bevis. Det er oplagt at hvis n er et kvadrattal, da er $\sqrt{n}$ et helt tal og altså rational. Antag at n ikke er et kvadrattal. Vi viser indirekte at $\sqrt{n}$ er irrational ved at antage det modsatte og nå frem til en modstrid. Antag derfor at $\sqrt{n}=\frac{a}{b}$, hvor a og b er hele tal. Dermed er

$$b^2n=a^2$$

Betragt nu primfaktoropløsningen $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$. Fordi n ikke er et kvadrattal, er mindst en af eksponenterne, lad os sige α_i, ulige da kvadrattallene netop er de positive hele tal hvor alle eksponenterne i primfaktoropløsningen er lige. Eksponenten til p_i på venstresiden b^2n er derfor ulige da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af kvadrattallet b^2 er lige, og lige plus ulige giver ulige. Eksponenten til p_i på højresiden a^2 er lige da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af kvadrattallet a^2 er lige. Dette er en modstrid da primfaktoropløsningen er entydig, og dermed er $\sqrt{n}$ et irrationalt tal. □

Opgave 1.4.2. Bevis sætning 1.4.2. *Hint*: 8

Sætning 1.4.4. Lad n og m være positive heltal.

Da er $\sqrt[m]{n}$ et rationalt tal netop hvis n er en m'te potens af et positivt heltal, dvs. netop hvis $n=a^m$ for et positivt heltal a.

Opgave 1.4.3. Bevis sætning 1.4.4.

Sætning 1.4.5. Lad a og b være to forskellige reelle tal.

Der er uendeligt mange rationale og uendeligt mange irrationale tal mellem a og b.

Bevis. Vi viser kun at der er et rationalt tal mellem a og b. Resten overlades til læseren i en opgave. Antag uden tab af generalitet at $a<b$. Lad n være et helt tal så $\frac{1}{n}<b-a$. Lad m være det mindste hele tal så $a<\frac{m}{n}$. Dermed er $\frac{m-1}{n}\le a$. Nu må det rationale tal $\frac{m}{n}$ ligge mellem a og b da

$$a<\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}<a+(b-a)=b. \quad \square$$

Opgave 1.4.4. Bevis sætning 1.4.5.

Opgave 1.4.5. Lad a og b være rationale tal. Bevis at hvis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ er et rationalt tal, eller $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ er et rationalt tal, da er $\sqrt{a}$ og $\sqrt{b}$ også rationale tal.

Opgave 1.4.6. For hvilke positive hele tal n og m gælder at $\sqrt{\frac{n}{m}}$ er et rationalt tal?

Opgave 1.4.7. Bestem alle ikke-negative hele tal a, b og c så

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{2014}.$$

(NMC 2014 opgave 2). *Hint*: 40

1.5 Summer

Definition af sumtegn

Når man skal angive en sum med mange led, som fx $1+2+3+\cdots+100$ eller $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{57}$, bruger man ofte sumtegn $\sum$ og et indeks, fx i. Under sumtegnet skrives fra hvilket indeks summen starter, fx $i=1$, og over sumtegnet skrives sidste indeks. Her er nogle eksempler:

$$\sum_{n=1}^{100} n = 1+2+3+\cdots+100.$$

$$\sum_{i=1}^{57} x_i = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{57}.$$

$$\sum_{n=0}^{50}(2n+1) = 1+3+5+\cdots+101.$$

$$\sum_{k=11}^{35} \frac{1}{2k} = \frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\cdots+\frac{1}{70}.$$

$$\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

$$\sum_{i=10}^{n} 10i = 100+110+120+\cdots+10n.$$

Sørg for at blive fortrolig med sumtegnet da du får brug for det i mange sammenhænge. I starten er det en god idé hver gang du ser et sumtegn, at skrive summen op som ovenfor.

Opgave 1.5.1. For hver af nedenstående summer skal du skrive summen op uden sumtegn for at få godt styr på sumtegnet.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{200} n^2$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{20}(6+3n)$, c) $\displaystyle\sum_{k=5}^{105}\frac{k+1}{k}$, d) $\displaystyle\sum_{a=10}^{199}\frac{1}{5a(5a+5)}$.

Opgave 1.5.2. For hver af nedenstående summer skal du skrive summen op med sumtegn for at få godt styr på sumtegnet.

a) $1+2+2^2+\cdots+2^{400}$.

b) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{101\cdot 104}$.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4999}+\sqrt{5001}}$.

Definition af differensrække (aritmetisk progression)

En *differensrække* (også kaldet en *aritmetisk progression*) er en talfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med den egenskab at differensen $a_{n+1}-a_n$ mellem ethvert af følgens tal og det foregående er en konstant d kaldet *differensen*.

Fx er $7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ en differensrække med differens $d=3$.

Sætning 1.5.1. Summen af de første n led i differensrækken $a_1, a_2, a_3\ldots$ med differens d er

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = na_1 + d\frac{(n-1)n}{2}.$$

Opgave 1.5.3. Bevis sætning 1.5.1, og udregn summen af de 333 første led i differensrækken $2, 5, 8, \ldots$

Definition af kvotientrække (geometrisk progression)

En *kvotientrække* (også kaldet en *geometrisk progression*) er en talfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med den egenskab at kvotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mellem ethvert af rækkens tal og det foregående er et fast tal q kaldet *kvotienten*.

Fx er $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ en kvotientrække med kvotient $q=\frac{1}{2}$.

Sætning 1.5.2. Summen af de første n led i kvotientrækken $a_1, a_2, a_3 \dots$ med kvotient q er

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Opgave 1.5.4. Bevis sætning 1.5.2, og udregn summen af de første 11 led i kvotientrækken $1, 2, 4, 8, \dots$. *Hint*: 16

Eksempel 1.5.1. Teleskopsummer

Det kan umiddelbart se svært ud at beregne summen

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

Ved en simpel omskrivning bliver det helt ligetil fordi vi kan få næsten alle led til at gå ud med hinanden. Bemærk først at for reelle tal n og m som ikke er nul, og hvor $n \neq m$, er

$$\frac{1}{nm} = \frac{1}{m-n} \cdot \frac{m-n}{nm} = \frac{1}{m-n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Specielt er

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Vores sum fra før kan nu omskrives til

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Dette kaldes en *teleskopsum* fordi summen kan *foldes sammen* ligesom et teleskop.

Opgave 1.5.5. Udregn følgende summer

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{2k(2k+2)}$.

b) $\displaystyle\sum_{a=10}^{199} \frac{1}{5a(5a+5)}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{50} \frac{3}{n^2-1}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{1000} \frac{3}{n^2+3n+2}$.

Opgave 1.5.6. Lad $a_1, a_2, a_3 \dots$ være en differensrække med differens d. Udregn summen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}}$$

udtrykt ved a_1, d og n.

Bemærkning. Det er et standardtrick der virkelig er værd at huske, at hvis der står $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ i nævneren hvor $n \neq m$, så forlænges brøken med $\sqrt{n} \mp \sqrt{m}$ fordi det giver $n - m$ i nævneren ifølge tredje kvadratsætning:

$$\frac{1}{\sqrt{n} \pm \sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{n} \pm \sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{n} \mp \sqrt{m}}{\sqrt{n} \mp \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{n} \mp \sqrt{m}}{n - m}.$$

Læg mærke til hvordan det benyttes i næste eksempel, og skriv det bag øret til de næste opgaver.

Eksempel 1.5.2. Flere teleskopsummer

For at udregne summen

$$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

bruger vi tricket med at forlænge brøken med $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, fordi der står $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ i nævneren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} \\ &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}. \end{aligned}$$

Nu kan vi nemt omskrive summen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} &= \sum_{i=1}^{80} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{81}-\sqrt{80}) \\ &= -\sqrt{1}+\sqrt{81} = 8. \end{aligned}$$

Opgave 1.5.7. Vis at

$$\sum_{k=1}^{132} \frac{1}{\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k+4}} = 6.$$

Opgave 1.5.8. Vis at

$$\sum_{k=1}^{5000} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} > 49.$$

Opgave 1.5.9. Vis at

$$\sum_{k=0}^{43} \frac{1}{\sqrt{10k+1}+\sqrt{10k+6}} > 2.$$

Hint: 41

I de næste opgaver skal du omskrive til en teleskopsum ved at lave nogle smarte omskrivninger. De er lidt mere udfordrende end de tidligere. Husk at for et positivt helt tal n er $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$.

Opgave 1.5.10. Vis at

$$\sum_{n=1}^{100} n!\cdot n = 101! - 1.$$

Hint: 2

Opgave 1.5.11. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Hint: 10

Opgave 1.5.12. Vis (uden brug af induktion) at

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

Hint: 23

Opgave 1.5.13. Vis at

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k-1)}} < \sqrt{2}$$

for alle positive hele tal $n \geq 2$.

1.6 Rekursive følger

En *rekursiv følge* er en følge af tal hvor det næste tal i følgen er bestemt ud fra de foregående. En af de mest berømte rekursive følger er følgen af *Fibonaccital* $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$ hvor det næste i tal i følgen er summen af de to foregående. Nogle gange er det muligt at finde en lukket formel for det n'te tal i følgen, dvs. en formel hvor man kan udregne tallet udelukkende ved at vide at det er det n'te tal. Det kan man fx med Fibonaccitallene.

Her skal vi se på rekursive følger hvor det ofte er en god idé at lave en ny rekursiv følge som det er nemmere at håndtere, og nogle gange kan vi også finde en lukket formel for det n'te tal i rækken.

Eksempel 1.6.1. Omskriv til en anden følge

Lad a_0 være et positivt reelt tal, og lad

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1+2020a_{n-1}^2}} \quad \text{for } n = 1,2,\ldots,2020.$$

Vis at $a_{2020} < \frac{1}{2020}$. (Baltic Way 2020)

Rekursionsformlen indeholder kvadratrødder, og for at få en uden ser vi i første omgang i stedet på følgen $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{2020}$ givet ved $b_n = a_n^2$. For denne følge er $b_0 = a_0^2$ og

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1+2020b_{n-1}} \quad \text{for } n = 1,2,\ldots,2020.$$

Nu kan vi yderligere se at følgen bliver endnu simplere at beskrive hvis vi i stedet betragter følgen $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2020}$ hvor $c_n = \frac{1}{b_n}$, dvs. $c_0 = \frac{1}{b_0} = \frac{1}{a_0^2}$ og

$$c_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1+2020b_{n-1}}{b_{n-1}} = 2020 + c_{n-1} \quad \text{for } n = 1,2,\ldots,2020.$$

Følgen er altså en differenrække, og her er det nemt at bestemme en lukket formel for c_n og dermed specielt bestemme $c_{2020} = 2020^2 + c_0$.

Nu kan vi vurdere a_{2020}:

$$a_{2020} = \frac{1}{\sqrt{c_{2020}}} = \frac{1}{\sqrt{2020^2 + \frac{1}{a_0^2}}} < \frac{1}{2020}$$

som ønsket.

Opgave 1.6.1. Følgen af reelle tal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ konstrueres ud fra et givent a_1 på følgende måde: $a_{n+1} = a_n(a_n+2)$ for alle positive heltal n. Bestem samtlige reelle tal som a_{1001} kan antage når du frit må vælge a_1.

Opgave 1.6.2. En følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ af reelle tal er bestemt ved $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \frac{1}{2019 + \frac{1}{a_n}}, \quad n \geq 1.$$

Udregn summen $S = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots a_{2019}a_{2020}$. *Hint*: 18

Opgave 1.6.3. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ og $b_0, b_1 \ldots, b_{2019}$ være reelle tal forskellige fra 0 som opfylder at $b_n = \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) b_{n-1}$ for $n = 1, \ldots, 2019$. Antag at summen

$$S = \frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2019}b_{2019}}$$

er et irrationalt tal. Vis at b_0 og b_{2019} ikke begge kan være rationale tal. *Hint*: 13

Opgave 1.6.4. En følge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er bestemt ved $a_1 = 10^6$ og

$$a_{n+1} = n\left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + n \quad \text{for } n \geq 1.$$

Vis at der findes en delfølge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ af $a_1, a_2, a_3, \ldots$ så $b_1, b_2, b_3, \ldots$ er en differensrække. (At $b_1, b_2, b_3, \ldots$ er en *delfølge* af $a_1, a_2, a_3, \ldots$ betyder at følgen består af udvalgte tal fra følgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ placeret i samme rækkefølge som i $a_1, a_2, a_3, \ldots$.) *Hint*: 7

Opgave 1.6.5. En følge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ af reelle tal som ikke er nul, opfylder at

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}, \quad n \geq 3.$$

a) Bestem alle de værdier af x_1 og x_2 for hvilke uendeligt mange af tallene i følgen er hele tal. *Hint*: 32
b) Vis at det for alle positive hele tal n er muligt at vælge x_1 og x_2 så følgen indeholder n *forskellige* hele tal. *Hint*: 26

1.7 Ligninger - monotoni og vurderinger af de variable

Vi har allerede set på flere metoder man kan bruge når man løser ligninger og ligningssystemer, nemlig omskrivning til kvadrat, omskrivning til andengradsligning og substitution. Her vil vi se på mere komplicerede ligninger og ligningssystemer der kræver at man kombinerer disse metoder med viden om funktioners monotoniforhold.

Vi går ikke her ind i teorien om monotoniforhold, men bygger på at man allerede kan vurdere om forholdsvis simple funktioner er voksende eller aftagende i et interval.

Eksempel 1.7.1. Vurdering af antallet af løsninger

Vi ønsker at bestemme alle reelle tal x der opfylder

$$\sqrt{3-\sqrt{x+3}}=x$$

Ligningen har oplagt løsningen $x=1$.

For at undersøge om der findes andre løsninger, er det en god ide at se på monotoniforhold for funktionerne

$$f(x)=\sqrt{3-\sqrt{x+3}} \quad \text{og} \quad g(x)=x.$$

Det er oplagt at g er en voksende funktion af x. Funktionen f er en aftagende funktion af x da $\sqrt{x+3}$ er voksende, hvilket betyder at $3-\sqrt{x+3}$ er aftagende, og dermed at $\sqrt{3-\sqrt{x+3}}$ er aftagende.

Da f er aftagende, og g er voksende, har ligningen maksimalt en løsning, og den har vi allerede fundet. Den eneste løsning til ligningen er altså $x=1$.

Opgave 1.7.1. Bestem alle reelle tal x så

$$5=\sqrt{x+\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+7}.$$

Eksempel 1.7.2. Skjult andengradsligning og monotoni

Som vi tidligere har set, kan nogle ligninger omskrives til en andengradsligning i en ny variabel og derefter løses. I dette eksempel vil vi bestemme alle reelle tal x som opfylder at

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=14.$$

Dette er ikke en andengradsligning i x, men hvis vi omskriver, kan vi opnå en andengradsligning i en anden variabel. Bemærk først at

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{49-48}=1.$$

Ved at gange på begge sider med $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x$ får vi andengradsligningen

$$\left(\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x\right)^2-14\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x+1=0.$$

Løsningsformlen for andengradsligningen fra sætning 1.2.1 giver

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=\frac{14\pm\sqrt{192}}{2}=7\pm\sqrt{48}.$$

Nu kan vi som i eksemplet før vurdere antallet af løsninger. Da $f(x)=\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x$ er en aftagende funktion, fordi $0<7-\sqrt{48}<1$, er der samlet højst to løsninger. Det er let at se at $x=\pm 2$ løser ligningen, fordi $\left(7-\sqrt{48}\right)^{-1}=7+\sqrt{48}$. Dermed er $x=\pm 2$ de eneste løsninger til ligningen.

Opgave 1.7.2. Bestem alle reelle tal x så

$$3^{2+x}+3^{2-x}=82.$$

Opgave 1.7.3. Bestem alle reelle tal x så

$$8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0.$$

Eksempel 1.7.3. Vurdering af de ubekendte

Når man skal vise at et ligningssystemet *ikke* har nogen reelle løsninger, er det ofte en god idé at antage at der er en løsning, og vise at det leder til en modstrid. Modstriden kan i en del tilfælde opnås ved at vurdere de ubekendte.

