GEORG MOHR
KONKURRENCEN

OPGAVER OG LØSNINGER
1991-2010

Kirsten Rosenkilde · Marianne Terp · Rasmus Villemoes

Georg Mohr-Konkurrencen

Opgaver og løsninger

1991–2010

Redaktion: Kirsten Rosenkilde
Marianne Terp
Rasmus Villemoes

Georg Mohr-Konkurrencen
Opgaver og løsninger 1991–2010

Redaktion: Sven Toft Jensen (Matematiklærerforeningen); Kirsten Rosenkilde, Marianne Terp og Rasmus Villemoes (Georg Mohr-Konkurrencen)

Typografi og illustrationer: Rasmus Villemoes

Omslag: Kurt Finsten

Tryk: Zeuner Grafisk as

Salg: Matematiklærerforeningens Bogsalg, Slotsgade 2, 3. sal, 2200 København N

ISBN: 978-87-90996-44-4

Forsidevignetten er fra førsteudgaven af *Euclides Danicus* af Georg Mohr fra 1672. I denne bog viser Mohr at alle konstruktioner som Euclid kan udføre med passer og lineal, kan udføres med passeren alene.

Titelbladsillustrationen er Georg Mohr-Konkurrencens logo. Det blev tegnet til den første Georg Mohr-Konkurrence i 1991 af daværende lektor ved N. Zahles Gymnasieskole, Erik Lundquist.

Indhold

Forord

Denne bog indeholder alle opgavesæt stillet til Georg Mohr-Konkurrencen fra 1991 til 2010. Bogen udgives i anledning af konkurrencens 20-års-jubilæum og henvender sig til interesserede lærere og elever.

I opgaverne har vi kun foretaget nogle ganske få redaktionelle ændringer i forhold til den oprindelige formulering. Det drejer sig hovedsagelig om ensartet kommatering og nytegnede figurer.

Løsningerne er til gengæld gennemredigerede, og også disse er forsynede med nytegnede og flere figurer. De såkaldte »kortfattede løsningsforslag«, som vi hvert år har udsendt efter afholdelsen af konkurrencen, er her erstattet med fyldestgørende løsninger. Vi har tilstræbt at gøre dem så detaljerede at de kan læses af konkurrencens målgruppe: de dygtige elever, som har ladet sig udfordre af opgaverne og nu gerne vil se og forstå en færdig løsning.

Opgaverne står i omvendt kronologisk orden. Denne rækkefølge er valgt fordi de senere års opgaver er mere centrale og typiske end de første års.

Efter opgaver og løsninger følger et meget kort »teori-afsnit«. Heri opregner vi de matematiske forudsætninger som har været benyttet i opgaverne og løsningerne. Hvor vi i løsningerne benytter os af begreber eller sætninger der ikke i øjeblikket indgår i gymnasiematematikkens kernepensum, henviser vi med en margennote til dette afsnit. I teoriafsnittet er der hverken eksempler eller beviser. Dette er et bevidst (og smerteligt) fravalg for at holde bogens omfang inden for det overkommelige.

Alle opgavesæt og løsninger findes også på konkurrencens hjemmeside:

`www.georgmohr.dk`

Her kan man ligeledes finde opgavesættene til første runde, information om og link til videregående matematikkonkurrencer, noter mv.

Kirsten Rosenkilde, Marianne Terp og Rasmus Villemoes,
for arbejdsgruppen vedr. Georg Mohr-Konkurrencen
December 2010

Georg Mohr fylder tyve år

Georg Mohr-Konkurrencen er en matematikkonkurrence der henvender sig til matematikinteresserede elever i gymnasiale uddannelser. Formålet med Georg Mohr-Konkurrencen er dobbelt: Konkurrencen skal dels stimulere interessen for matematik ved at udfordre de dygtigste elever med opgaver der i sværhedsgrad ligger ud over det de møder i den daglige undervisning, dels fungere som et led i udvælgelsen af deltagere til den Internationale Matematikolympiade.

Georg Mohr-Konkurrencen før og nu

Georg Mohr-Konkurrencen blev skabt i 1990 på initiativ af Sven Toft Jensen, der i LMFK-bladet udkastede idéen til en dansk matematikkonkurrence og fik opbakning hertil af Matematiklærerforeningen. Kort efter samledes den første arbejdsgruppe, konkurrencen fik sit navn, og vi gik i gang med at sætte det hele i værk: breve til skolerne, yderligere presseomtale, opgaveudvælgelse osv.

Dengang var konkurrence og elitedyrkelse noget der ikke hørte til inden for skolens mure, undtagen i forbindelse med sportsarrangementer. Nu om stunder blæser som bekendt andre vinde. Elite og talent er blevet ord der godt kan siges højt, og talentpleje har bevågenhed fra højeste sted.

Ved den første konkurrence deltog små 100 elever, en god start og et tilfredsstillende antal i betragtning af at vi forestillede os noget i retning af en enkelt eller måske et par potentielle deltagere pr. gymnasium. Få år senere deltog omkring 800 elever årligt i denne konkurrence, og i de seneste år har over 1200 elever forsøgt sig.

Georg Mohr-Konkurrencen har vokset sig stor og kendt, og år efter år når talentfulde elever helt til tops. Men der er også mange deltagere der kun opnår ganske få point, også selv om de er meget dygtige i den daglige undervisning. Fra år 2000 indførte vi et multiple choice-opgavesæt med tyve opgaver som man kunne teste sig selv på forud for tilmelding til konkurrencen, og fra 2006 blev et sådant opgavesæt gjort til en obligatorisk første runde. Springet fra første runde, hvor det kvalificerede gæt og den gode intuition belønnes, til anden runde, hvor der yderligere kræves præcis og detaljeret argumentation for alle opgaveløsninger, er dog stadig stort. Det er opgaverne fra anden runde der præsenteres i denne bog.