Antag at ligningssystemet

$$y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}} \quad \text{og} \quad x=\sqrt{y-\sqrt{1+y}}$$

har mindst én reel løsning x og y. Da må $0\le y$ og $0\le x\le 1$. Ved at udnytte at $0\le x\le 1$, får vi

$$y=\sqrt{x+\sqrt{1-x}}\le\sqrt{x+1}\le\sqrt{2}.$$

Da vi ikke kan have lighedstegn i begge uligheder samtidig, må $y<\sqrt{2}$. Af ligningen

$$x=\sqrt{y-\sqrt{1+y}}$$

ses at $y\ge\sqrt{y+1}$, hvilket betyder at $y\ge 1$, og dermed at

$$y\ge\sqrt{y+1}\ge\sqrt{2},$$

hvilket er en modstrid. Altså har ligningssystemet ingen reelle løsninger.

Metoden med at vurdere størrelsen af de ubekendte kan også benyttes til ligninger og ligningssystemer der *har* løsninger. Her kan man fx indskrænke de intervaller løsningerne kan ligge i, og udnytte det til at bestemme samtlige løsninger.

Eksempel 1.7.4. Substitution og vurdering af antal løsninger

Nu ser vi på et ligningssystem hvor der er tre ubekendte og tre udtryk som er lig hinanden. Vi ønsker at bestemme alle tripler (x,y,z) af forskellige reelle tal som opfylder

$$x(y+1)=y(z+1)=z(x+1).$$

Bemærk først at hvis en af de tre ubekendte er 0, da må de to andre også være 0. Det samme er tilfældet med -1, og dermed findes ingen løsninger hvor 0 eller -1 indgår, da x, y og z skal være forskellige.

Da vi i denne ligning har tre ubekendte og tre udtryk som er lig hinanden, ønsker vi at reducere antallet af ligninger og ubekendte som vi skal arbejde med. Først indfører vi alligevel en ny størrelse k:

$$k=x(y+1)=y(z+1)=z(x+1).$$

Vi vil nu reducere til en ligning hvor kun k og x indgår vha. substitution. Da $z=\frac{k}{x+1}$ og $y=\frac{k}{x}-1=\frac{k-x}{x}$, substituerer vi z og y med de fundne udtryk i ligningen $k=y(z+1)$ for at få en ligning der kun indeholder x og k.

$$k=y(z+1)=\left(\frac{k-x}{x}\right)\left(\frac{k+x+1}{x+1}\right).$$

En omskrivning af ligningen giver

$$k(x^2+x)=k^2-x^2+k-x=k(k+1)-(x^2+x)\Leftrightarrow(k+1)(x^2+x-k)=0,$$

dvs. at $k=-1$ eller $x^2+x=k$. Antag at $k=-1$. Dette giver triplerne

$$\left(x,\frac{-1-x}{x},\frac{-1}{x+1}\right),$$

hvor $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Disse er alle løsninger og består af tre forskellige tal.

Antag i stedet at $k\ne-1$, dvs. at $x^2+x=k$. Af symmetrigrunde må y og z også opfylde denne ligning, men da den højst har to løsninger, kan de ikke alle tre være forskellige. Dermed er samtlige løsninger

$$\left(x,\frac{-1}{x}-1,\frac{-1}{x+1}\right),\quad \text{hvor } x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}.$$

Opgave 1.7.4. Bestem alle reelle tal x, y og z som opfylder ligningssystemet

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=y, \quad \frac{4y^2}{1+4y^2}=z, \quad \frac{4z^2}{1+4z^2}=x.$$

Hint: 31

Opgave 1.7.5. Bestem alle tripler (x,y,z) af ikke-negative reelle tal som opfylder følgende ligningssystem:

$$x^2-y=(z-1)^2, \quad y^2-z=(x-1)^2, \quad z^2-x=(y-1)^2.$$

Hint: 35

Opgave 1.7.6. Løs for alle reelle x, y og z ligningssystemet

$$x^2+x-1=y, \qquad y^2+y-1=z, \qquad z^2+z-1=x.$$

Hint: 1

Opgave 1.7.7. Bestem antallet af reelle løsninger til ligningen

$$0=x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+\frac{5}{2}.$$

(NMC 2001) *Hint*: 27

Opgave 1.7.8. De reelle tal x, y og z er ikke alle ens, og de opfylder at

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k.$$

Bestem samtlige mulige værdier af k. (NMC 2006) *Hint*: 17

1.8 Introduktion til funktionalligninger

En funktionalligning er en ligning hvor den ubekendte er en funktion. Man løser en funktionalligning ved at bestemme samtlige funktioner der løser ligningen.

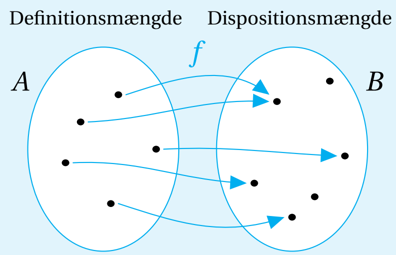
Inden vi ser på funktionalligninger, skal vi lige have lidt bedre styr på funktioner og de begreber vi benytter om funktioner.

Definition af funktion, definitionsmængde, dispositionsmængde og værdimængde

En *funktion* fra *definitionsmængden* A til *dispositionsmængden* B er en regel der til hvert eneste element i definitionsmængden A knytter netop ét element i dispositionsmængden B. Med symboler skriver vi:

$$f : A \to B.$$

Vi kan også illustrere det grafisk:



Værdimængden er alle de elementer i dispositionsmængden som bliver ramt.

Ofte angiver vi funktioner ved en forskrift, fx funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med forskriften $f(x)=x^2$. Dette angiver at definitionsmængden og dispositionsmængden begge er de reelle tal, og at vi for hvert eneste x i definitionsmængden knytter tallet x^2 i dispositionsmængden. Dette tal kaldes også *funktionsværdien* af x. I dette eksempel er værdimængden alle ikke-negative reelle tal da det netop er dem der bliver ramt.

Nu er vi klar til at se på funktionalligninger. For at give et billede af hvordan man kan bestemme løsningerne til en funktionalligning, ser vi på et eksempel.

Eksempel 1.8.1. Løsning af funktionalligning
Vi ønsker at bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(x+yf(x)\big)=f\big(xf(y)\big)-x+f\big(y+f(x)\big)$$

for alle $x,y\in\mathbb{R}$.

For at få information om de funktioner der er løsning til ligningen, prøver vi at indsætte forskellige værdier af x og y.

Først indsætter vi $x=y=0$:

$$f(0)=f(0)+f\big(f(0)\big).$$

Vi kan altså konkludere at $f\big(f(0)\big)=0$.

Så indsætter vi $x=y=1$:

$$f\big(1+f(1)\big)=f\big(f(1)\big)-1+f\big(1+f(1)\big).$$

Altså er $f\big(f(1)\big)=1$. På den måde fortsætter vi med at samle oplysninger om f og kombinerer dem også med tidligere oplysninger.

Hvis vi indsætter $x=1$ og $y=0$, får vi

$$f(1)=f\big(f(0)\big)-1+f\big(f(1)\big)=0-1+1=0.$$

Altså er $f(1)=0$. Da $f(1)=0$ og $f\big(f(1)\big)=1$, er $f(0)=f\big(f(1)\big)=1$. Nu har vi fundet to funktionsværdier.

Da vi ikke kun vil finde én funktionsværdi ad gangen, indsætter vi nu kun én værdi for en af de to variable for på den måde at nå frem til noget mere generelt.

Indsæt $x=1$:

$$\begin{aligned} f\big(1+yf(1)\big)&=f\big(f(y)\big)-1+f\big(y-f(1)\big)\\ 0&=f\big(f(y)\big)-1+f(y). \end{aligned}$$

Altså er $f\big(f(x)\big)=1-f(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}$.

Nu indsætter vi $y=0$:

$$\begin{aligned} f(x)&=f\big(xf(0)\big)-x+\big(f(x)\big)\\ f(x)&=f(x)-x+f\big(f(x)\big). \end{aligned}$$

Altså er $f\big(f(x)\big)=x$ for alle $x\in\mathbb{R}$. Sammen med $f\big(f(x)\big)=1-f(x)$ giver det at $f(x)=1-x$ for alle $x\in\mathbb{R}$.

Det vi nu har vist, er at hvis der er en løsning, så er den $f(x)=1-x$. Der er altså højst én løsning til funktionalligningen. For at tjekke om $f(x)=1-x$ faktisk løser ligningen, indsætter vi først funktionsudtrykket på venstresiden:

$$f\big(x+yf(x)\big)=f\big(x+y(1-x)\big)=1-x-y+xy.$$

Derefter på højresiden:

$$\begin{aligned} f\big(xf(y)\big)-x+f\big(y+f(x)\big)&=f\big(x(1-y)\big)-x+f(y+1-x)\\ &=(1-x+xy)-x+(1-y-1+x)\\ &=1-x-y+xy. \end{aligned}$$

Dette viser at $f(x)=1-x$ løser ligningen, og vi ved at det er eneste løsning.

Nogle funktionalligninger har flere løsninger, fx uendeligt mange, mens andre ikke har løsninger.

Bemærkning. Løsning af opgaver om funktionalligninger falder altid i to dele:

Vise at der ikke findes andre løsninger end .... Dette er den svære del!

Undersøge om de mulige løsninger du har fundet, faktisk er løsninger. Dette er ofte nemt, eller i værste fald lidt bøvlet, men det er en vigtig del af løsningen.

Opgave 1.8.1. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x+y) = yf(x) + f(x)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 1.8.2. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 1.8.3. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(xy + f(xy)\big) = 2xf(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$. *Hint*: 22

Det er ikke altid at man bliver bedt om at løse funktionalligninger. Nogle gange skal man blot finde bestemte egenskaber ved funktionen.

Opgave 1.8.4. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion så

$$f\big(f(x)\big) = x^2 - x + 1$$

for alle reelle tal x. Bestem $f(0)$. (Baltic Way 2011) *Hint*: 28

Opgave 1.8.5. Vis at der ikke findes nogen funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(f(x)\big) = xf(x) + 2x$$

for alle $x \in \mathbb{R}$, sådan at der findes et reelt tal a med $f(a) = -2$. *Hint*: 6

1.9 Funktionalligninger med funktioner defineret på de hele tal

Når funktionerne er defineret på de hele tal eller en delmængde af de hele tal, har man ofte mulighed for at bruge induktion, hvilket vi skal se nærmere på.

Eksempel 1.9.1. Induktion

Hvis vi skal bestemme samtlige funktioner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som opfylder at

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{Z}$, er det en god idé først at prøve sig lidt frem ved at indsætte forskellige værdier for x og y som vi gjorde før. Først indsætter vi $x = y = 0$ i funktionalligningen og får

$$f(0) + f(0) = 2f(0) + 2f(0).$$

Altså er $f(0) = 0$. Herefter prøver vi at indsætte $x = y = 1$ og får

$$f(2) + f(0) = 2f(1) + 2f(1),$$

dvs. $f(2) = 4f(1)$. Hvis man fortsat prøver sig lidt frem med at indsætte små værdier af x og y, ser man hurtigt at $f(3) = 9f(1)$, $f(4) = 16f(1)$ og $f(5) = 25f(1)$. Det ligner et mønster hvor $f(n) = n^2 f(1)$ for alle positive heltal n. Vi prøver ved induktion at teste om denne formodning er rigtig.

Sæt $f(1) = a$. Påstanden om at f$(n) = n^2 a$ for alle positive heltal n er sand for $n = 1$ og $n = 2$. Antag at påstanden er sand for alle $1 \leq n \leq N$. Ved at indsætte $x = N$ og $y = 1$ fås

$$f(N+1) = 2f(N) + 2f(1) - f(N-1) = \big(2N^2 + 2 - (N-1)^2\big)a = (N+1)^2 a,$$

hvilket fuldfører induktionsskridtet. Vi har nu vist at $f(n) = n^2 a$ for alle $n \in \mathbb{N}$, dvs. vi har fundet funktionsværdierne for alle de positive tal udtrykt ved $f(1)$. Nu mangler vi kun at finde funktionsværdierne af alle de negative tal. Ved at indsætte $x = 0$ fås $f(y) = f(-y)$. Altså er $f(n) = n^2 a$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Det vi har vist indtil nu, er kun at hvis der er løsninger til funktionalligningen, da er de på formen $f(n) = n^2a$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Nu tester vi om disse funktioner rent faktisk er løsninger:

$$f(x+y)+f(x-y)=(x+y)^2a+(x-y)^2a=2x^2a+2y^2a \quad \text{og}$$
$$2f(x)+2f(y)=2x^2a+2y^2a.$$

Altså er løsningerne alle funktioner $f(n)=n^2a$, $a\in\mathbb{Z}$.

Eksempel 1.9.2. Smart indsættelse

I dette eksempel skal vi se på en funktionalligning hvor der viser sig ikke at være nogen løsninger. Vi ønsker at bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ som opfylder

$$f\big(f(n)\big)=n+1 \qquad \text{for alle } n\in\mathbb{N}.$$

For at udnytte at funktionalligningen indeholder $f\big(f(n)\big)$, er det ofte en god idé at erstatte n med $f(n)$. Det giver nemlig:

$$f\Big(f\big(f(n)\big)\Big)=f(n)+1.$$

Det ser umiddelbart mere grimt ud, men det smarte er at $f\Big(f\big(f(n)\big)\Big)$ også fremkommer hvis vi tager f på begge sider i den oprindelige ligning:

$$f\Big(f\big(f(n)\big)\Big)=f(n+1).$$

Samlet giver det at $f(n+1)=f(n)+1$ for alle $n>1$. Funktionsværdierne vokser altså med 1 når n vokser med 1, dvs. at $f(n)=n-1+f(1)$ for alle $n\in\mathbb{N}$. Vi tjekker nu for hvilke værdier af $f(1)$ at dette er en løsning:

$$n+1=f\big(f(n)\big)=f\big(n-1+f(1)\big)=n-1+f(1)-1+f(1),$$

og altså $3=2f(1)$. Dette er umuligt da $f(1)\in\mathbb{N}$. Der er derfor ingen løsninger til ligningen.

Opgave 1.9.1. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ hvor $f(1)=2$, og som opfylder at

$$f\big(f(x)\big)=f(x)+1$$

for alle $x\in\mathbb{N}$.

Opgave 1.9.2. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ hvor $f(1)=2$ og $f(3)=5$, og som opfylder at

$$f\big(f(x)\big)=f(x)+2$$

for alle $x\in\mathbb{N}$.

Opgave 1.9.3. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ hvor $f(2011)=1$, og som opfylder at

$$f(x)f(y)=f(x-y)$$

for alle $x,y\in\mathbb{Z}$.

Opgave 1.9.4. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ som opfylder at

$$f(x+y)+f(x-y)=2x^2+2y^2+2$$

for alle $x,y\in\mathbb{N}$ hvor $x>y$.

Opgave 1.9.5. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$ hvor $f(1)=0$, og hvor der for alle $x\in\mathbb{N}$ gælder at

$$f(2x)=2f(x)+1 \quad \text{og} \quad f(2x+1)=2f(x).$$

1.10 Funktionalligninger

I forrige afsnit så vi på funktionalligninger hvor funktionerne var defineret på de hele tal, og det gav mulighed for induktion. Nu udvider vi og ser igen på funktionalligninger med funktioner defineret på de reelle tal eller en delmængde af de reelle tal. Denne delmængde kan selvfølgelig godt bare indeholde hele tal.

Det er stadig en god idé at sætte forskellige værdier af de variable ind, men vi skal udvide vores repertoire af løsningsstrategier.

Eksempel 1.10.1. Substitution

Når man skal bestemme samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x) + x f(1-x) = x^2 + 1 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R},$$

er det interessant at man ved at substituere x med $1-x$ får endnu en ligning

$$f(1-x) + (1-x) f(x) = (1-x)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

hvor funktionsværdierne $f(x)$ og $f(1-x)$ indgår. Hvis vi ganger denne ligning med x og trækker den fra den oprindelige ligning, får vi

$$f(x) - x(1-x) f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

og dermed

$$f(x)(x^2 - x + 1) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$

Da $x^2 - x + 1 > 0$ for alle x, er

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}$$

eneste mulige løsning.

Ved indsættelse ses at denne funktion opfylder betingelserne:

$$\begin{aligned} f(x) + x f(1-x) &= \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1} + x \frac{-(1-x)^3 + 3(1-x)^2 - 2(1-x) + 1}{(1-x)^2 - (1-x) + 1} \\ &= \frac{-x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + x(x^3 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} = x^2 + 1. \end{aligned}$$

Opgave 1.10.1. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(3-x) + 2f(x) = x \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Opgave 1.10.2. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 1.10.2. Symmetri

I nogle funktionalligninger er det interessant at se om der er en form for symmetri. Hvis man fx skal bestemme samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x+y) - f(y) = x^2 + 2xy \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R},$$

er det vigtigt at lægge mærke til at $f(x+y)$ er symmetrisk i x og y. Dette giver nemligt at

$$x^2 + 2xy + f(y) = y^2 + 2xy + f(x),$$

og altså $f(x) - x^2 = f(y) - y^2$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dette viser at $f(x) - x^2$ er konstant, og derfor at løsningerne skal findes blandt funktionerne $f(x) = x^2 + a$. Ved indsættelse ses at $f(x) = x^2 + a$ løser ligningen for alle reelle tal a.

Opgave 1.10.3. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ som opfylder at

$$f(xy)\cdot f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=f(x)+y \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}_+.$$

Opgave 1.10.4. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

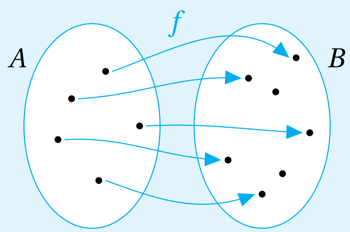
$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Inden vi ser på næste teknik, har vi brug for begreberne injektiv, surjektiv og bijektiv.

Definition af injektiv, surjektiv og bijektiv

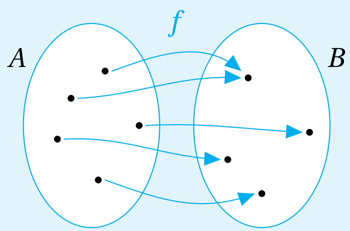
En funktion $f : A \to B$ er *injektiv* hvis det for alle $x, y \in A$ gælder at $f(x) = f(y)$ medfører at $x = y$. Det vil sige at to elementer i definitionsmængden ikke rammer det samme element i dispositionsmængden.

Injektiv:



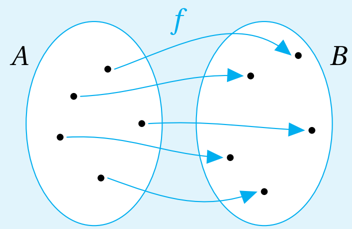
En funktion $f : A \to B$ er *surjektiv* hvis der for hvert $y \in B$ findes et $x \in A$ så $f(x) = y$. Det vil sige at alle elementer i dispositionsmængden rammes, og dermed at værdimængden er lig med dispositionsmængden.

Surjektiv:



En funktion kaldes *bijektiv* hvis den både er injektiv og surjektiv. Det vil sige at funktionen angiver en parring af elementerne i definitionsmængden og elementerne i dispositionsmængden.

Bijektiv:



Når man løser funktionalligninger, kan det være en god idé at overveje om en løsning er injektiv, surjektiv eller bijektiv. Hvis man fx ved at funktionsværdierne af to udtryk er identiske, da må selve udtrykkene også være identiske hvis funktionen er injektiv. Andre gange har man brug for at vide at der findes et x med en bestemt funktionsværdi, fordi det fx kan være interessant at indsætte sådan en værdi, dvs. man har brug for at funktionen er surjektiv. Nu skal vi se på et eksempel hvor man kan udnytte injektivitet.

Eksempel 1.10.3. Injektiv

Hvis vi skal bestemme samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(xy-f(x)\big)=x-y+f(y) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R},$$

kan man ret hurtigt se at en løsning må være injektiv: Hvis $f(x) = f(y)$, er nemlig

$$x-y=f\big(xy-f(x)\big)-f(y)=f\big(yx-f(y)\big)-f(x)=y-x,$$

og dermed $2x = 2y$, dvs. $x = y$. For at kunne udnytte injektivitetsegenskaben vil vi gerne have to funktionsværdier som er identiske. Ved at sætte $x = y$ får vi $f\big(x^2-f(x)\big) = f(x)$, og dermed $x^2 - f(x) = x$. Dvs. den eneste mulige løsning er $f(x) = x^2 - x$. Ved indsættelse ses at denne funktion ikke løser ligningen; der er altså ingen løsninger.

Opgave 1.10.5. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$3x + f(2x + 2y - f(x)) = 3y + f(y) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Hint: 5

Opgave 1.10.6. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder at

$$4f(f(x)) = 2f(x) + x$$

for alle reelle tal x. Vis at $f(x) = 0$ netop når $x = 0$. *Hint*: 39

Opgave 1.10.7. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ hvor $f(0) = 1$, og som opfylder at

$$f\big(f(n)\big) = f\big(f(n+2) + 2\big) = n$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$. *Hint*: 15

Opgave 1.10.8. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Hint: 12

De resterende opgaver er blandede opgaver hvor man skal bruge en blanding af alt muligt.

Opgave 1.10.9. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(x - f(y)\big) = 1 - x - y \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Opgave 1.10.10. Bestem alle reelle tal a for hvilke der findes et reelt tal b og en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at $f(b) = 0$ og

$$f\big(f(x)\big) = xf(x) + a$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 1.10.11. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$f(x)f(y) = f(xy + x) + 3f(x + y) + y \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Opgave 1.10.12. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Opgave 1.10.13. Lad $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være en funktion som opfylder at $f(1) = 1995$ og

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

for alle hele tal $n > 1$. Bestem $f(1995)$.

Opgave 1.10.14. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f\big(f(x)^2 + f(y)\big) = xf(x) + y$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 1.10.15. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som opfylder

$$f(m+n)f(m-n) = f(m^2)$$

for alle $m, n \in \mathbb{N}$ hvor $m > n$. *Hint*: 19

Opgave 1.10.16. Bestem alle injektive funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så

$$f(f(n)) \le \frac{n + f(n)}{2} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hint: 36

Opgave 1.10.17. Funktionen $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+$ opfylder at $f(1) = 1$ og at

$$f(x + y) \ge f(x) + f(y)$$

for alle $x, y \in [0;1]$. Vis at $f(x) \le 2x$ for alle $x \in [0;1]$. *Hint*: 20

Opgave 1.10.18. En funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ opfylder at der findes mindst ét $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ så $f(x) = \frac{1}{2}$, og at

$$f(x) - f(y) = f(x)f\left(\frac{1}{y}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right)f(y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bestem $f(-1)$. *Hint*: 29

1.11 Grundlæggende uligheder

Nogle af de mest basale uligheder handler om forholdet mellem det *aritmetiske* gennemsnit, det *geometriske* gennemsnit, det *harmoniske* gennemsnit og det *kvadratiske* gennemsnit, derfor skal vi først have styr på disse gennemsnit.

Definition af det aritmetiske gennemsnit

Det *aritmetiske gennemsnit* af n reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ er

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Definition af det geometriske gennemsnit

Det *geometriske gennemsnit* af n ikke-negative reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ er

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Definition af det harmoniske gennemsnit

Det *harmoniske gennemsnit* af n positive reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ er

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Definition af det kvadratiske gennemsnit

Det *kvadratiske gennemsnit* af n reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ er

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Sætning 1.11.1. For positive reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ gælder at

$$Q \geq A \geq G \geq H$$

med lighedstegn netop når $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Bemærk at $Q \geq A$ ikke kræver at $x_1, x_2, \ldots x_n$ er positive.

Bevis for ulighederne i tilfældet $n = 2$. Inden vi viser sætningerne generelt, ser vi på tilfældet $n = 2$. I dette tilfælde ser AG-uligheden sådan ud

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2},$$

hvor x_1 og x_2 er positive reelle tal. Den kan vi som tidligere vist bevises ved at omskrive til kvadrat. Dette giver

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2)^2 \geq 4 x_1 x_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 \geq 0,$$

med lighedstegn netop når $x_1 = x_2$. Vi overlader beviset for de to andre uligheder til læseren. □

Opgave 1.11.1. Bevis at $Q \geq A$ og $G \geq H$ for $n = 2$.

Nu beviser vi ulighederne generelt. Beviserne er tekniske, og man kan godt løse opgaver uden at have læst dem.

Bevis for QA-uligheden. Omskriv uligheden

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

ved at først at kvadrere og derefter omskrive til

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \cdots x_n)^2.$$

Nu udregnes højresiden

$$n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geq x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_ix_j,$$

dvs. vi har omformet QA-uligheden til

$$(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_ix_j.$$

Når der under sumtegnet står $1 \leq i < j \leq n$, betyder det at vi summerer over alle hele tal i og j som opfylder at $1 \leq i < j \leq n$.

På venstresiden står nu en masse kvadrater og på højresiden en masse dobbelte produkter, og derfor ser vi om det er muligt at omskrive uligheden til en sum af kvadrater som er større end eller lig med 0:

$$\begin{aligned} Q \geq A \quad &\Leftrightarrow \quad (n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_ix_j \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i^2+x_j^2) - \sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_ix_j \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dette viser at QA-uligheden er sand, og at der gælder lighedstegn netop når $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Bevis for *AG*-uligheden. Man kan bevise AG-uligheden på flere forskellige måder, men her benytter vi et induktionsbevis. Det interessante i dette bevis er at induktionsskridtet udføres på utraditionel vis. Vi har allerede vist den i tilfældet $n = 2$. Hvis man forsøger at vise at hvis AG-uligheden er sand for n da er den også sand for $n+1$, bliver det meget kompliceret. Det er imidlertid væsentlig lettere at vise at hvis AG-uligheden er sand for n da er den også sand for $2n$ og for $n-1$, og med disse to induktionsskridt kan vi få alle dominobrikkerne til at vælte.

Vi har allerede vist AG-uligheden for $n = 2$. Antag at

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

for vilkårlige ikke-negative reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Først viser vi at denne antagelse medfører at uligheden er sand for $2n$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ være ikke-negative reelle tal. Ifølge antagelsen er

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}}.$$

Ved at benytte AG-uligheden for $n = 2$ for de to tal på højresiden i ovenstående ulighed får vi

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} &\geq \frac{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}}}{2} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\,\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}}}, \end{aligned}$$

hvilket netop er

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1x_2\cdots x_{2n}}.$$

Nu viser vi at vores antagelse også medfører at uligheden er sand for $n-1$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ være ikke-negative reelle tal, og sæt $x_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$. Ifølge antagelsen er

$$\begin{aligned} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}} &&\Leftrightarrow \\ \frac{n(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})}{n(n-1)} &\geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}} &&\Leftrightarrow \\ \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n &\geq x_1x_2\cdots x_{n-1}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} &&\Leftrightarrow \\ \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} &\geq x_1x_2\cdots x_{n-1} &&\Leftrightarrow \\ \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} &\geq \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Bemærk at der i begge tilfælde gælder lighedstegn netop når alle $2n$ eller alle $n-1$ ikke-negative reelle tal er lig hinanden. Hermed er induktionen fuldført. □

Opgave 1.11.2. Vis GH-uligheden ved at udnytte at vi allerede har bevist AG-uligheden.

Nu har vi bevist vores centrale sætning og er klar til at benytte den til at løse uligheder. Overvej for hver ulighed hvilken af de tre uligheder du skal bruge, og hvordan du kan vælge $x_1, x_2, \dots, x_n$ hensigtsmæssigt.

Opgave 1.11.3. Vis at

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

for reelle tal a, b og c, hvor $abc \neq 0$.

Opgave 1.11.4. Lad n være et positivt heltal. Vis at

$$\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n}$$

for positive reelle tal a og b.

Opgave 1.11.5. Vis at

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$$

for positive reelle tal a, b og c.

Opgave 1.11.6. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Opgave 1.11.7. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at

$$\sqrt[3]{abc}+1 \leq \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Hint: 14

Opgave 1.11.8. Lad a og b være to positive reelle tal med sum 1. Bevis at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Hvornår gælder der lighedstegn? *Hint*: 34

Opgave 1.11.9. Lad a, b og c være reelle tal der opfylder at $c > 0$, $a > c$ og $b > c$. Vis at

$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}.$$

Hint: 3

Opgave 1.11.10. Lad x, y, z være positive reelle tal som opfylder at $xyz = 32$. Bestem den mindst mulige værdi af

$$x^2+4xy+4y^2+2z^2.$$

Hint: 25

1.12 Flere uligheder

Der findes et hav af forskellige uligheder man kan bruge i matematikkonkurrencer, men her ser vi kun på tre centrale uligheder, nemlig omarrangeringsuligheden, Cauchy-Schwarz og Jensens ulighed. Når vi når til Jensens ulighed, får vi brug for flere funktionsbegreber som hænger sammen med teori der ligger uden for disse noter, og derfor springer vi alle beviser over.

Sætning 1.12.1. Omarrangeringsuligheden

Lad $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ og $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ være reelle tal, og lad $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ være en permutation af $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Da er

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n.$$

og

$$x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n \geq x_ny_1 + x_{n-1}y_2 + \cdots + x_1y_n.$$

Hvis $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$, er der lighedstegn i første ulighed netop når $x'_i = x_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$, og der er lighedstegn i anden ulighed netop når $x'_i = x_{n+1-i}$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bevis. Vi viser kun den første ulighed, da den anden følger af den første ved at ændre fortegn på alle y_i'erne. Betragt summen

$$x'_1y_1 + x'_2y_2 + \cdots + x'_ny_n$$

for alle permutationer af x_i'erne. Da der er endeligt mange permutationer, må der være en eller flere summer som er maksimale. Lad $x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$ være en permutation som giver en maksimal sum.

Antag at der findes et i så $x''_i > x''_{i+1}$. Da er

$$(x''_i - x''_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x''_{i+1}y_i + x''_iy_{i+1} \geq x''_iy_i + x''_{i+1}y_{i+1},$$

med lighedstegn netop hvis $y_i = y_{i+1}$. Uligheden viser at summen bliver større når vi bytter om på x''_i og x''_{i+1}, hvis $y_i < y_{i+1}$, mens den forbliver uændret hvis $y_i = y_{i+1}$. Vi kan derfor altid bytte om på x''_i og x''_{i+1} hvis $x''_i > x''_{i+1}$, uden at gøre summen mindre. Vi kan blive ved med at bytte om på to naboer så længe der findes naboer med $x''_i > x''_{i+1}$, og da denne proces stopper på et tidspunkt, ender vi med en permutation hvor $x'_i = x_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$, uden at vi har gjort summen mindre. Dermed er summen maksimal når $x'_i = x_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$. I tilfældet hvor $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$, viser ovenstående at der kun er lighedstegn netop når alle x_i'erne er identiske. □

Opgave 1.12.1. Lad $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ og $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ være reelle tal, og lad $z_1, z_2, \ldots, z_n$ være en permutation af $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Vis at

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

(IMO 1975)

Opgave 1.12.2. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Sætning 1.12.2. Cauchy-Schwarz

For vilkårlige $2n$ reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ og $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gælder at

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Bemærk at uligheden også gælder hvis man kvadrerer på begge sider, da man jo kan indsætte lutter positive værdier.

Bemærkning. Cauchy-Schwarz formuleres ofte med vektorer: For vektorerne $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ gælder at

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) \leq \left|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\right| \left|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\right|.$$

Venstresiden er prikproduktet, hvilken netop svarer til venstresiden i Cauchy-Schwarz, og højresiden er produktet af længderne af vektorerne, hvilket netop er det der står på højresiden i Cauchy-Schwarz.