Dansk matematikolympiade med internationalt tilsnit

Nationale matematikolympiader findes i mange lande og arrangeres typisk af universitetsfolk. Fokus er på udskilning af de bedste og intensiv træning forud for den ultimative prøve: den Internationale Matematikolympiade (IMO).

Vores konkurrence er relativt ung, og den er på flere måder meget dansk. Arbejdsgruppens medlemmer er hovedsagelig gymnasielærere, der har et nøje kendskab til gymnasieelevers formåen. Vi forsøger at satse på både bredde og top, som det også siges i formålsparagraffen. Og konkurrenceaspektet er i første omgang skånsomt: De ca. tyve bedste kaldes alle for vindere, og kun disses resultater offentliggøres med navn. Vinderseminaret, som vinderne deltager i, er ud over at være en første træning til videregående konkurrencer (se mere om de forskellige videregående konkurrencer på hjemmesiden), en præmie i sig selv. Vi ved at de unge mennesker finder det meget inspirerende at møde matematik på denne måde: at opholde sig ved et universitet i nogle dage, overvære udfordrende matematikforedrag, møde forskere – og spise frokost i kantinen. Vi glæder os over at mange af Georg Mohr-Konkurrencens vindere gennem tiderne således er blevet bekræftet i deres lyst til at vælge en uddannelse inden for matematik, naturvidenskab eller teknik.

I de senere år har vi styrket træningsindsatsen for talenterne og i træningsprogrammet rettet blikket skarpt mod internationale konkurrencer. Der arrangeres flere træningsophold for de udvalgte, og naturligvis fastholdes det traditionsrige Sorøophold umiddelbart inden afrejsen til IMO, nu i gode rammer i det nye Talenthus i Sorø. Her er et samarbejde med de øvrige nordiske lande påbegyndt.

Vi har haft fornøjelsen af at se denne indsats bære frugt. IMO med de topsvære opgaver er ikke længere utilgængelig for danske deltagere. Efter en forsigtig begyndelse har danske deltagere de senere år hentet medaljer hjem. Sidste år blev der uddelt to sølvmedaljer til danske deltagere, og i år var der for første gang nogensinde en guldmedalje til en dansk deltager.

Organisation og økonomi

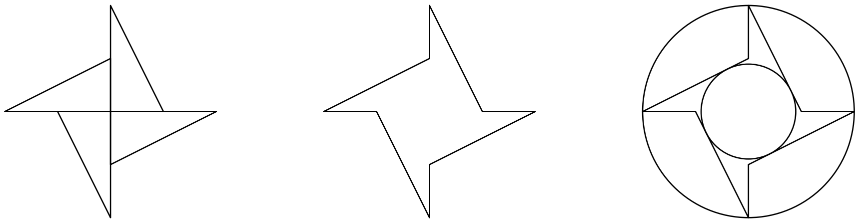
Konkurrencen arrangeres af en arbejdsgruppe med tilknytning til Matematiklærerforeningen. Ud over naturligvis fremstilling af opgavesæt til selve konkurrencen, noter og opgavesæt til videregående træning og medvirken ved vinderseminarer og yderligere træning omfatter arbejdet en hel del administration omkring selve afviklingen af konkurrencen, elektronisk tilmelding, kontakt med skoler og censorer osv. I den forbindelse gør mange lærere rundt omkring på skolerne en stor indsats med den lokale afvikling af konkurrencen, og en række frivillige censorer medvirker hvert år ved bedømmelsen af de mange besvarelser.

Langt det meste arbejde er ulønnet. Den sponsorstøtte vi de første år fik fra især Matematiklærerforeningen og Georg Mohr Fonden, gik hovedsagelig til eleverne i form af betalt ophold ved vinderseminaret og betalte rejser til deltagelse i de videregående konkurrencer. Vi har valgt ikke at bruge midler til præmier, men gerne taget imod sponsorpræmier i form af bøger, receptioner for eleverne, lommeregnere mv. I de senere år har Georg Mohr-Konkurrencen været på finansloven sammen med de andre faglige olympiader der er kommet til. En del af budgettet bruges nu til delvis frikøb af lærere der har ansvaret for den intensiverede træning til de videregående konkurrencer.

Arbejsgruppen bestod som udgangspunkt af en kerne af gymnasielærere og er sidenhen suppleret med bl.a. tidligere Georg Mohr-vindere, hvoraf nogle nu er i gang med en universitetskarriere. Gennem tiderne har der naturligt nok været en vis udskiftning. Arbejdsgruppens nuværende og forhenværende medlemmer gennem kortere eller længere tid er i alfabetisk rækkefølge: Jens-Søren Kjær Andersen, Leif Andersen, Ulrik Buchholtz, Erling Fredvig, Søren Galatius, Michael Hallundbæk, Martin Wedel Jacobsen, Sune Kristian Jakobsen, Sven Toft Jensen, Thomas Kragh, Thorkild Kristiansen, Kai Neergård, No Netterstrøm, Henrik Bindesbøll Nørregaard, Carsten Olesen, Martin Olsen, Max Petersen, Poul Printz, Sune Precht Reeh, Kirsten Rosenkilde, Anders Schack-Nielsen, Marianne Terp, Christian Thybo, Peter Trosborg, Rasmus Villemoes, Rasmus Thestrup Østergaard.

Opgaver · 2010

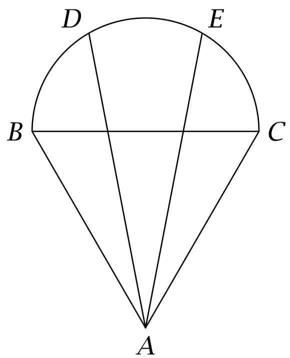
Opgave 1. Fire retvinklede trekanter hver med katetelængderne 1 og 2 samles til en figur som vist. Hvor stor en brøkdel udgør den lille cirkels areal af den stores?