Beviset overlades til læseren i opgave 1.12.14.

Opgave 1.12.3. Vis at der for positive reelle tal $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ gælder at

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i b_i}\right)\geq 4n^2.$$

Opgave 1.12.4. Benyt Cauchy-Schwarz til at bevise AH-uligheden.

Opgave 1.12.5. Vis at

$$a+b+c\leq\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$$

for positive tal a, b og c.

Inden vi er klar til Jensens ulighed, skal vi have styr på begreberne konveks og konkav.

Definition af konveks og konkav

Lad $I\subseteq\mathbb{R}$ være et interval som evt. er hele $\mathbb{R}$.

En funktion $f: I\to\mathbb{R}$ er *konveks* på intervallet I hvis der for alle $t\in[0;1]$ og alle $x_1, x_2\in I$ med $x_1<x_2$ gælder at

$$f(t\cdot x_1+(1-t)\cdot x_2)\leq t f(x_1)+(1-t)f(x_2).$$

Det kan se lidt kringlet ud, men den geometriske fortolkning af dette er blot at et vilkårligt linjestykke mellem to punkter på grafen ligger over grafen for f.

En funktion $f: I\to\mathbb{R}$ er *konkav* på intervallet I hvis der for alle $t\in[0;1]$ og alle $x_1, x_2\in I$ med $x_1<x_2$ gælder at

$$f(t\cdot x_1+(1-t)\cdot x_2)\geq t f(x_1)+(1-t)f(x_2).$$

Tilsvarende er den geometriske fortolkning her at et vilkårligt linjestykke mellem to punkter på grafen ligger under grafen for f.

Det kan være besværligt at tjekke om definitionen for konveks og konkav er opfyldt, og derfor benytter vi ofte følgende sætning.

Sætning 1.12.3. Lad $f: I\to\mathbb{R}$ være en funktion der kan differentieres to gange.

Funktionen f er konveks på I hvis $f''(x)\geq 0$ for $x\in I$.

Tilsvarende er f konkav I hvis $f''(x)\leq 0$ for $x\in I$.

Sætning 1.12.4. Jensens ulighed

Lad $f: I\to\mathbb{R}$ være en konveks funktion på intervallet $I\subseteq\mathbb{R}$, og lad $x_1, x_2, \ldots, x_n\in I$. Da gælder

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\geq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

med lighedstegn netop hvis $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Lad $f: I\to\mathbb{R}$ være en konkav funktion på intervallet $I\subseteq\mathbb{R}$, og lad $x_1, x_2, \ldots, x_n\in I$. Da gælder

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

med lighedstegn netop hvis $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Opgave 1.12.6. Benyt Jensens ulighed til at bevise QA-uligheden.

Opgave 1.12.7. Lad a, b og c være reelle tal, hvor $a, b, c>-1$. Vis at

$$\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}+1}\geq\frac{\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{b+1}+\sqrt[3]{c+1}}{3}.$$

Opgave 1.12.8. Vis at

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$$

for positive reelle tal a, b og c. *Hint*: 9

De næste opgaver er blandede opgaver hvor du selv må vurdere hvilken ulighed du kan benytte.

Opgave 1.12.9. Lad a, b og c være positive reelle tal med sum 1. Vis at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Hint: 11

Opgave 1.12.10. Vis at for vilkårlige $2n$ reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $y_1, y_2, \dots, y_n$ gælder at

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Hint: 38

Opgave 1.12.11. Lad $n>1$ være et helt tal, og lad $a_1, a_2, \dots, a_n$ være positive reelle tal med sum 1. Vis at

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Hint: 4

Opgave 1.12.12. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at

$$\frac{2a}{a^2+bc}+\frac{2b}{b^2+ca}+\frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}.$$

Opgave 1.12.13. Lad x, y, z være reelle tal med $x, y, z > 1$ og $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Vis at

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Opgave 1.12.14. Bevis Cauchy-Schwarz. Du kan fx bevise den ved at benytte omarrangeringsuligheden.

2 Hints

1. Gang de tre ligninger sammen.
2. Udnyt at $n! \cdot n = (n+1)! - n!$.
3. Kvadrér.
4. Betragt $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.
5. Vis at f er injektiv.
6. Antag at der findes et reelt tal a med $f(a) = -2$, og vis at da er $f(0)$ to forskellige værdier, hvilket er en modstrid.
7. Sæt $k_n = \frac{a_{n+1}}{n}$.
8. Brug resultatet af sætning 1.4.3 til at vise sidste del.
9. Betragt $f(x) = x^4$.
10. Udnyt at $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$.
11. Betragt $f(x) = \left(x + x^{-1}\right)^2$, og brug Jensens ulighed.
12. Vis at f er surjektiv, og udnyt dette til at vise at f er lineær.
13. Udtryk $\frac{1}{a_n b_n}$ udelukkende ved b_n og b_{n-1}.
14. Opløft i tredje potens.
15. Vis at f er injektiv.
16. Gang summen med brøken $\frac{q-1}{q-1}$.
17. Eliminér x og z for at få en ligning i y og k som er en andengradsligning i y. Husk at de tre tal x, y og z ikke alle må være ens.
18. Sæt $b_n = \frac{1}{a_n}$.
19. Vis at alle andre funktionsværdier er fastlagt ud fra $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$. Bestem derefter $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$. Advarsel: Det er en meget møjsommelig proces der fx kan involvere $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$, $f(9)$, $f(16)$ og $f(25)$.
20. Vis ved induktion efter n at $f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
21. Kvadrér første ligning, og isolér $x^2 + y^2$ i den sidste ligning.
22. Indsæt først $x = 1$ og derefter $y = 1$.
23. Udnyt at $k^3 = \frac{1}{4}\left((k+1)^2 k^2 - k^2(k-1)^2\right)$.
24. Læg de tre ligninger sammen.
25. Da du kender xyz, er idéen at omskrive så du får en vurdering på formen $(xyz)^n$.
26. Find værdier af x_1 og x_2 så tallene $1, 2, \ldots, n$ må ligge i følgen.
27. Faktorisér alt pånær konstantleddet $\frac{5}{2}$, og vurdér derefter højresiden.
28. Indsæt $x = 1$, $x = 0$, $x = f(1)$ og $x = f(0)$.
29. Substituér x og y med henholdsvis $\frac{1}{x}$ og $\frac{1}{y}$.
30. Sæt uden tab af generalitet $|PB| = 1$, kald $|AB|$ for x, og opstil en ligning som x opfylder.
31. Vis at $x \leq y \leq z \leq x$.
32. Sæt $y_n = \frac{1}{x_n}$, og vis at $y_1, y_2, \ldots$ er en differensrække.
33. Udnyt at $(x+y)^2 = x + y$.
34. Vurdér først venstresiden ved QA-uligheden.
35. Læg ligningerne sammen, og udnyt resultatet sammen med de oprindelige ligninger.
36. Vis at $f(n) \leq n$.
37. Kald højden for y og bredden for x, og opstil en ligning som forholdet $\frac{y}{x}$ opfylder.
38. Kvadrér, og brug Cauchy-Schwartz.
39. Vis at f er injektiv.
40. Træk $\sqrt{c}$ fra på begge sider, og gør noget smart.
41. Tilføj flere led så du får en teleskopsum.

3 Løsninger

Opgave 1.1.1. Ligningen løses ved at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2-6x+8=0 &\iff (x-3)^2-9+8=0 \\ &\iff (x-3)^2=1 \\ &\iff x-3=\pm 1 \\ &\iff x=2 \vee x=4. \end{aligned}$$

Dermed har ligningen præcis to løsninger $x=2$ og $x=4$.

Opgave 1.1.2. Ligningen løses ved at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} 5x^2-6x+1=0 &\iff 25x^2-30x+5=0 \\ &\iff (5x-3)^2=4 \\ &\iff x=\frac{3\pm 2}{5} \\ &\iff x=\frac{1}{5} \vee x=1. \end{aligned}$$

Dermed har ligningen præcis to løsninger $x=\frac{1}{5}$ og $x=1$.

Opgave 1.1.3. Ligningen løses ved at omskrive til kvadrat og bruge nulreglen:

$$a^2-a+\frac{1}{4}=0 \iff \left(a-\frac{1}{2}\right)^2=0 \iff a=\frac{1}{2}.$$

Dermed har ligningen præcis en løsning $a=\frac{1}{2}$.

Opgave 1.1.4. Ligningen løses ved at omskrive til kvadrat:

$$3x^2+4x+2=0 \iff 9x^2+12x+6=0 \iff (3x+2)^2=-2.$$

Dermed har ligningen ingen løsninger.

Opgave 1.1.5. Uligheden løses ved at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2+2x>3 &\iff (x+1)^2>4 \\ &\iff x+1<-2 \vee 2<x+1 \\ &\iff x<-3 \vee 1<x. \end{aligned}$$

Dermed er de x der opfylder uligheden, netop $x<-3$ eller $1<x$.

Opgave 1.1.6. Uligheden løses ved at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} 3y^2+7y+2\le 0 &\iff 9y^3+21y+6\le 0 \\ &\iff \left(3y+\frac{7}{2}\right)^2 \le -6+\frac{49}{4}=\frac{25}{4} \\ &\iff -\frac{5}{2}\le 3y+\frac{7}{2}\le\frac{5}{2} \\ &\iff -2\le y\le -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dermed er de y der opfylder uligheden, netop $-2\le y\le -\frac{1}{3}$.

Opgave 1.1.7. Uligheden bevises ved at omskrive til kvadrat:

$$a^2+1\ge 2a \iff (a-1)^2\ge 0.$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, er uligheden sand for alle reelle tal a.

Opgave 1.1.8. Bemærk at x er positiv, og vi derfor kan gange med x på begge sider af ulighedstegnet. Uligheden bevises derefter ved at omskrive til kvadrat:

$$x+\frac{1}{x}\ge 2 \iff x^2-2x+1\ge 0 \iff (x-1)^2\ge 0.$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, er uligheden sand for alle positive reelle tal x.

Opgave 1.1.9. Uligheden bevises ved at omskrive til kvadrat:

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab} \iff (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\ge 2\sqrt{a}\sqrt{b} \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0.$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, er uligheden sand for alle positive reelle tal a og b.

Opgave 1.1.10. Antag at $x+y=1$, og at x og y begge er positive. Ved at udnytte at $(x+y)^2=x+y$ fordi $x+y=1$, fås:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y+x}{xy}\geq 4\\
&\Leftrightarrow \quad x+y\geq 4xy\\
&\Leftrightarrow \quad (x+y)^2\geq 4xy\\
&\Leftrightarrow \quad (x-y)^2\geq 0.
\end{aligned}
$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, er uligheden sand for alle positive reelle tal x og y med sum 1.

Opgave 1.1.11. Uligheden bevises ved at omskrive til en sum af kvadrater:

$$
\begin{aligned}
&x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \quad \Leftrightarrow\\
&(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)\geq 2xy+2yz+2zx \quad \Leftrightarrow\\
&(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0.
\end{aligned}
$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, og summen af flere kvadrater dermed heller ikke er negativ, er uligheden sand for alle reelle tal x, y og z.

Opgave 1.1.12. Uligheden bevises ved at omskrive til en sum af to kvadrater:

$$
\begin{aligned}
8x^2+2y^2+y+\frac{5}{8}\geq 4x \quad &\Leftrightarrow \quad 16x^2-8x+1+4y^2+2y+\frac{1}{4}\geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad (4x-1)^2+\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0.
\end{aligned}
$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, og summen af to kvadrater dermed heller ikke er negativ, er uligheden sand for alle positive reelle tal x og y.

Opgave 1.1.13. Faktorisering:

$$9x^2-3x+\frac{1}{4}=\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Opgave 1.1.14. Faktorisering:

$$2n^2+8m^2+8nm=2(n+2m)^2.$$

Opgave 1.1.15. Faktorisering:

$$9a^2-b^2+6a+2b=(3a+b)(3a-b)+2(3a+b)=(3a+b)(3a-b+2).$$

Opgave 1.1.16. Faktorisering:

$$a^2-b^2+6a+9=(a+3)^2-b^2=(a+b+3)(a-b+3).$$

Opgave 1.1.17. Faktorisering:

$$
\begin{aligned}
a^2+2b^2+3ab+b-1&=(a+b)^2-1+b^2+ab+b\\
&=(a+b+1)(a+b-1)+b(a+b+1)\\
&=(a+b+1)(a+2b-1).
\end{aligned}
$$

Opgave 1.1.18. Faktorisering:

$$n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

Opgave 1.2.1. Betragt andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, med diskriminant $d=b^2-4ac$. Vi omskriver først ligningen:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4a^2x^2+4abx+4ac=0\\
&\Leftrightarrow \quad (2ax+b)^2=b^2-4ac=d.
\end{aligned}
$$

Dette er tilladt da $a\neq 0$. Nu inddeler vi i tre tilfælde:

Hvis $d>0$, er $2ax+b=\pm\sqrt{d}$, dvs. der er to løsninger $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$.

Hvis $d=0$, er $2ax+b=0$, dvs. der er ´n løsning $x=\dfrac{-b}{2a}$.

Hvis $d<0$, er der ingen løsninger da et kvadrat aldrig er negativt. Dette viser sætningen.

Opgave 1.2.2. Ligningen omskrives ved at gætte løsningerne $x=2$ og $x=4$:

$$x^2-6x+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-4)=0.$$

Opgave 1.2.3. Ligningen omskrives ved at gætte løsningerne $x = -5$ og $x = 1$:

$$2x^2 + 8x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x^2 + 4x - 5x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+5)(x-1) = 0.$$

Opgave 1.2.4. Ligningen omskrives ved først at sætte -4 uden for en parentes og derefter gætte løsningerne $x = -1$ og $x = 7$.

$$-4x^2 + 24x + 28 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4(x^2 - 6x - 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4(x-7)(x+1) = 0.$$

Opgave 1.2.5. Ligningen er en skjult andengradsligning i x^2. Vi omskriver og gætter løsninger:

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2)^2 - 8x^2 + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^2 - 1)(x^2 - 7) = 0. \end{aligned}$$

Samtlige løsninger er altså $x = \pm 1$ og $x = \pm\sqrt{7}$.

Opgave 1.2.6. Ligningen er en skjult andengradsligning i u^5. Vi omskriver til kvadrat:

$$\begin{aligned} u^{10} + 1 = 2u^5 \quad &\Leftrightarrow \quad (u^5)^2 - 2u^5 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (u^5 - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u^5 = 1. \end{aligned}$$

Eneste løsning er derfor $u = 1$.

Opgave 1.2.7. Ligningen er en skjult andengradsligning i $\sqrt{x}$. Vi omskriver og gætter løsninger:

$$\begin{aligned} x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2 - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 2) = 0. \end{aligned}$$

Samtlige løsninger er altså $x = 2^2 = 4$ og $x = 3^2 = 9$.

Opgave 1.2.8. Ligningen er en skjult andengradsligning i a^4. Vi omskriver og gætter løsninger:

$$\begin{aligned} a^4 = 15 + \frac{16}{a^4} \quad &\Leftrightarrow \quad (a^4)^2 - 15a^4 - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a^4 - 16)(a^4 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Da a^4 ikke kan være negativ, er samtlige løsninger $a = \pm 2$.

Opgave 1.2.9. Ligningen er en skjult andengradsligning i 2^x. Vi omskriver til kvadrat:

$$\begin{aligned} 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2^x - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Altså er $2^x = 1$, og derfor er eneste løsning $x = 0$.

Opgave 1.2.10. Kald højden på et A4-ark for y og bredden for x. Da bliver højden på et A5-ark x og bredden $\frac{y}{2}$. Da et A4-ark og et A5-ark er ligedannede, er forholdet mellem højde og bredde det samme:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\frac{y}{2}} = 2 \cdot \frac{x}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2.$$

Da x og y begge er positive, er forholdet mellem højde og bredde $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$.

Opgave 1.2.11. Lad P være et punkt på linjestykket AB så $\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|PB|}$. Sæt $|BP| = 1$ og $|AP| = x$. Da svarer betingelsen til

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Da linjestykkerne har positiv længde, er $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dette svarer netop til forholdet $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{x}{1} = x$.

Opgave 1.3.1. Ved at bruge lige store koefficienters metode fås

$$(3x + 4y) - 2(5x + 2y) = -5 - 2 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad -7x = -7 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Nu findes y ved at indsætte $x = 1$ i første ligning:

$$5 \cdot 1 + 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = -4 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2.$$

Dermed er den eneste mulige løsning $x = 1$ og $y = -2$, og ved indsættelse ses at dette faktisk er en løsning.

Opgave 1.3.2. Ved at bruge lige store koefficienters metode fås

$$(3x+2y-5z)-3(x+4y-10z)=5-3\cdot 0,$$
$$(2x+y+7z)-2(x+4y-10z)=-6-2\cdot 0,$$

som reduceres til

$$-2y+5z=1,$$
$$-7y+27z=-6.$$

Ved endnu engang at bruge lige store koefficienters metode fås

$$7(-2y+5z)-2(-7y+27z)=7\cdot 1-2\cdot(-6) \quad\Leftrightarrow\quad -19z=19 \quad\Leftrightarrow\quad z=-1.$$

Ved indsættelse ses at når $z=-1$, er $y=-3$ og $x=2$. Dette er eneste løsning.

Opgave 1.3.3. Ved at dividere nederste ligning med 2 og trække de to ligninger fra hinanden fås

$$(y+2x)-(y-x)=(x^2-10)-(-10) \quad\Leftrightarrow\quad 3x=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0=x(x-3)$$

dvs. $x=0$ eller $x=3$. Hvis $x=0$, er $y=-10$, og hvis $x=3$, er $y=-7$. Samtlige mulige løsninger er derfor $(x,y)=(0,-10)$ og $(x,y)=(3,-7)$, og ved indsættelse ses at de faktisk er løsninger.

Opgave 1.3.4. Ved at gange den nederste ligning med 3 og lægge de to ligninger sammen fås

$$\frac{11}{x}=22 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}.$$

Ved indsættelse ses at $y=\frac{1}{3}$. Eneste mulige løsning er altså $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, og ved indsættelse ses at den faktisk løser ligningssystemet.

Opgave 1.3.5. Af sidste ligning ses at $y=0$ ikke er en løsning. Antag derfor at $y\neq 0$, og omskriv til

$$\frac{12y}{x^2+y}+y^2=4y,$$
$$\frac{12y}{x^2+y}+8y=20.$$

Ved at trække de to ligninger fra hinanden og omskrive fås $y^2-12y+20=0$ og altså $(y-2)(y-10)=0$. Dermed er $y=2$ eller $y=10$. Hvis $y=2$, er $\frac{12}{x^2+2}+2=4$, dvs. $\frac{12}{2}=x^2+2$, og altså $x=\pm 2$. Hvis $y=10$, er $\frac{12}{x^2+10}+10=4$, og altså $\frac{12}{x^2+10}=-6$ hvilket er umuligt. Eneste mulige løsninger er derfor $(x,y)=(\pm 2,2)$, og ved indsættelse tjekkes at de begge løser ligningssystemet.

Opgave 1.3.6. Hvis $x=0$, er anden ligning opfyldt for alle y, hvor $y\neq 0$. Første ligning giver i dette tilfælde $y=1$. Dermed er $(x,y)=(0,1)$ eneste løsning hvor $x=0$. Antag derfor at $x\neq 0$, og divider anden ligning med x. Kvadrer desuden første ligning:

$$x^2+y^2+2xy=1,$$
$$\frac{1}{x^2+y^2}=2.$$

Af den nederste ligning fås at $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. Dette indsættes i den øverste ligning, og vi får $\frac{1}{2}+2xy=1$, og altså $xy=\frac{1}{4}$. Da vi yderligere ved at $x+y=1$, giver dette $x(1-x)=\frac{1}{4}$. Dermed er $x^2-x+\frac{1}{4}=0$, og altså $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$. I dette tilfælde er $x=y=\frac{1}{2}$, og ved indsættelse ses at dette er en løsning. Samtlige løsninger er dermed $(x,y)=(0,1)$ og $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Opgave 1.3.7. Bemærk først at ingen af de tre ubekendte kan være 0. Ved at udtrykke x ved y i første ligning, z ved y i anden ligning og derefter indsætte dette i sidste ligning fås

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{3}{y}=12 \quad\Leftrightarrow\quad y^2=\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\frac{1}{2}.$$

Eneste mulige løsninger er derfor $(x,y,z)=(6,\frac{1}{2},2)$ og $(x,y,z)=(-6,-\frac{1}{2},-2)$, og ved at indsætte i ligningssystemet ses at de begge er løsninger.

Opgave 1.3.8. Ved at lægge alle tre ligninger sammen og udnytte at $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ fås

$$x+y+z=3{,}3.$$

Ved at trække de oprindelige ligninger fra fås

$$\lfloor z \rfloor + \{y\} = 2{,}2$$
$$\lfloor y \rfloor + \{x\} = 1{,}1$$
$$\lfloor x \rfloor + \{z\} = 0.$$

Da $0 \leq \{u\} < 1$ og $\lfloor u \rfloor$ altid er et helt tal, er $x = 0{,}1$, $y = 1{,}2$ og $z = 2$ eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at det faktisk er en løsning til ligningssystemet.

Opgave 1.4.1. At differens, produkt og kvotient af to rationale tal igen er rationale tal, følger direkte af brøkregneregler.

Opgave 1.4.2. At differensen, produktet og kvotienten af et rationalt tal $\frac{a}{b}$ og et irrationalt tal x er et irrationalt tal, ses ved at antage det modsatte og se at det medfører at x er rational. (Bemærk at vi mht. produkt og kvotient skal antage at $a \neq 0$ da vi i beviset gerne vil dividere med a).

At differensen, produktet og kvotienten af to irrationale tal både kan være rational og irrational ses af følgende eksempler:

Differens:

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \quad \text{og} \quad \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Produkt:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4 \quad \text{og} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

Kvotient:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2 \quad \text{og} \quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

Her udnytter vi sætning 1.4.3, der giver at $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{3}$ og $\sqrt{6}$ er irrationale tal.

Opgave 1.4.3. Det er oplagt at hvis n er en m'te potens af et positivt helt tal, da er $\sqrt[m]{n}$ et helt tal og altså rational. Antag at n ikke er en m'te potens af et positivt heltal. Vi viser indirekte at $\sqrt[m]{n}$ er irrational ved at antage det modsatte og nå frem til en modstrid. Antag derfor at $\sqrt[m]{n} = \frac{a}{b}$ hvor a og b er hele tal. Dermed er

$$b^m n = a^m$$

Betragt nu primfaktoropløsningen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Fordi n ikke er en m'te potens af et positivt heltal, er mindst en af eksponenterne, lad os sige α_i, ikke et multiplum af m da m'te potenser netop er de hele tal hvor alle eksponenterne i primfaktoropløsningen er multipla af m. Eksponenten til p_i på venstresiden $b^m n$ er derfor ikke et multiplum af m da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af b^m er multipla af m. Eksponenten til p_i på højresiden a^m er derimod et multiplum af m. Dette er en modstrid da primfaktoropløsning er entydig, og dermed er $\sqrt[m]{n}$ irrational.

Opgave 1.4.4. Lad a og b være to forskellige reelle tal, og antag uden tab af generalitet at $a < b$. Vi ved allerede at der ligger et rationalt tal q_1 mellem a og b. Der ligger yderligere et rationalt tal q_2 mellem q_1 og b. Sådan kan vi fortsætte og få uendeligt mange rationale tal $q_1, q_2, \ldots$ mellem a og b.

Nu viser vi at der findes uendeligt mange irrationale tal mellem a og b. Lad c og d være to forskellige rationale tal mellem a og b med $c < d$. Lad yderligere n være et helt tal så $\frac{1}{n} < d - c$. Da følger det at $x_1 = c + \frac{\sqrt{2}}{2n}$ ligger mellem c og d, og desuden må x være irrational ifølge sætning 1.4.2 og sætning 1.4.3. Nu har vi vist at der mellem to vilkårlige forskellige reelle tal findes et irrationalt tal x_1. Dermed findes der igen et irrationalt tal x_2 mellem x_1 og b. Sådan kan vi fortsætte og få uendeligt mange irrationale tal $x_1, x_2, \ldots$ mellem a og b.

Opgave 1.4.5. Lad a og b være rationale tal. Antag at $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ er rational. Hvis $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$, er $a = b = 0$, og dermed er a og b begge rationale. Antag derfor at a og b ikke begge er 0. Da er

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

også rational fordi kvotienten mellem to rationale tal er rational. Dermed er $\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}$ rational, og også $\sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a}$ rational. Helt tilsvarende hvis $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ er rational.

Opgave 1.4.6. Vi beviser at tallet $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rationalt netop hvis mn er et kvadrattal. Antag at $nm = a^2$ hvor a er et ikke-negativt helt tal. Da er $\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{a^2}{n^2}} = \frac{a}{n}$, hvilket viser at $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rational. Antag at $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rational, dvs. $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{c}{d}$ hvor c og d er to ikke-negative heltal, og $d \neq 0$. Da er $d^2nm = c^2n^2$, hvilket betyder at nm er et kvadrattal.

Opgave 1.4.7. Omskriv ligningen til $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2014} - \sqrt{c}$, og kvadrer:

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 2014 + c - 2\sqrt{2014c}$$

Dette viser at $\sqrt{ab} + \sqrt{2014c}$ er rational, og dermed fra opgave 1.4.5 at $\sqrt{ab}$ og $\sqrt{2014c}$ begge er rationale. Da ab og $2014c$ er hele tal, ved vi fra sætning 1.4.3 at de begge er kvadrattal. Tallet $2014c = 2 \cdot 19 \cdot 53 \cdot c$ er et kvadrattal netop når $c = 2014 \cdot n^2$ hvor n er et ikke-negativt helt tal. Tilsvarende ses at $a = 2014 \cdot l^2$ og $b = 2014 \cdot m^2$, hvor l og m er ikke-negative hele tal, da der er symmetri mht. a, b og c. Den oprindelige ligning kan altså reduceres til $l + m + n = 1$, og samtlige løsninger er derfor $(a, b, c) = (2014, 0, 0)$, $(a, b, c) = (0, 2014, 0)$ og $(a, b, c) = (0, 0, 2014)$.

Opgave 1.5.1.

a) $$\sum_{n=1}^{200} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 200^2.$$

b) $$\sum_{n=0}^{20} (6 + 3n) = 6 + 9 + 12 + \cdots + 66.$$

c) $$\sum_{k=5}^{105} \frac{k+1}{k} = \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \frac{8}{7} + \cdots + \frac{106}{105}.$$

d) $$\sum_{a=10}^{199} \frac{1}{5a(5a+5)} = \frac{1}{50 \cdot 55} + \frac{1}{55 \cdot 60} + \frac{1}{60 \cdot 65} + \cdots + \frac{1}{995 \cdot 1000}.$$

Opgave 1.5.2.

a) $$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{400} = \sum_{i=0}^{400} 2^i.$$

b) $$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{101 \cdot 104} = \sum_{i=2}^{101} \frac{1}{i \cdot (i+3)}.$$

c) $$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4999} + \sqrt{5001}} = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{2i-1} + \sqrt{2i+1}}.$$

Opgave 1.5.3. Summen af de første n led i differensrækken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med differens d er

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) \\
&= na_1 + d(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\
&= na_1 + d\frac{(n-1)n}{2}.
\end{aligned}$$

Summen af de 333 første led i differensrækken $2, 5, 8, \ldots$ er dermed

$$333 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{332 \cdot 333}{2} = 333 \cdot 2 + 333 \cdot 3 \cdot 166 = 333 \cdot 500 = 166500.$$

Opgave 1.5.4. Summen af de første n led i kvotientrækken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med kvotient q er

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) \\
&= a_1 \frac{(q-1)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})}{q-1} \\
&= a_1 \frac{(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})}{q-1} \\
&= a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}.
\end{aligned}$$

Summen af de 11 første led i kvotientrækken $1, 2, 4, 8, \ldots$ er ifølge formlen lig med

$$1 \cdot \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

Opgave 1.5.5.

$$\sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{1000}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1000}{2002}=\frac{250}{1001}.$$

$$\sum_{a=10}^{199}\frac{1}{5a(5a+5)}=\frac{1}{5}\sum_{a=10}^{199}\left(\frac{1}{5a}-\frac{1}{5a+5}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{19}{1000}=\frac{19}{5000}.$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{302}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{150}{302}=\frac{25}{151}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{1000}\frac{3}{n^2+3n+2}&=3\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{(n+2)(n+1)}=3\sum_{n=1}^{1000}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1002}\right)=3\cdot\frac{500}{1002}=\frac{250}{167}.\end{aligned}$$

Opgave 1.5.6.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i\cdot a_{i+1}}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_1+(i-1)\cdot d)\cdot(a_1+i\cdot d)}\\&=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_1+(i-1)\cdot d}-\frac{1}{a_1+i\cdot d}\right)\\&=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+n\cdot d}\right)\\&=\frac{1}{d}\left(\frac{n\cdot d}{a_1(a_1+n\cdot d)}\right)\\&=\frac{n}{a_1(a_1+n\cdot d)}.\end{aligned}$$

Opgave 1.5.7.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{132}\frac{1}{\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k+4}}&=\sum_{k=1}^{132}\frac{\sqrt{3k+4}-\sqrt{3k+1}}{(3k+4)-(3k+1)}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{132}\left(\sqrt{3k+4}-\sqrt{3k+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3\cdot 132+4}-\sqrt{3\cdot 1+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\sqrt{400}-\sqrt{4}\right)=6.\end{aligned}$$

Opgave 1.5.8.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5000}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}&=\sum_{k=1}^{5000}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(2k+1)-(2k-1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5000}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{10001}-\sqrt{1}\right)\\&>\frac{1}{2}(100-1)>49.\end{aligned}$$

Opgave 1.5.9. For at vi kan omskrive summen til en teleskopsum, bliver vi nødt til at tilføje alle de led vi mangler. Den sum vi skal vurdere størrelse af, er

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{16}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{431}+\sqrt{436}}.$$

Hvis vi tilføjer summen

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{21}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{436}+\sqrt{441}},$$

kan vi omskrive til en teleskopsum. I den sum vi tilføjer, er hvert led mindre end det tilsvarende i den oprindelige, dvs. den sum vi får bliver mindre end det dobbelte af den oprindelige:

$$\sum_{k=0}^{43}\frac{1}{\sqrt{10k+1}+\sqrt{10k+6}} > \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{87}\frac{1}{\sqrt{5k+1}+\sqrt{5k+6}}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{87}\frac{\sqrt{5k+6}-\sqrt{5k+1}}{(5k+6)-(5k+1)}$$
$$= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{87}\left(\sqrt{5k+6}-\sqrt{5k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{10}\left(\sqrt{441}-\sqrt{1}\right)$$
$$= \frac{1}{10}(21-1)=2$$

Opgave 1.5.10. Vi omskriver til teleskopsum:

$$\sum_{n=1}^{100} n!\cdot n = \sum_{n=1}^{100} n!((n+1)-1)$$
$$= \sum_{n=1}^{100}((n+1)!-n!)$$
$$= 101!-1.$$

Opgave 1.5.11. Vi omskriver til teleskopsum:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Opgave 1.5.12. Vi omskriver til teleskopsum:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left((k+1)^2k^2-k^2(k-1)^2\right)$$
$$= \frac{(n+1)^2n^2}{4}.$$

Opgave 1.5.13. Vi omskriver til teleskopsum. Der gælder at

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k-1)}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{\sqrt{k(k-1)}}-\frac{\sqrt{(k+1)(k-1)}}{\sqrt{k(k-1)}}\right)$$
$$= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k-1}}-\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$$
$$< \sqrt{2}$$

for alle hele tal $n \geq 2$.