Opgave 2. Bevis at der for ethvert helt tal n findes hele tal a, b og c så $n = a^2 + b^2 - c^2$.

Opgave 3. Kan 29 drenge og 31 piger stilles op på række med hinanden i hånden så ingen holder to piger i hånden?

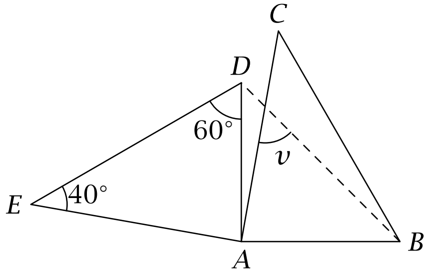
Opgave 4. En ligesidet trekant ABC er givet. Med BC som diameter tegnes en halvcirkel uden for trekanten. På halvcirklen vælges punkter D og E så buelængderne BD, DE og EC er lige store. Bevis at linjestykkerne AD og AE deler siden BC i tre lige store stykker.



Opgave 5. Det oplyses at 2^{2010} er et 606-cifret tal som begynder med 1. Hvor mange af tallene $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2009}$ begynder med 4?

Opgaver · 2009

Opgave 1. I figuren nedenfor fremkommer trekant ADE af trekant ABC ved en drejning på 90° om punktet A. Hvis vinkel D er 60°, og vinkel E er 40°, hvor stor er så vinkel v?



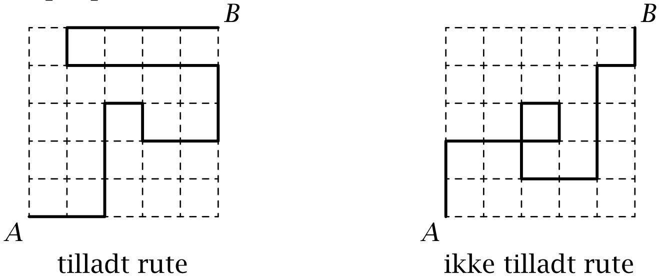
Opgave 2. Løs ligningssystemet

$$\frac{1}{x+y} + x = 3$$
$$\frac{x}{x+y} = 2.$$

Opgave 3. Georg har til en fest købt masser af fyldte chokolader, og da han tæller hvor mange han har, opdager han at antallet er et primtal. Han fordeler så mange af chokoladerne som muligt på 60 fade med lige mange på hvert. Han konstaterer derefter at han har mere end ét stykke tilbage, og at antallet af tiloversblevne stykker ikke er et primtal. Hvor mange stykker chokolade har Georg til overs?

Opgave 4. Lad E være et vilkårligt punkt forskelligt fra A og B på siden AB af et kvadrat $ABCD$, og lad F og G være punkter på linjestykket CE så BF og DG står vinkelret på CE. Bevis at $|DF| = |AG|$.

Opgave 5. Forestil dig et kvadratisk skema der består af $n \times n$ felter med kantlængde 1, hvor n er et vilkårligt positivt helt tal. Hvad er den størst mulige længde af en rute du kan følge langs felternes kanter fra punktet A i nederste venstre hjørne til punktet B i øverste højre hjørne hvis du aldrig må vende tilbage til et punkt hvor du har været før? (Figuren viser for $n = 5$ et eksempel på en tilladt rute og et eksempel på en ikke tilladt rute).



tilladt rute ikke tilladt rute

Opgaver · 2008

Opgave 1. Danmark har spillet en fodboldlandskamp mod Georgien. Kampen sluttede 5–5, og mellem første og sidste mål har kampen på intet tidspunkt stået lige. Intet land har scoret tre mål i træk, og Danmark scorede det sjette mål. Kan man ud fra disse oplysninger afgøre hvilket land der scorede det femte mål?

Opgave 2. Om tre hele tal p, q og r gælder at

$$p + q^2 = r^2.$$

Vis at 6 går op i pqr.

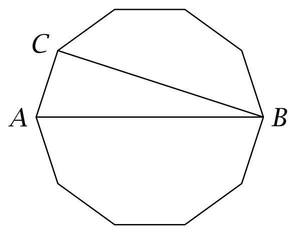
Opgave 3. Tallene fra 1 til 500 er skrevet på tavlen. To spillere A og B sletter skiftevis ét tal ad gangen, og A sletter det første tal. Hvis summen af de to sidste tal på tavlen er delelig med 3, vinder B, i modsat fald vinder A. Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer denne spiller sejren?

Opgave 4. I trekant ABC er $|AB| = 2$, $|AC| = 6$ og $\angle A = 120°$. Vinkelhalveringslinjen for vinkel A skærer siden BC i punktet D. Bestem længden af AD. Svaret ønskes angivet som brøk med hele tal i tæller og nævner.

Opgave 5. For hvert positivt helt tal n dannes ud fra tallene 2^n og 5^n et nyt tal t_n som består af cifrene fra 2^n efterfulgt af cifrene fra 5^n. Fx er $t_4 = 16625$. Hvor mange cifre har tallet t_{2008}?

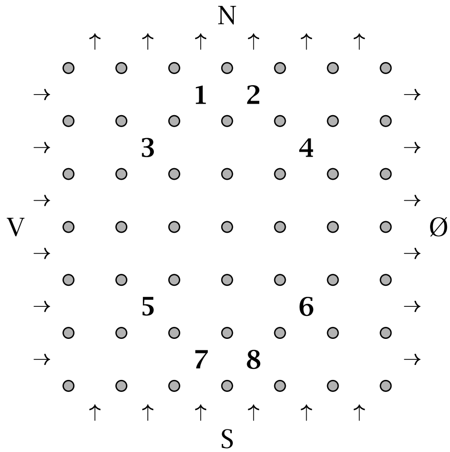
Opgaver · 2007

Opgave 1. I en regulær tikant ligger trekant ABC som vist på figuren. Hvor stor en brøkdel udgør trekantens areal af hele tikantens areal? Svaret ønskes opskrevet som en brøk hvor tæller og nævner er hele tal.

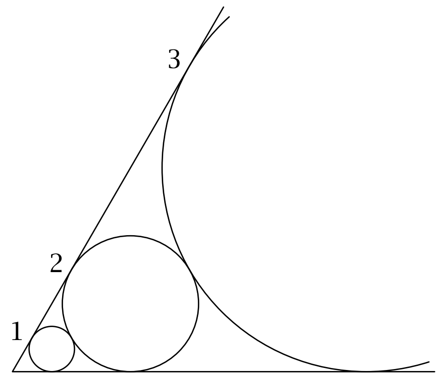


Opgave 2. Hvad er det sidste ciffer i tallet 2007^{2007}?

Opgave 3. En snedig drage bevogter en prinsesse. For at overvinde dragen og vinde prinsessen skal man løse følgende opgave: Dragen har i nogle af felterne i søjlehallen (se figur) anbragt tallene 1–8. Selv må man i resten af felterne anbringe tallene 9–36. Tallene 1–36 skal stå således at *enhver* tur der starter med at man går ind fra enten syd eller vest, og ender med at man går ud mod enten nord eller øst, går gennem mindst ét tal fra 5-tabellen. (På figuren er nord, syd, øst og vest angivet med N, S, Ø og V). Georg ønsker at vinde prinsessen. Kan det lade sig gøre?



Opgave 4. Figuren viser en vinkel på 60°, hvori der ligger 2007 nummererede cirkler (kun de tre første er vist på figuren). Cirklerne er nummererede efter størrelse. Cirklerne tangerer vinklens ben og hinanden som vist på figuren. Cirkel nummer 1 har radius 1. Bestem radius af cirkel nummer 2007.



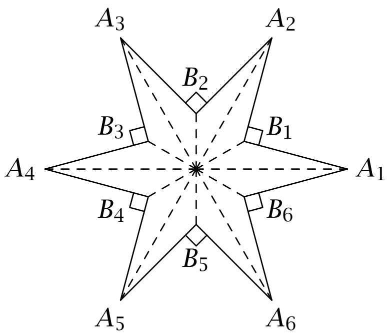
Opgave 5. Tallene $a_0, a_1, a_2, \dots$ er bestemt ved at $a_0 = 0$, og

$$a_n = \begin{cases} 1 + a_{n-1} & \text{når } n \text{ er positiv og ulige,} \\ 3a_{n/2} & \text{når } n \text{ er positiv og lige.} \end{cases}$$

Hvor mange af disse tal er mindre end 2007?

Opgaver · 2006

Opgave 1. Den viste stjerne er symmetrisk om hver af de seks viste diagonaler. Alle forbindelseslinjer fra punkterne A_1, A_2, ..., A_6 til stjernens centrum har længden 1, og alle de viste vinkler ved B_1, B_2, ..., B_6 er rette. Bestem stjernens areal.



Opgave 2. Bestem alle reelle talsæt (x, y, z) som opfylder

$$x + y = 2 \quad \text{og}$$
$$xy - z^2 = 1.$$

Opgave 3. Et naturligt tal n, som højst er 500, har den egenskab at når man vælger et tal m tilfældigt blandt tallene $1, 2, 3, \ldots, 499, 500$, så er sandsynligheden $\frac{1}{100}$ for at m går op i n. Bestem den størst mulige værdi af n.

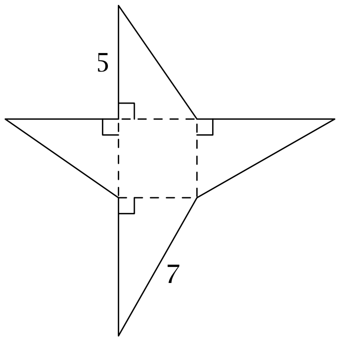
Opgave 4. Af tallene $1, 2, 3, \ldots, 2006$ skal udtages ti forskellige. Vis at man kan udtage ti forskellige tal med sum større end 10039 på flere måder, end man kan udtage ti forskellige tal med sum mindre end 10030.

Opgave 5. Vi ser på en spidsvinklet trekant ABC. Højden fra A er AD, højden fra D i trekant ABD er DE, og højden fra D i trekant ACD er DF.

(a) Bevis at trekanterne ABC og AFE er ensvinklede.

(b) Bevis at linjestykket EF og de tilsvarende linjestykker dannet med udgangspunkt i hjørnerne B og C alle er lige lange.

Opgave 1. Figuren stammer fra et udklipsark. Når sidefladerne foldes op langs de stiplede linjer, fremkommer en (ikke ligesidet) pyramide med kvadratisk grundflade. Beregn grundfladens areal.

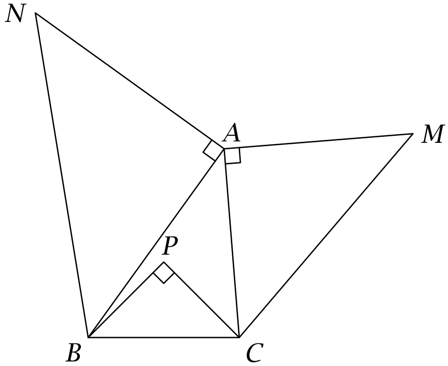


Opgave 2. Bestem for ethvert positivt reelt tal a antallet af løsninger (x, y) til ligningssystemet

$$|x| + |y| = 1,$$
$$x^2 + y^2 = a,$$

hvor x og y er reelle tal.

Opgave 3. Punktet P ligger inden i $\triangle ABC$ så $\triangle BPC$ er ligebenet, og vinkel P er ret. Desuden er $\triangle BAN$ og $\triangle CAM$ begge ligebenede og med en ret vinkel i A, og begge ligger uden for $\triangle ABC$. Vis at $\triangle MNP$ er ligebenet og retvinklet.