Opgave 1.6.1. Vi omskriver rekursionsbetingelsen til $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$, og sætter $b_n = a_n+1$. Da er $b_{n+1}=b_n^2$, dvs. at $b_{1001}=b_1^{2^{1000}}$. Ud fra dette ses at

$$a_{1001} = b_{1001}-1 = (a_1+1)^{2^{1000}}-1 \geq -1,$$

og at a_{1001} kan være et vilkårligt reelt tal $\alpha \geq -1$, da

$$a_1 = \sqrt[2^{1000}]{\alpha+1}-1$$

giver $a_{1001}=\alpha$.

Opgave 1.6.2. Konstruer en ny følge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ved at sætte $b_n = \frac{1}{a_n}$. Da er $b_1 = 1$ og

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = 2019+\frac{1}{a_n} = 2019+b_n.$$

Dermed ses rekursivt at $b_{n+1} = 1 + n \cdot 2019$. Nu er

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_{2019} b_{2020}} \\ &= \frac{1}{1 \cdot (1+2019)} + \frac{1}{(1+2019)(1+2 \cdot 2019)} + \cdots + \frac{1}{(1+2018 \cdot 2019)(1+2019 \cdot 2019)}. \end{aligned}$$

Da

$$\frac{1}{(1+k \cdot 2019)(1+(k+1) \cdot 2019)} = \frac{1}{2019}\left(\frac{1}{1+k \cdot 2019} - \frac{1}{1+(k+1) \cdot 2019}\right),$$

teleskoperer S til

$$S = \frac{1}{2019}\left(1 - \frac{1}{1+2019^2}\right).$$

Opgave 1.6.3. Med udgangspunkt i relationen $b_n = \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) b_{n-1}$ dividerer vi med $b_n b_{n-1}$ på begge sider. Det giver

$$\frac{1}{b_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n b_n}$$

hvilket kan omskrives til $\frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n-1}}$. Det ses altså at vi har en teleskopsum, og derfor at

$$S = \frac{1}{a_1 b_1} + \frac{1}{a_2 b_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2019} b_{2019}} = \frac{1}{b_{2019}} - \frac{1}{b_0}.$$

Da brøker og summer af rationale tal igen er rationale tal, ses at hvis b_0 og b_{2019} begge er rationale tal, så er S også et rationalt tal. Altså kan b_0 og b_{2019} ikke begge være rationale tal.

Opgave 1.6.4. Konstruer en ny følge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ved at sætte

$$k_n = \frac{a_{n+1}}{n} = \frac{1}{n}\left(n\left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + n\right) = \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + 1.$$

Da er

$$k_{n+1} = \left\lfloor \frac{a_{n+1}}{n+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n k_n}{n+1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{n+1} k_n \right\rfloor + 1 \le k_n - 1 + 1 = k_n,$$

da k_n er et helt tal. Følgen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ af positive hele tal er derfor aftagende og begrænset nedadtil, og derfor må den være konstant fra et vist trin, dvs. der findes et helt tal N og et helt positivt tal k så $k_i = k$ for alle $i \ge N$. For $j \ge N$ gælder dermed

$$a_{j+1} - a_j = jk - (j-1)k = k.$$

Hvis vi sætter $b_i = a_{N+i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, er $b_1, b_2, b_3, \ldots$ altså en differenrække.

Opgave 1.6.5. Bemærk først at

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-2} x_{n-1}} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}.$$

Sæt nu $y_n = \frac{1}{x_n}$. Da er $y_n - y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$, dvs. at $y_1, y_2, \ldots$ er en differensrække.

a) Hvis differensen er forskellig fra nul, ligger der kun et endeligt antal y_i'er i intervallet $[-1; 1]$, og der kan derfor kun være et endeligt antal x_i'er som er hele tal. Hvis der skal være uendeligt mange x_i'er som er hele tal, må differensen derfor være 0, og det sker netop når $x_1 = x_2$. I dette tilfælde er følgen konstant. De eneste muligheder for x_1 og x_2 er derfor $x_1 = x_2 = n$, hvor $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Vælg $x_1 = n$ og $x_2 = \dfrac{n!}{(n-1)!+1}$. Da er $y_1 = \dfrac{1}{n}$, og $y_1, y_2, \ldots$ er en differensrække med differens

$$d = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{(n-1)!+1}{n!} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

Da differensen $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$ er et multiplum af d for $k = 1, 2, \ldots, n-1$, må alle de hele tal $1, 2, 3, \ldots, n$ ligge i følgen.

Opgave 1.7.1. Da

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+2}} + \sqrt{x+7}$$

er en voksende funktion, er der maksimalt én løsning til ligningen

$$5 = \sqrt{x + \sqrt{x+2}} + \sqrt{x+7}.$$

Det ses let at $x=2$ løser ligningen, og det er dermed også eneste løsning.

Opgave 1.7.2. Vi omskriver til en andengradsligning:

$$\begin{aligned} 3^{2+x}+3^{2-x} &= 82 \\ 9\cdot 3^x+\frac{9}{3^x} &= 82 \\ 9\cdot(3^x)^2-82\cdot 3^x+9 &= 0 \\ (9\cdot 3^x-1)(3^x-9) &= 0 \end{aligned}$$

Ifølge nulreglen betyder det at

$$3^x=\frac{1}{9} \quad\vee\quad 3^x=9.$$

Da 3^x er en voksende funktion, er de eneste løsninger $x=\pm 2$.

Opgave 1.7.3. Ligningen

$$8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0.$$

indeholder udtrykkene 4^x+4^{-x} og 2^x+2^{-x}. For at omskrive ligningen laver vi en omskrivning til kvadrat

$$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2.$$

Ligningen kan nu skrives som

$$8(2^x+2^{-x})^2-54(2^x+2^{-x})+85=0.$$

Dette er en andengradsligning i 2^x+2^{-x}, og dermed er

$$2^x+2^{-x}=\frac{54\pm\sqrt{54^2-4\cdot 8\cdot 85}}{2\cdot 8}=\frac{27\pm 7}{8}.$$

Hvis

$$2^x+2^{-x}=\frac{17}{4},$$

får vi en andengradsligning

$$(2^x)^2-\frac{17}{4}\cdot 2^x+1=0$$

i 2^x, dvs. $2^x=4$ eller $2^x=\frac{1}{4}$.

Hvis

$$2^x+2^{-x}=\frac{5}{2},$$

får vi på samme måde at $2^x=2$ eller $2^x=\frac{1}{2}$.

Da 2^x er en voksende funktion, er der højst en løsning for hver af de fire ligninger. Disse er $x=\pm 1, \pm 2$, og de er også løsninger til den oprindelige ligning.

Opgave 1.7.4. Bemærk først at x, y og z ikke kan være negative, og at hvis en af de ubekendte er 0, så er de andre to også, og dette er en løsning. Antag derfor at x, y og z er positive reelle tal. Vi bemærker nu at

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}\le x$$

med lighedstegn netop når $x=\frac{1}{2}$, da uligheden kan omskrives til $0\le(2x-1)^2$. Her har vi brugt at x er positiv, da vi har divideret med x på begge sider af ulighedstegnet. Dermed er

$$x=\frac{4z^2}{1+4z^2}\le z=\frac{4y^2}{1+4y^2}\le y=\frac{4x^2}{4x^2+1}\le x,$$

dvs. at $x=y=z=\frac{1}{2}$. Samlet ses at $x=y=z=0$ og $x=y=z=\frac{1}{2}$ er de eneste løsninger.

Opgave 1.7.5. Lad x, y, z være tre ikke-negative tal som opfylder ligningssystemet

$$x^2-y=(z-1)^2,\quad y^2-z=(x-1)^2,\quad z^2-x=(y-1)^2.$$

Ved at lægge ligningerne sammen og reducere ses at $x+y+z=3$. Vi har derfor enten $x=y=z=1$, som faktisk er en løsning, eller også at mindst en af de tre variable er mindre end 1. Antag uden tab af generalitet at $0\le x<1$. Dermed er

$$1>x^2=(z-1)^2+y\ge y\ge 0.$$

Det medfører yderligere at

$$1>y^2=(x-1)^2+z\ge z.$$

Nu er $x+y+z<1+1+1=3$, hvilket er en modstrid. Altså er eneste løsning $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Opgave 1.7.6. Ligningssystemet kan omskrives til

$$y+1=x(x+1),\qquad z+1=y(y+1),\qquad x+1=z(z+1).$$

Ved multiplikation af de tre ligninger fås

$$xyz(x+1)(y+1)(z+1)=(x+1)(y+1)(z+1).$$

Enten er $xyz=1$, $x=-1$, $y=-1$ eller $z=-1$.

Antag først at $xyz=1$, og at $x\neq-1$, $y\neq-1$ og $z\neq-1$. Enten er $x=y=z=1$, eller også er den numeriske værdi af enten x, y eller z større end 1. Antag uden tab af generalitet at x har numerisk værdi er større end 1.

Hvis $x>1$, er $y=x^2+x-1>x>1$, og af symmetrigrunde også $z>y$ og $x>z$ hvilket er umuligt.

Hvis $x<-1$, er

$$x=z^2+z-1=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\geq-\frac{5}{4}.$$

Da både x og $x+1$ er negative, og $x\geq-\frac{5}{4}$, må

$$x(x+1)\leq-\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{5}{4}+1\right)=\frac{1}{16}<1.$$

Dermed er $y=x(x+1)-1<0$ og tilsvarende $z=y(y+1)-1<0$, hvilket er umuligt da $xyz=1$.

Antag nu at $x=-1$. Da er også $y=x^2+x-1=-1$ og $z=y^2+y-1=-1$. Det samme sker hvis $y=-1$ eller $z=-1$.

Løsningerne er derfor $(1,1,1)$ og $(-1,-1,-1)$.

Opgave 1.7.7. Da vi skal bestemme antallet af løsninger til

$$0=x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+\frac{5}{2}$$

er det en god idé at få bedre overblik over hvornår højresiden er positiv, og hvornår den er negativ. Det er ofte nemmere at overskue når vi har faktoriseret så meget som vi kan:

$$\begin{aligned}0&=x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+\frac{5}{2}\\&=x(x-1)(x^6+2x^4+3x^2+4)+\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

For $x\leq0$ og $x\geq1$ fremgår det af omskrivningen at højresiden er positiv. For $0<x<1$ er

$$0>x(x-1)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geq-\frac{1}{4},$$

og

$$x^6+2x^4+3x^2+4<1+2+3+4=10.$$

Samlet giver dette at

$$x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+\frac{5}{2}>-\frac{1}{4}\cdot10+\frac{5}{2}=0,$$

dvs. at ligningen ikke har nogen reelle løsninger.

Opgave 1.7.8. Først eliminerer vi x og z så vi får en ligning i y og k. Da $x+\frac{1}{y}=k$, er $\frac{1}{x}=\frac{y}{ky-1}$, og da $y+\frac{1}{z}=k$, er $z=\frac{1}{k-y}$ Bemærk at $ky-1\neq0$ og $k-y\neq0$. Ved at udnytte dette omformes ligningen $z+\frac{1}{x}=k$ til

$$\frac{1}{k-y}+\frac{y}{ky-1}=k.$$

Yderligere omskrivninger giver

$$ky-1+y(k-y)=k(k-y)(ky-1).$$

Hvis $k^2\neq1$, får vi en andengradsligning i y

$$y^2\left(1-k^2\right)+y\left(k^3-k\right)+1-k^2=0.$$

Af symmetrigrunde skal x og z opfylde præcis den samme andengradsligning, og dermed må mindst to af x, y og z være ens, men dette giver ifølge den oprindelige ligning at alle tre er ens. Altså er $k = \pm 1$. Begge disse værdier af k er mulige: For $x = 2$, $y = -1$ og $z = \frac{1}{2}$ er $k = 1$. Ved at ændre fortegn ser man at $k = -1$ også er mulig.

Opgave 1.8.1. For $y = -1$ er

$$f(x-1) = -f(x) + f(x) = 0$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Altså er $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x) = 0$ er en løsning.

Opgave 1.8.2. Når vi indsætter $x = y = 0$ i funktionalligningen, får vi at $f(0)^2 = f(0)$, dvs. at $f(0) = 0$ eller $f(0) = 1$. Når vi indsætter $y = 0$, får vi

$$f(x)f(0) - f(0) = x$$

for alle x, hvilket viser at $f(0) \neq 0$. Samlet er $f(0) = 1$ og $f(x) = x + 1$. Vi har nu vist at hvis der findes en funktion som opfylder betingelsen, kan det kun være $f(x) = x + 1$. Det ses nemt ved indsættelse at denne funktion opfylder den ønskede betingelse.

Opgave 1.8.3. Når vi indsætter $x = 1$, får vi

$$f\big(y + f(y)\big) = 2f(y),$$

og når vi indsætter $y = 1$, får vi

$$f\big(x + f(x)\big) = 2x f(1).$$

Dermed er $f(x) = x f(1)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Altså er samtlige mulige løsninger på formen $f(x) = ax$ for en konstant $a \in \mathbb{R}$. Vi indsætter $f(x) = ax$ i funktionalligningen for at undersøge for hvilke a dette er en løsning. Tallet a skal opfylde at

$$a(xy + axy) = 2xay \quad \Leftrightarrow \quad a^2 xy = axy$$

for alle reelle tal x og y. Altså må $a = 0$ eller $a = 1$. Dermed er der to løsninger, nemlig $f(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 1.8.4. Når vi indsætter $x = 1$ og $x = 0$, får vi

$$f\big(f(1)\big) = 1^2 - 1 + 1 = 1 \quad \text{og} \quad f\big(f(0)\big) = 0^2 - 0 + 1 = 1.$$

Nu kan vi indsætte $x = f(1)$, og det giver

$$f(1)^2 - f(1) + 1 = f\Big(f\big(f(1)\big)\Big) = f(1),$$

og altså $0 = f(1)^2 - 2f(1) + 1 = \big(f(1) - 1\big)^2$, dvs. $f(1) = 1$. Nu kan vi finde $f(0)$ ved at indsætte $x = f(0)$:

$$f(0)^2 - f(0) + 1 = f\Big(f\big(f(0)\big)\Big) = f(1) = 1.$$

Dette giver $0 = f(0)^2 - f(0) = f(0)\big(f(0) - 1\big)$, og altså $f(0) = 0$ eller $f(0) = 1$. Antag at $f(0) = 0$. Da er $1 = f\big(f(0)\big) = 0$ hvilket er en modstrid. Dermed er $f(0) = 1$.

Opgave 1.8.5. Antag at der findes et reelt tal a så $f(a) = -2$. Ved at indsætte $x = a$ fås

$$f(-2) = f\big(f(a)\big) = af(a) + 2a = a(-2) + 2a = 0.$$

Nu indsætter vi $x = -2$ og udnytter at $f(-2) = 0$:

$$f(0) = f\big(f(-2)\big) = -2f(-2) + 2(-2) = -4.$$

Ved at indsætte først $x = 0$

$$f(-4) = f\big(f(0)\big) = 0,$$

og derefter $x = -4$

$$f(0) = f\big(f(-4)\big) = -4f(-4) + 2(-4) = -8,$$

får vi en modstrid, da vi ikke både kan have $f(0) = -4$ og $f(0) = -8$. Dermed findes der ikke et a så $f(a) = -2$.

Opgave 1.9.1. Vi viser ved induktion efter n at $f(n) = n + 1$ for alle positive heltal n. Vi ved at $f(1) = 2$, dvs. induktionsstarten er på plads. Antag at $f(n) = n + 1$. Da er

$$f(n+1) = f\big(f(n)\big) = f(n) + 1 = n + 1 + 1 = n + 2.$$

Det fuldfører induktionen, og vi ved nu at $f(n) = n+1$ er eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 1.9.2. Først viser vi ved induktion efter n at $f(2n) = 2n+2$ for alle positive heltal n. For $n = 1$ er $f(2\cdot 1) = f\big(f(1)\big) = f(1)+2 = 4$, dvs. induktionsstarten er på plads. Antag nu at $f(2n) = 2n+2$. Da er

$$f(2(n+1)) = f(2n+2) = f\big(f(2n)\big) = f(2n)+2 = 2n+2+2 = 2(n+1)+2.$$

Nu har vi fundet de mulige funktionsværdier for alle lige tal n.

For at bestemme funktionsværdierne for de ulige tal pånær 1 viser vi at $f(2n+1) = 2n+3$ for alle positive heltal n ved induktion efter n. For $n = 1$ ved vi at $f(2\cdot 1+1) = f(3) = 5 = 2\cdot 1+3$. Antag at $f(2n+1) = 2n+3$. Da er

$$f(2(n+1)+1) = f(2n+3) = f\big(f(2n+1)\big) = f(2n+1)+2 = 2(n+1)+1+2.$$

Nu har vi også fundet de funktionsværdierne for alle de ulige tal pånær 1. Dermed er den eneste mulige løsning at $f(n) = n+2$ for alle positive heltal $n > 1$ og $f(1) = 2$. Ved indsættelse ses at det er en løsning.

Opgave 1.9.3. Ved at indsætte $x = y = 0$ ses at $f(0)^2 = f(0)$, dvs. at $f(0) = 0$ eller $f(0) = 1$. Hvis $f(0) = 0$, får vi ved at indsætte $y = 0$ at

$$f(x) = f(x-0) = f(x)f(0) = 0$$

for alle x i modstrid med at $f(2011) = 1$. Dermed er $f(0) = 1$. Ved at indsætte $x = y = n$ får vi nu at $f(n)^2 = f(0) = 1$, dvs. $f(n) = \pm 1$. Bemærk at bare fordi vi ved at alle funktionsværdier er ± 1, så ved vi ikke om de alle er den samme værdi. Derfor har vi brug for yderligere undersøgelser. Ved at indsætte $x = 2n$ og $y = n$ ses at $f(2n)f(n) = f(n)$ for alle n, og altså $f(n) = 1$ for alle lige n. Antag at der findes et ulige n så $f(n) = -1$. Da er $f(2011) = f(2011+n)f(n) = -1$, da $2011+n$ er lige, hvilket er en modstrid. Dermed er $f(n) = 1$ for alle n eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 1.9.4. For $x = 2$ og $y = 1$ er $f(3)+f(1) = 12$, for $x = 3$ og $y = 2$ er $f(5)+f(1) = 28$, og for $x = 4$ og $y = 1$ er $f(5)+f(3) = 36$. Ved at løse disse tre ligninger med tre ubekendte fås $f(1) = 2$, $f(3) = 10$ og $f(5) = 26$. På tilsvarende måde kan man ved at indsætte henholdsvis $x = 3$ og $y = 1$, $x = 4$ og $y = 2$ samt $x = 5$ og $y = 1$ bestemme $f(2) = 5$, $f(4) = 17$ og $f(6) = 37$. Vi viser nu ved induktion efter n at $f(n) = n^2+1$ for alle positive heltal n. Vi ved allerede at $f(1) = 2 = 1^2+1$ og $f(2) = 5 = 2^2+1$. Antag at $f(n) = n^2+1$ for alle positive heltal $n \le N$. Da er $f(N+1) = -f(N-1)+2N^2+2\cdot 1^2+2 = (N+1)^2+1$. Dermed er $f(x) = x^2+1$ den eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 1.9.5. Først bemærkes at $f(2) = 2f(1)+1 = 1$, $f(3) = 2f(1) = 0$, $f(4) = 2f(2)+1 = 3$, osv. På denne måde kan man rekursivt finde $f(n)$ for alle naturlige tal n. Der er altså højst en løsning til funktionalligningen.

Lad n være et positivt heltal, og skriv n på formen $n = 2^m + l$, $0 \le l < 2^m$. Vi påstår at $f(n) = 2^{m+1} - n - 1$. Det eftervises let at denne funktion opfylder de tre betingelser, og da vi ved at der højst er én løsning, må dette være den eneste løsning.

Opgave 1.10.1. Først substitueres x med $3-x$:

$$f(x)+2f(3-x) = 3-x$$

Vi kan nu gange den oprindelige ligning med 2 og trække ovenstående fra:

$$2f(3-x)+4f(x)-\big(f(x)+2f(3-x)\big) = 2x-(3-x)$$

hvilket giver $f(x) = x-1$ som eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at den opfylder betingelsen.

Opgave 1.10.2. Substituer først x med $\frac{1}{1-x}$ i den oprindelige ligning. Det giver:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}.$$

Substituer nu x med $\frac{x-1}{x}$ i den oprindelige ligningen. Det giver:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Bemærk at de to ovenstående ligninger sammen med den oprindelige udgør tre ligninger med de tre ubekendte $f(x)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ og $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. For at løse dem trækker vi først de to ovenstående fra hinanden:

$$f(x)-f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x-1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

Lægges denne ligning sammen med den oprindelige fås

$$2f(x)=x+\frac{x-1}{x}-\frac{1}{1-x}=x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x},$$

og altså

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right).$$

Ved indsættelse ses at denne funktion er løsning til ligningen.

Opgave 1.10.3. Af symmetrigrunde er

$$f(x)+y=f(xy)f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=f(y)+x \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}_+.$$

Dermed er $f(x)-x=f(y)-y$ for alle $x,y\in\mathbb{R}_+$, hvilket viser at f er på formen $f(x)=x+k$. Vi undersøger nu for hvilke reelle tal k at $f(x)=x+k$ er en løsning.

$$(xy+k)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+k\right)=x+k+y,$$

som omskrives til

$$k\left(xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+k-1\right)=0.$$

Da denne ligning skal gælde for alle x og y, må $k=0$, dvs. at den eneste løsning er $f(x)=x$.

Opgave 1.10.4. Ved at dividere med x^2-y^2, under antagelse af at $x\neq\pm y$, fås

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-\frac{f(x-y)}{x-y}=4xy=(x+y)^2-(x-y)^2.$$

Dermed er

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-(x+y)^2=\frac{f(x-y)}{x-y}-(x-y)^2 \text{ for alle } x\neq\pm y.$$

Dette viser at $\frac{f(x)}{x}-x^2$ er konstant, og altså at $f(x)=x^3+kx$ for alle $x\neq 0$. Ved at indsætte $x=y=1$ i den oprindelige ligning fås $f(0)=0$. Dermed er de mulige løsninger $f(x)=x^3+kx$, hvor k er et reelt tal, og ved indsættelse ses at disse er løsninger for alle reelle tal k.

Opgave 1.10.5. Først viser vi at f er injektiv. Antag at $f(x)=f(y)$. Da er

$$3y-3x=f\big(2x+2y-f(x)\big)-f(y)=f\big(2y+2x-f(y)\big)-f(x)=3x-3y,$$

og dermed $x=y$. Dette viser at f er injektiv. Når $x=y$, fås

$$3x+f\big(4x-f(x)\big)=3x+f(x).$$

Da f er injektiv, er $4x-f(x)=x$, og dermed $f(x)=3x$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x)=3x$ for alle $x\in\mathbb{R}$ er en løsning til funktionalligningen.

Opgave 1.10.6. Bemærk først at funktionen er injektiv da $f(x)=f(y)$ medfører at

$$x=4f\big(f(x)\big)-2f(x)=4f\big(f(y)\big)-2f(y)=y.$$

Vi skal dermed blot vise at $f(0)=0$. Ved at indsætte $x=0$ fås

$$4f\big(f(0)\big)=2f(0)+0=2f(0),$$

og altså $2f\big(f(0)\big)=f(0)$. Ved at indsætte $x=f(0)$ og udnytte det foregående fås

$$4f\Big(f\big(f(0)\big)\Big)=2f\big(f(0)\big)+f(0)=f(0)+f(0)=2f(0).$$

Samlet er $f\Big(f\big(f(0)\big)\Big)=f\big(f(0)\big)$, og da f er injektiv, er $f(0)=0$.

Opgave 1.10.7. For at vise at f er injektiv, antager vi at $f(n)=f(m)$. Ved at tage f på begge sider opnås $f\big(f(n)\big)=f\big(f(m)\big)$, og dermed ifølge betingelsen i opgaven at $m=n$. Funktionen f er altså injektiv, og vi ved derfor at $f(n)=f(n+2)+2$. Nu viser vi ved induktion efter n at $f(n)=1-n$ for alle $n\in\mathbb{N}$. Da $f(0)=1$, får vi yderligere at $f(1)=f\big(f(0)\big)=0$. Nu har vi som induktionsstart at $f(0)=1$ og $f(1)=0$. Antag at $f(n)=1-n$ for alle ikke-negative heltal mindre end N, hvor $N\geq 2$. Nu kan vi udnytte $f(n)=f(n+2)+2$ til at få

$$f(N)=f(N-2)-2=1-(N-2)-2=1-N,$$

hvilket fuldfører induktionen. Nu har vi bestemt funktionsværdierne for alle ikke-negative hele tal. Det er let at vise induktivt at det også gælder for de negative heltal da $f(n+2)=f(n)-2$. Ved indsættelse ses at $f(n)=1-n$ faktisk er en løsning.

Opgave 1.10.8. Sæt $x=1$. Da er

$$f\big(f(y)+1\big)=y+f(1),$$

hvilket viser at f surjektiv da $y+f(1)$ kan antage alle værdier. Derfor findes et $k\in\mathbb{R}$ så $f(k)=-1$. Når $y=k$, fås $f(0)=kx+f(x)$. Altså er f en lineær funktion $f(x)=ax+b$. Vi indsætter i den oprindelige ligning for at finde de mulige værdier af a og b:

$$\begin{aligned} f\big(xf(y)+x\big)&=xy+f(x)\\ f\big(x(ay+b)+x\big)&=xy+ax+b\\ a(axy+bx+x)+b&=xy+ax+b\\ (a^2-1)xy+abx&=0 \end{aligned}$$

Da dette skal gælde for alle værdier af x og y, må $a^2=1$ og $b=0$. Samtlige løsninger er derfor $f(x)=x$ og $f(x)=-x$.

Opgave 1.10.9. Ved at indsætte $x=f(y)$ fås $f(0)=1-f(y)-y$ for alle y, og altså $f(y)=-y+1-f(0)$. Løsningerne skal derfor findes blandt $f(x)=-x+a$, og ved indsættelse ses at kun $f(x)=-x+\frac{1}{2}$ er en løsning.

Opgave 1.10.10. Antag at a er et reelt tal så der findes et reelt tal b og en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at $f(b)=0$ og $f\big(f(x)\big)=xf(x)+a$, $x\in\mathbb{R}$. Ved at indsætte $x=b$ fås

$$f(0)=f\big(f(b)\big)=bf(b)+a=a.$$

Nu indsættes $x=0$:

$$f(a)=f\big(f(0)\big)=0\cdot f(0)+a=a.$$

Ved at udnytte at $f(a)=a$ og indsætte $x=a$ fås

$$a=f\big(f(a)\big)=af(a)+a=a^2+a,$$

dvs. $a=0$. Den eneste mulige værdi af a er altså $a=0$. Hvis $a=0$, opfylder $b=0$ og $f(x)=0$ for alle $x\in\mathbb{R}$ det ønskede.

Opgave 1.10.11. Når vi indsætter $y=0$, får vi

$$f(x)f(0)=f(x)+3f(x)=4f(x)$$

for alle x, dvs. $f(0)=4$ eller $f(x)=0$ for alle x. Da

$$f(x)f(y)-f(xy+x)-3f(x+y)=y,$$

kan $f(x)$ ikke være nul for alle x, dvs. $f(0)=4$. Ved at indsætte $x=0$ og udnytte at $f(0)=4$, får vi

$$4f(y)=4+3f(y)+y.$$

Altså er $f(y)=y+4$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x)=x+4$ opfylder betingelserne.

Opgave 1.10.12. Ved at indsætte $y=x$ fås

$$2xf(x)=2xf(x)^2,$$

dvs. $f(x)=f(x)^2$ for alle $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dermed er $f(x)=0$ eller $f(x)=1$ for $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Antag at der findes et $z\neq 0$ så $f(z)=1$. Ved at indsætte $x=z$ fås

$$zf(y)+y=(z+y)f(y),$$

og altså $y=f(y)y$ for alle y, dvs. $f(y)=1$ for alle $y\neq 0$. De mulige løsninger i dette tilfælde er derfor $f(x)=1$ for $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ og $f(0)=a$, hvor a er et vilkårligt reelt tal. Ved indsættelse ses at de alle er løsninger.

Antag at der ikke findes et $z\neq 0$ så $f(z)=1$. Da er $f(x)=0$ for alle $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Hvis man indsætter funktioner af typen $f(x)=0$ for alle $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ og $f(0)=a$, hvor a er et vilkårligt reelt tal, ser man at $a=0$, dvs. $f(x)=0$ for alle x.

Opgave 1.10.13. Ved at kombinere $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$ og $f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=(n-1)^2f(n-1)$ fås

$$f(n)=\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)}{n^2-1}=\frac{(n-1)^2f(n-1)}{(n-1)(n+1)}=\frac{n-1}{n+1}f(n-1).$$

Dermed er

$$f(n)=\frac{n-1}{n+1}f(n-1)=\frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n}f(n-2)=\cdots=\frac{2}{n(n+1)}f(1).$$

Dette giver at $f(1995)=\frac{2}{1995\cdot 1996}f(1)=\frac{1}{998}$.

Opgave 1.10.14. Ved at indsætte $x=0$, fås

$$f\left(f(0)^2+f(y)\right)=y.$$

Dermed er f surjektiv, og det betyder at der findes et z så $f(z)=0$. Indsæt nu $x=z$:

$$f\left(f(z)^2+f(y)\right)=zf(z)+y.$$

Dette viser at $f\left(f(y)\right)=y$ for alle y, og dermed at funktionen er injektiv. Ved at indsætte $x=f(t)$ og dermed $t=f\left(f(t)\right)=f(x)$ fås

$$f\left(t^2+f(y)\right)=f(t)t+y.$$

Sammenholdt med $f\left(f(z)^2+f(y)\right)=zf(z)+y$ har vi at

$$f\left(f(x)^2+f(y)\right)=f\left(x^2+f(y)\right).$$

Da f er injektiv, betyder det at $f(x)^2+f(y)=x^2+f(y)$, og dermed at $f(x)=\pm x$ for alle reelle tal x. Antag at der findes en løsning f hvor $f(a)=a$ og $f(b)=-b$ for to reelle tal a og b forskellige fra 0. Ved at indsætte $x=a$ og $y=b$ fås $f(a^2-b)=a^2+b$, og altså $|a^2-b|=|a^2+b|$, men det er ikke muligt da a og b er forskellige fra 0. Dermed ved vi nu at der kun er to mulige løsninger, nemlig $f(x)=x$ og $f(x)=-x$. Ved indsættelse ses at de begge er løsninger.

Opgave 1.10.15. Hvis $m\geq 3$, gælder at

$$f\left((m+1)^2\right)=f(2m+1)f(1)=f(2m)f(2)=f(2m-1)f(3). \qquad (*)$$

Denne ligning viser at

$$f(2m)=\frac{f(2m-1)f(3)}{f(2)} \quad \text{og} \quad f(2m+1)=\frac{f(2m)f(2)}{f(1)},$$

dvs. hvis $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$ er bestemt, kan alle andre funktionsværdier herefter bestemmes induktivt.