Opgavesættet fortsættes →

Opgave 4. Fjorten elever skriver hver et helt tal på tavlen. Da de sidenhen møder deres matematiklærer Homer Grog, fortæller de ham at uanset hvilket tal de slettede på tavlen, så kunne de resterende tal deles i tre grupper med samme sum. De fortæller ham også at tallene på tavlen var hele tal. Er det nu muligt for Homer Grog at afgøre hvilke tal eleverne skrev på tavlen?

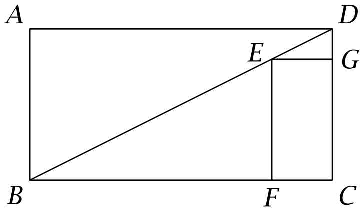
Opgave 5. For hvilke reelle tal p har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{1}{x_1^2} &= px_2, \\ x_2^4 + \frac{1}{x_2^2} &= px_3, \\ &\vdots \\ x_{2004}^4 + \frac{1}{x_{2004}^2} &= px_{2005}, \\ x_{2005}^4 + \frac{1}{x_{2005}^2} &= px_1 \end{aligned}$$

netop én løsning $(x_1, x_2, \dots, x_{2005})$, hvor $x_1, x_2, \dots, x_{2005}$ er reelle tal?

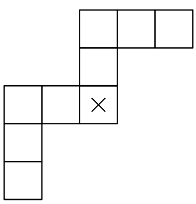
Opgaver · 2004

Opgave 1. Rektanglet $ABCD$ er dobbelt så bredt som det er højt, og rektanglet $EFCG$ er dobbelt så højt som det er bredt. Punktet E ligger på diagonalen BD. Hvor stor en brøkdel udgør det lille rektangels areal af det stores?



Opgave 2. Vis at hvis a og b er hele tal, og $a^2 + b^2 + 9ab$ er delelig med 11, så er $a^2 - b^2$ delelig med 11.

Opgave 3. Cifrene fra 1 til 9 er placeret i figuren nedenfor med ét ciffer i hvert kvadrat. Summen af tre tal placeret i samme vandrette eller lodrette linje er 13. Vis at der på den markerede plads står 4.



Opgave 4. Find alle sæt (x, y, z) af reelle tal som opfylder

$$\begin{aligned} x^3 - y^2 &= z^2 - x \\ y^3 - z^2 &= x^2 - y \\ z^3 - x^2 &= y^2 - z. \end{aligned}$$

Opgave 5. Bestem for hvilke naturlige tal n man kan dække et $2n \times 2n$-skakbræt med ikke-overlappende L-brikker. En L-brik dækker fire felter og har udseende som bogstavet L. Brikken må roteres og spejles efter behag.

Opgaver · 2003

Opgave 1. I en retvinklet trekant er summen $a + b$ af kateternes længder 24, mens højden h_c på hypotenusen c har længden 7. Bestem hypotenusens længde.

Opgave 2. Løs inden for de reelle tal ligningen

$$x^5 + \lfloor x \rfloor = 20,$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal mindre end eller lig x.

Opgave 3. Bestem de hele tal n hvor

$$|2n^2 + 9n + 4|$$

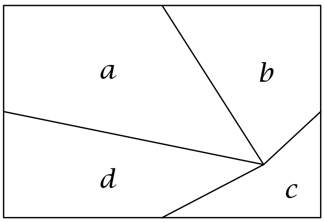
er et primtal.

Opgave 4. Georg og hans mor elsker pizza. De køber en pizza som er formet som en ligesidet trekant. Georg kræver at få lov til at dele pizzaen ved et lige snit og dernæst vælge først. Moren accepterer modvilligt, idet hun dog vil pege på et punkt i pizzaen som snittet skal passere. Bestem den største brøkdel af pizzaen som moren med denne procedure med sikkerhed kan få.

Opgave 5. For hvilke naturlige tal $n \geq 2$ kan tallene fra 1 til 16 stilles op i et kvadratisk skema så de fire rækkesummer og de fire søjlesummer alle er indbyrdes forskellige og delelige med n?

Opgaver · 2002

Opgave 1. Fra et indre punkt i et rektangel trækkes forbindelseslinjer til de fire siders midtpunkter. Herved opstår fire områder (polygoner) med arealerne a, b, c og d (se figur). Bevis at $a + c = b + d$.



Opgave 2. Bevis at for ethvert helt tal n større end 5 kan et kvadrat deles i n kvadrater.

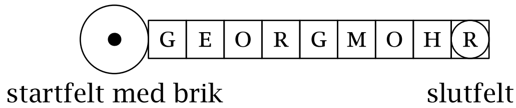
Opgave 3. To positive hele tal har summen 2002. Kan 2002 gå op i de to tals produkt?

Opgave 4. I trekant ABC er $\angle C = 90^\circ$ og $|AC| = |BC|$. Desuden er M et indre punkt i trekanten så $|MC| = 1$, $|MA| = 2$ og $|MB| = \sqrt{2}$. Beregn $|AB|$.

Opgave 5. Homer Grog har på ti sedler skrevet tallene 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ét tal på hver seddel. Han arrangerer sedlerne i en rundkreds og forsøger at få den største sum S af tallene på tre på hinanden følgende sedler til at blive mindst mulig. Hvad er den mindste værdi S kan antage?

Opgaver · 2001

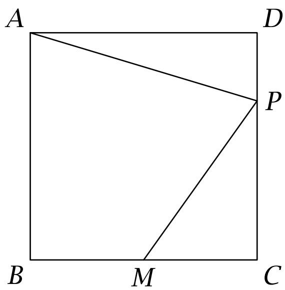
Opgave 1. Til GEORG MOHR-spillet bruges en spillebrik, en GEORG MOHR-terning (dvs. en terning, hvis seks sider viser bogstaverne G, E, O, R, M og H) samt en spilleplade:



Ved hvert slag rykker man frem til førstkommende felt med det bogstav terningen viser; hvis det ikke er muligt at rykke frem, bliver man stående. Peter spiller GEORG MOHR-spillet. Bestem sandsynligheden for at han gennemfører spillet i to slag.

Opgave 2. Findes der et naturligt tal n så at tallet $n!$ har præcis 11 nuller til slut? (Med $n!$ betegnes tallet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$).

Opgave 3. I kvadratet $ABCD$ med sidelængde 2 er M midtpunkt af BC og P et punkt på DC. Bestem den mindste værdi af $|AP| + |PM|$.



Opgave 4. Vis at ethvert tal af formen

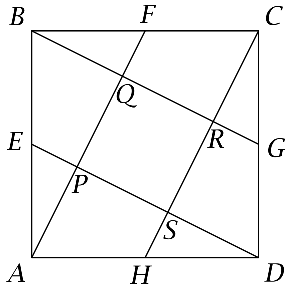
$$4444\ldots 44 - 88\ldots 8,$$

hvor der er dobbelt så mange 4-taller som 8-taller, er et kvadrattal.

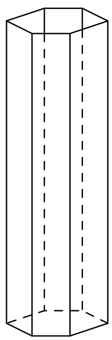
Opgave 5. Kan der i et kvadrat placeres en ligesidet trekant hvis areal udgør mere end $\frac{9}{20}$ af kvadratets areal?

Opgaver · 2000

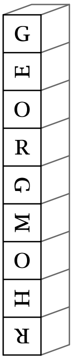
Opgave 1. Firkant $ABCD$ er et kvadrat med sidelængden 1, og punkterne E, F, G og H er sidernes midtpunkter. Bestem arealet af firkant $PQRS$.



Opgave 2. I et glas med lodrette rektangulære sideflader og med en regulær sekskant som bund og låg kan der lige netop anbringes tre ens kugler oven på hinanden, således at hver af kuglerne rører alle siderne i glasset. Glassets rumfang er $108\,\text{cm}^3$. Hvad er sidelængden i grundfladen?



Opgave 3. En GEORG MOHR-terning er en terning på hvis seks sideflader der er trykt henholdsvis G, E, O, R, M og H. Peter har ni helt ens GEORG MOHR-terninger. Kan det lade sig gøre at stable dem oven på hinanden til et tårn der på hver af de fire sider i en eller anden rækkefølge viser bogstaverne G E O R G M O H R?



Opgave 4. Et rektangulært gulv er dækket af et antal lige store kvadratiske fliser. Fliserne langs kanten er røde, og resten er hvide. Der er lige mange røde og hvide fliser. Hvor mange fliser kan der være?

Opgave 5. Bestem samtlige mulige værdier af $x + \frac{1}{x}$, hvor det reelle tal x tilfredsstiller ligningen

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

og løs denne ligning.

Opgaver · 1999

Opgave 1. I et koordinatsystem er en cirkel med radius 7 og centrum på y-aksen anbragt inden i parablen med ligning $y = x^2$, således at den lige netop rører parablen i to punkter. Bestem koordinatsættet til cirklens centrum.

Opgave 2. En fisker har fanget et antal fisk. De tre tungeste udgør tilsammen 35 % af fangstens samlede vægt. Dem sælger han. Herefter udgør de tre letteste tilsammen 5/13 af vægten af resten. Hvor mange fisk fangede han?

Opgave 3. En funktion f opfylder

$$f(x) + xf(1-x) = x$$

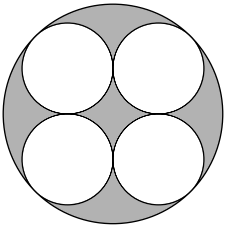
for alle reelle tal x. Bestem tallet $f(2)$. Bestem en forskrift for f.

Opgave 4. Nanna og Sofie bevæger sig i samme retning ad to parallelle stier, der ligger i afstanden 200 meter fra hinanden. Nannas hastighed er 3 meter i sekundet, Sofies kun 1 meter i sekundet. En høj, cylindrisk bygning med en diameter på 100 meter er placeret midt mellem de to stier. Da bygningen første gang bryder sigtelinjen mellem pigerne, er deres indbyrdes afstand 200 meter. Hvor lang tid går der før de to piger igen kan se hinanden?

Opgave 5. Findes der et tal hvis cifre er lutter 1-taller, og som 1999 går op i?

Opgaver · 1998

Opgave 1. På den viste figur har de små cirkler radius 1. Beregn arealet af den grå del af figuren.

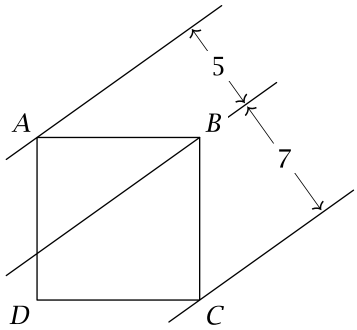


Opgave 2. For ethvert reelt tal m har ligningen

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$

to løsninger, som betegnes x_1 og x_2. Bestem m således at $x_1^2 + x_2^2$ er mindst mulig.

Opgave 3. På tre parallelle linjer med afstande som angivet på figuren ligger punkterne A, B og C således at firkant $ABCD$ er et kvadrat. Find arealet af dette kvadrat.