Nu bestemmer vi $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$, og det kræver ret mange overvejelser: Ved at benytte (*) med $m=1,2,3,4$ fås

$$\begin{aligned}
f(4)&=f(3)f(1)=f(2)f(2)=f(1)f(3)\\
f(9)&=f(5)f(1)=f(4)f(2)=f(3)f(3)\\
f(16)&=f(7)f(1)=f(6)f(2)=f(5)f(3).\\
f(25)&=f(9)f(1)=f(8)f(2)=f(7)f(3).
\end{aligned}$$

Først udtrykker vi $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ og $f(7)$ udelukkende ved $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$:

$$f(4)=f(2^2)=f(3)f(1), \quad f(5)=\frac{f(4)f(2)}{f(1)}=f(2)f(3),$$
$$f(6)=\frac{f(5)f(3)}{f(2)}=f(3)^2, \quad f(7)=\frac{f(6)f(2)}{f(1)}=\frac{f(2)f(3)^2}{f(1)}.$$

Nu kan vi få tre forskellige udtryk for $f(9)$ hvor kun $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$ indgår:

$$f(9)=f(3^2),\ f(9)=f(5)f(1)=f(1)f(2)f(3),\ f(9)=\frac{f(7)f(3)}{f(1)}=\frac{f(2)f(3)^3}{f(1)^2},$$

og dermed

$$f(3)^2=f(1)f(2)f(3)=\frac{f(2)f(3)^3}{f(1)^2}.$$

Af dette ses at $f(1)^3=f(3)^2$ og $f(2)=f(1)^2$. Ved at udregne $f(36)$ på to måder fås yderligere $f(9)f(3)=f(7)f(5)$, og altså $f(1)f(2)f(3)^2=\frac{f(2)^2f(3)^3}{f(1)}$. Sammenholdt med at $f(2)=f(1)^2$, giver dette $f(3)=1$, og dermed også $f(1)=f(2)=1$. Den eneste mulige løsning er derfor $f(n)=1$ for alle n, og ved indsættelse ses at dette faktisk er en løsning.

Opgave 1.10.16. Vi ønsker at vise at $f(n)\leq n$, for når f er injektiv, giver det induktivt at $f(n)=n$ da $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Vi viser dette indirekte.

Antag derfor at der findes et positivt helt tal m så $f(m) > m$. Lad $f^k(n)$ betegne $f\left(f\left(\dots f(n)\dots\right)\right)$ hvor f er taget k gange. Da er

$$\begin{aligned} f^2(m) &\le \frac{m+f(m)}{2} < f(m) \\ f^3(m) &\le \frac{f(m)+f^2(m)}{2} < f(m) \end{aligned}$$

Vi viser ved induktion efter k at $f^k(m) < f(m)$. Vi har allerede induktionsstarten. Antag at det er sandt for alle $2 \le k \le K$. Da er

$$f^{K+1}(m) \le \frac{f^{K-1}(m)+f^K(m)}{2} < f(m).$$

Da der kun findes endeligt mange positive heltal som er mindre end $f(m)$, må der findes to positive hele tal p og q, $p < q$, så $f^p(m) = f^q(m)$. Da f er injektiv, giver dette at $m = f^{q-p}(m)$, men det betyder at $f(m) = f^{q-p+1}(m)$ hvor $q-p+1 \ge 2$, hvilket er en modstrid. Dermed er $f(n) \le n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Som vi allerede konkluderede tidligere, betyder dette at $f(n) = n$ er eneste mulige løsning da f skal være injektiv. Ved at indsætte ses at denne funktion faktisk er en løsning.

Opgave 1.10.17. Ved at indsætte $x = 1$ og $y = 0$ fås

$$1 = f(1+0) \ge f(1) + f(0) = 1 + f(0),$$

og altså $f(0) = 0$.

Først viser vi ved induktion efter n at $f\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n}$ for $n \ge 1$. For $n = 1$ er $2f(\frac{1}{2}) \le f(1) = 1$, og dermed $f\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2}$. Antag at $f\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n}$. Da er

$$2f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \le f\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n},$$

og dermed $f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \le \frac{1}{2^{n+1}}$, hvilket fuldfører induktionen.

Nu er vi klar til at vise den egentlige ulighed. For $x \in]0;1[$ vælges et positivt heltal n så $x \in [\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}]$. Ved at indsætte $y = \frac{1}{2^{n-1}} - x$ fås

$$f(x) \le f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{1}{2^{n-1}} - x\right) \le \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \frac{1}{2^n} \le 2x.$$

Da $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$, har vi vist at $f(x) \le 2x$ for alle $x \in [0;1]$.

Opgave 1.10.18. Ved at substituere x og y med henholdsvis $\frac{1}{x}$ og $\frac{1}{y}$ fås

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) f(y) - f(x) f\left(\frac{1}{y}\right),$$

og ved addition af den oprindelige ligning fås

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dermed er $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = c$ for en konstant c. Vi har nu

$$f(x) - f(y) = f(x) f\left(\frac{1}{y}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) f(y) = f(x)\big(c - f(y)\big) - \big(c - f(x)\big) f(y),$$

og altså $(c-1)f(x) = (c-1)f(y)$. Hvis $c \ne 1$, da er $f(x) = f(y)$ for alle x og y, og dermed er funktionen konstant, dvs. $f(-1) = \frac{1}{2}$. Hvis $c = 1$, er

$$2f(-1) = f(-1) + f\left(\frac{1}{-1}\right) = 1,$$

dvs. $f(-1) = \frac{1}{2}$.

Opgave 1.11.1. Bevis for QA-uligheden for $n = 2$:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \ge \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2(x_1^2 + x_2^2) \ge x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 \ge 0,$$

med lighedstegn netop når $x_1 = x_2$.

Bevis for GH-uligheden for $n = 2$:

$$\sqrt{x_1 x_2} \ge \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} \ge \sqrt{\frac{1}{x_1} \frac{1}{x_2}}.$$

Dette er AG-uligheden for $a_1 = \frac{1}{x_1}$ og $a_2 = \frac{1}{x_2}$, og den har vi allerede vist er sand. Vi ved yderligere at der er lighedstegn netop når $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, dvs. netop når $x_1 = x_2$.

Opgave 1.11.2. Pointen er at AG-uligheden kan omskrives til GH–uligheden. Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være n positive reelle tal. Dermed er $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ også n positive reelle tal. Ifølge AG-uligheden gælder at

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n}},$$

og dermed følger GH-uligheden

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Bemærk at der gælder lighedstegn netop når $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Opgave 1.11.3. Ifølge QA-uligheden er

$$\sqrt{\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Da begge sider af lighedstegnet er positive, kan vi kvadrere:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^2.$$

Fordi $abc \neq 0$, og dermed $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, følger det at

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Opgave 1.11.4. Lad n være et positivt heltal, og a og b positive reelle tal. Uligheden

$$\frac{a + nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n}$$

er blot AG-uligheden med de $n+1$ tal $a, b, b, \dots, b$.

Opgave 1.11.5. Ifølge AG-uligheden er

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq \sqrt[3]{abbcca} = \left(\sqrt[3]{abc}\right)^2$$

for positive reelle tal a, b og c. Dette giver

$$\sqrt{\frac{ab + bc + ac}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Opgave 1.11.6. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vi viser de to uligheder

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

en ad gangen. Ifølge AH-uligheden er

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} + \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}.$$

AH-uligheden giver yderligere

$$\frac{\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}}{3} \geq \frac{3}{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}} = \frac{3}{a+b+c},$$

hvilket viser at

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Opgave 1.11.7. Lad a, b og c være positive reelle tal. Betragt uligheden

$$\sqrt[3]{abc} + 1 \leq \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Ved at opløfte begge sider af ulighedstegnet i tredje potens får man

$$abc + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{abc}^2 + 1 \leq abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1.$$

Vi skal altså vise at

$$3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{abc}^2 \leq ab + ac + bc + a + b + c.$$

Det følger ved at bruge AG-uligheden to gange:

$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(ab)(ac)(bc)} = 3\sqrt[3]{abc}^2 \quad \text{og} \quad a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Opgave 1.11.8. Lad a og b være to positive reelle tal med sum 1. For at bevise at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2},$$

benytter vi først QA-uligheden til at vurdere venstresiden. Der gælder at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$$

med lighedstegn netop når $a=b$. Da $a+b=1$, giver AH-uligheden at

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \frac{2}{a+b}=2$$

med lighedstegn netop når $a=b$. Samlet er

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}$$

med lighedstegn netop når $a=b$, hvilket vil sige når $a=b=\frac{1}{2}$.

Opgave 1.11.9. Lad a, b og c være reelle tal der opfylder at $c>0$, $a>c$ og $b>c$. Da begge sider af ulighedstegnet

$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}.$$

er positive, kan vi kvadrere og få

$$ab \geq ca+cb-2c^2+2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)}.$$

Ved omrokering får man yderligere

$$\frac{(a-c)(b-c)+c^2}{2} \geq \sqrt{c^2(a-c)(b-c)},$$

hvilket er sandt ifølge AG-uligheden.

Opgave 1.11.10. Lad x,y,z være positive reelle tal som opfylder at $xyz=32$. For at bestemme den mindst mulige værdi af

$$x^2+4xy+4y^2+2z^2$$

overvejer vi hvordan vi kan udnytte at $xyz=32$. Da vi kender xyz, forsøger vi at vurdere udtrykket ved et udtryk af formen $(xyz)^n$. Derfor benytter vi AG-uligheden to gange på følgende måde

$$\begin{aligned} x^2+4xy+4y^2+2z^2 &\geq 2\sqrt{x^2\cdot 4y^2}+4xy+2z^2 \\ &= 4xy+4xy+2z^2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{32x^2y^2z^2} \\ &= 3\sqrt[3]{32^3}=96. \end{aligned}$$

Der er lighedstegn netop når $x^2=4y^2$ og $4xy=2z^2$, dvs. når $x=z=4$ og $y=2$.

Opgave 1.12.1. Ved at gange ud og reducere ses at uligheden er ensbetydende med

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i z_i.$$

Denne ulighed er omarrangeringsuligheden, dvs. uligheden følger direkte om omarrangeringsuligheden.

Opgave 1.12.2. Da uligheden er symmetrisk i a, b og c, kan vi uden tab af generalitet antage at $a\leq b\leq c$. Ved at bruge omarrangeringsuligheden flere gange fås

$$\begin{aligned} \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} &= a^5\cdot\frac{1}{b^3c^3}+b^5\cdot\frac{1}{c^3a^3}+c^5\cdot\frac{1}{a^3b^3} \\ &\geq a^5\cdot\frac{1}{a^3c^3}+b^5\cdot\frac{1}{b^3a^3}+c^5\cdot\frac{1}{c^3b^3}=a^2\cdot\frac{1}{c^3}+b^2\cdot\frac{1}{a^3}+c^2\cdot\frac{1}{b^3} \\ &\geq a^2\cdot\frac{1}{a^3}+b^2\cdot\frac{1}{b^3}+c^2\cdot\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Opgave 1.12.3. Ifølge Cauchy-Schwarz med vektorerne $(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$ og $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1b_1}},\frac{1}{\sqrt{a_2b_2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{a_nb_n}}\right)$ er

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_ib_i}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i+b_i}{\sqrt{a_ib_i}}.$$

Ifølge AG-uligheden er hvert led på højresiden større end eller lig med 2, og ved yderligere at kvadrere får man

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i b_i}\right)\geq 4n^2.$$

Opgave 1.12.4. Ifølge Cauchy-Schwarz med vektorerne $(\sqrt{x_1},\sqrt{x_2},\dots,\sqrt{x_n})$ og $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}},\frac{1}{\sqrt{x_2}},\dots,\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ er

$$\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\geq n$$

Ved at kvadrere og omskrive fås AH-uligheden

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

Opgave 1.12.5. Ifølge Cauchy-Schwarz med vektorerne $\left(\frac{a}{\sqrt{c}},\frac{b}{\sqrt{a}},\frac{c}{\sqrt{b}}\right)$ og $(\sqrt{c},\sqrt{a},\sqrt{b})$ er

$$\frac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c}+\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{a}+\frac{c}{\sqrt{b}}\sqrt{b}\leq\sqrt{\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}}\,\sqrt{a+b+c}.$$

Ved at kvadrere og dividere med $a+b+c$ fås

$$a+b+c\leq\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}.$$

Opgave 1.12.6. Vi skal vise at der for vilkårlige n reelle tal $x_1,x_2,\dots,x_n$ gælder at

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\leq\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}},$$

med lighedstegn netop hvis $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Lad $f(x)=x^2$ være defineret på de reelle tal. Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er konveks da $f''(x)=2\geq 0$. Ifølge Jensens ulighed er

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

og dermed

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2\leq\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$$

med lighedstegn netop hvis $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Dette giver det ønskede.

Opgave 1.12.7. Funktionen $f(x)=\sqrt[3]{x}$ er konkav på $\mathbb{R}_+$ da $f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}<0$ for $x\in\mathbb{R}_+$. Ifølge Jensens ulighed med tallene $a+1, b+1, c+1$ er

$$\sqrt[3]{\frac{a+1+b+1+c+1}{3}}\geq\frac{\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{b+1}+\sqrt[3]{c+1}}{3},$$

hvilket viser det ønskede.

Opgave 1.12.8. Funktionen $f(x)=x^4$ er konveks på $\mathbb{R}_+$ da $f''(x)=12x^2>0$ for $x\in\mathbb{R}_+$. Ifølge Jensens ulighed med tallene $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ gælder derfor at

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^4$$

hvilket viser det ønskede.

Opgave 1.12.9. Funktionen $f(x)=(x+x^{-1})^2$ er konveks på $\mathbb{R}_+$ da $f''(x)=2+6x^{-4}>0$ for $x\in\mathbb{R}_+$. Dermed giver Jensens ulighed at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geq 3\left(\frac{a+b+c}{3}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2=3\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{100}{3}.$$

Opgave 1.12.10. Vi skal vise at der for vilkårlige $2n$ reelle tal $x_1,x_2,\dots,x_n$ og $y_1,y_2,\dots,y_n$ gælder at

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

Da begge sider er ikke-negative, kan vi kvadrere:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\leq\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

Ifølge Cauchy-Schwartz gælder at

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Dette giver det ønskede.

Opgave 1.12.11. Funktionen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ er konveks i $x \in]0;1[$ da

$$f''(x) = \frac{4-x}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

for $x \in]0;1[$. Ifølge Jensens ulighed gælder dermed at

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} = n \cdot \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n} \ge$$

$$n \cdot f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Opgave 1.12.12. Ifølge AG-uligheden er $a^2+bc \ge 2a\sqrt{bc}$. Dermed er

$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Ifølge omarrangeringsuligheden er

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{b}} \le \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Da udtrykket er symmetrisk, kan vi antage at $c \ge b \ge a$, og altså $\frac{1}{ab} \ge \frac{1}{ac} \ge \frac{1}{bc}$. Ved at benytte omarrangeringsuligheden endnu engang fås

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b}{ab} + \frac{c}{bc} + \frac{a}{ac} \le \frac{c}{ab} + \frac{b}{ca} + \frac{a}{bc}.$$

Dermed er det ønskede vist.

Opgave 1.12.13. Ifølge Cauchy-Schwarz med vektorerne $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$ og $\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}, \sqrt{\frac{y-1}{y}}, \sqrt{\frac{z-1}{z}}\right)$ er

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} &\le \sqrt{x+y+z}\sqrt{\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}}\\ &= \sqrt{x+y+z}\sqrt{3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}}\\ &= \sqrt{x+y+z}\end{aligned}$$

da $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$.

Opgave 1.12.14. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ og $y_1, y_2, \ldots, y_n$ være reelle tal. Hvis vi kan vise at

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right), \quad (*)$$

er sand, da må Cauchy-Schwarz også være sand. Omarrangeringsuligheden siger at hvis vi har reelle tal $a_1, a_2, \ldots, a_m$ og en permutation af dem $a_1', a_2', \ldots, a_m'$, da er

$$\sum_{i=1}^{m} a_i a_i' \le \sum_{i=1}^{m} a_i^2. \quad (**)$$

Hvis vi betragter de n^2 reelle tal $x_i y_j$ hvor $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, da er højresiden i (*) netop $\sum (x_i y_j)^2$, dvs. den svarer til højresiden i (**), mens venstresiden i (*) er $\sum (x_i y_j)(x_j y_i)$ dvs. den svarer til venstresiden i (**), hvor permutationen er den der bytter om på $x_i y_j$ og $x_j y_i$. Dermed har vi vist Cauchy-Schwarz.

Stikordsregister