Opgave 4. Lad a og b være positive reelle tal med $a + b = 1$. Vis at

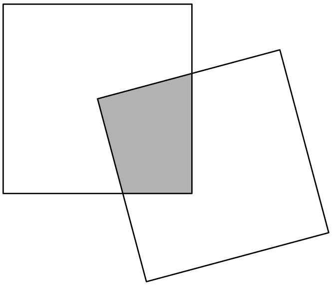
$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Opgave 5. En nydelig frugtanretning på et stort rundt fad er kantet med jordbær. Der er brugt mellem 100 og 200 bær til denne kant. Et lækkersultent barn spiser først et af jordbærrene og begynder derpå at gå rundt og rundt om fadet, idet hun spiser jordbær på følgende måde: Når hun har spist et bær, lader hun det næste ligge, derefter spiser hun det næste, lader det næste ligge, osv. Således fortsætter hun indtil der kun er et eneste jordbær tilbage. Dette bær er det der lå lige efter det allerførste hun spiste. Hvor mange bær lå der oprindelig?

Opgaver · 1997

Opgave 1. Lad $n = 123456789101112\ldots998999$ være det naturlige tal der fremkommer ved at skrive de naturlige tal fra 1 til 999 op efter hinanden. Hvad er ciffer nummer 1997 i n?

Opgave 2. To kvadrater, begge med sidelængde 1, er anbragt således at det ene har en vinkelspids i det andets midtpunkt. Bestem arealet af det grå område.

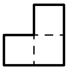


Opgave 3. Om femkant $ABCDE$ vides at vinkel A og vinkel C er rette, og at siderne $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|CD| = 10$, $|DE| = 6$. Endvidere gælder det at punktet C', der fremkommer ved spejling af C i linjen BD, ligger på linjestykket AE. Find vinkel E.

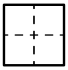
Opgave 4. Find alle par (x, y) af naturlige tal som tilfredsstiller ligningen

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 1997.$$

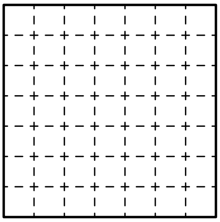
Opgave 5. Et 7×7-kvadrat er skåret ud i brikker af følgende typer:



type (a)



type (b)



Vis at netop en af brikkerne er af type (b).

Opgaver · 1996

Opgave 1. I trekant ABC er vinkel C ret, og de to kateter har begge længden 1. For et givet valg af punktet P på kateten BC afsættes punktet Q på hypotenusen og punktet R på den anden katete således at PQ er parallel med AC, og QR er parallel med BC. Derved opdeles trekanten i tre dele. Bestem de beliggenheder af punktet P for hvilke den rektangulære del har større areal end hver af de to andre dele.

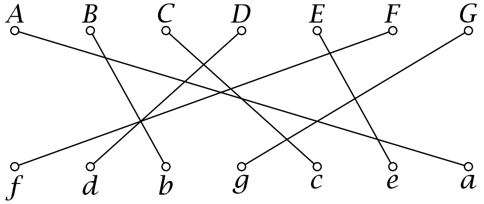
Opgave 2. Bestem alle reelle talsæt (x, y, z) som opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned} xy &= z \\ xz &= y \\ yz &= x. \end{aligned}$$

Opgave 3. Årets gaveidé fra BabyMath består af en serie på ni farvede plastikbeholdere af aftagende størrelse, skiftevis af form som en terning og en kugle. Alle beholdere kan åbnes og lukkes med et praktisk hængsel, og hver beholder kan lige netop rumme den næste i rækken. Den største og mindste beholder er begge terninger. Bestem forholdet mellem disse terningers kantlængder.

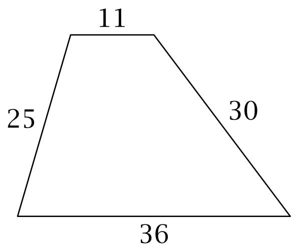
Opgave 4. Om et naturligt tal n oplyses at tallet n^2 har 7 som næstsidste ciffer. Hvad er sidste ciffer i n^2?

Opgave 5. I en balsal sidder syv herrer A, B, C, D, E, F og G lige over for syv damer a, b, c, d, e, f og g i en tilfældig rækkefølge. Da herrerne rejser sig og går over dansegulvet for at bukke for hver deres dame, er der en der bemærker at mindst to af herrerne tilbagelægger lige lange veje. Vil det altid være sådan? Figuren viser et eksempel. I eksemplet er $|Bb| = |Ee|$ og $|Dd| = |Cc|$.



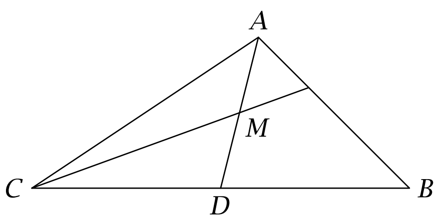
Opgaver · 1995

Opgave 1. Et trapez har sidelængder som angivet på figuren (siderne med længde 11 og 36 er parallelle). Beregn trapezets areal.



Opgave 2. Find alle sæt af fem på hinanden følgende hele tal med den egenskab at summen af kvadraterne på de tre første tal er lig med summen af kvadraterne på de to sidste.

Opgave 3. Fra vinkelspidsen C i trekant ABC tegnes en ret linje der halverer medianen fra A. I hvilket forhold deler denne linje siden AB?



Opgave 4. Løs ligningen

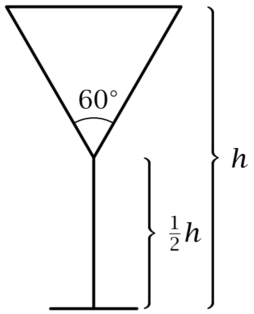
$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3,$$

hvor x er et reelt tal.

Opgave 5. I planen er der givet seks cirkler således at ingen af cirklerne indeholder en andens centrum. Vis at der ikke findes et punkt som ligger i alle cirklerne.

Opgaver · 1994

Opgave 1. Et vinglas med et tværsnit som vist har den egenskab at en appelsin af form som en kugle med radius 3 cm lige netop kan anbringes i glasset uden at rage op over glasset. Bestem højden h af glasset.



Opgave 2. Et tog gennemkører en bestemt strækning med en konstant fart. Hvis farten sættes op med 10 kilometer i timen, kan turen gøres 40 minutter hurtigere. Hvis farten derimod sættes ned med 10 kilometer i timen, tager turen 1 time længere. Hvor lang er den gennemkørte strækning?

Opgave 3. Tredjegradspolynomiet $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ har de tre rødder a, b og c. Angiv et tredjegradspolynomium med rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$.

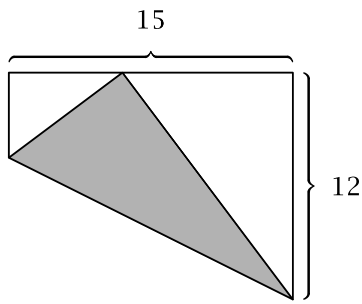
Opgave 4. I en retvinklet trekant hvori alle sidelængder er hele tal, har den ene katete længden 1994. Bestem længden af hypotenusen.

Opgave 5. I en retvinklet og ligebenet trekant har de to kateter begge længden 1. Find længden af det korteste linjestykke der deler trekanten i to figurer med samme areal, og angiv dette linjestykkes placering.

Opgaver · 1993

Opgave 1. Tre kammerater A, B og C har tilsammen 120 kroner. Først giver A lige så mange penge til B som B har i forvejen. Dernæst giver B lige så mange penge til C som C har i forvejen. Til sidst giver C lige så mange penge til A som A nu har. Efter disse transaktioner har A, B og C lige mange penge. Hvor mange penge havde hver af de tre kammerater oprindelig?

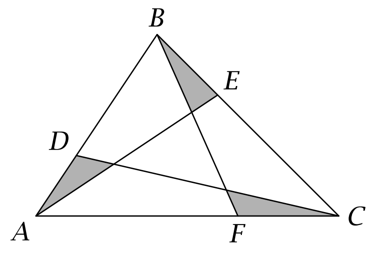
Opgave 2. Et rektangulært stykke papir har sidelængderne 12 og 15. Et hjørne bukkes om som vist på figuren. Bestem arealet af den grå trekant.



Opgave 3. Bestem samtlige reelle løsninger (x, y) til ligningssystemet

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16}.$$

Opgave 4. I trekant ABC afskærer punkterne D, E og F en tredjedel af de respektive sider. Vis at summen af arealerne af de tre grå trekanter er lig med arealet af midtertrekanten.



Opgave 5. I en papkasse ligger et stort antal løse sokker. Nogle af sokkerne er røde; de øvrige er blå. Det oplyses at det samlede antal sokker ikke overstiger 1993. Endvidere oplyses det at sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve når man på tilfældig måde udtrækker to sokker fra kassen, er $\frac{1}{2}$. Hvad er efter de foreliggende oplysninger det største antal røde sokker der kan befinde sig i kassen?

Opgaver · 1992

Opgave 1. En mand i en robåd befinder sig i punktet A i 2 kilometers afstand fra en retlinet kyststrækning. Ved først at ro ind til et punkt P og derefter spadsere langs med kysten når han frem til punktet B, som ligger i en afstand 5 kilometer fra C, der er punktet på kysten nærmest A. Mandens ro-hastighed er 3 kilometer i timen, og hans spadsere-hastighed er 5 kilometer i timen. Afgør hvor P skal placeres mellem C og B så at manden på kortest mulig tid kommer fra A til B.

Opgave 2. I en retvinklet trekant betegner a og b længderne af de to kateter. En cirkel med radius r har centrum på hypotenusen og rører begge kateter. Vis at

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}.$$

Opgave 3. Lad x og y være positive tal med $x + y = 1$. Vis at

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y}) \geq 9.$$

Opgave 4. Lad a, b og c betegne sidelængderne og m_a, m_b og m_c medianernes længder i en vilkårlig trekant. Vis at

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

Vis endvidere at der ikke findes noget snævrere interval der for enhver trekant indeholder størrelsen

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c}.$$

Opgave 5. I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differensen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel, som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er én seddel tilbage i hatten. Vis at der på denne seddel står et lige tal.

Opgaver · 1991

Opgave 1. Beskriv mængden af de punkter $P(x, y)$ som har dobbelt så stor afstand til $A(3, 0)$ som til $O(0, 0)$.

Opgave 2. Bevis at der for $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gælder at

$$\sin x + \tan x > 2x.$$

Opgave 3. En retvinklet trekant har omkreds 60, og højden på hypotenusen har længde 12. Bestem sidernes længder.

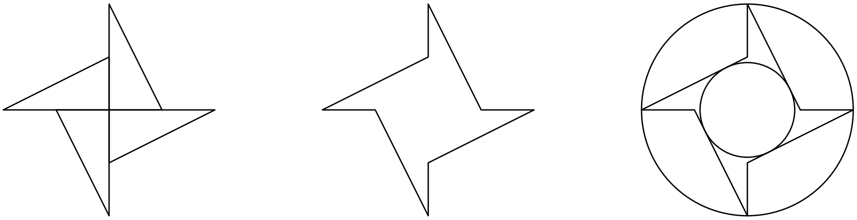
Opgave 4. Lad a, b, c og d være vilkårlige reelle tal. Bevis at hvis

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da,$$

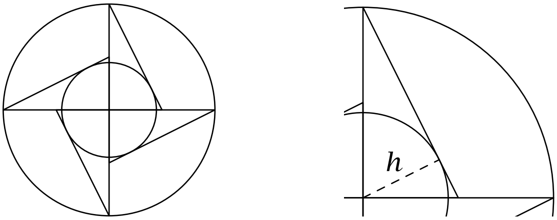
så er $a = b = c = d$.

Opgave 5. Vis at uanset hvordan 15 punkter afsættes inden for en cirkel med radius 2 (cirkelranden medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius 1 (cirkelranden medregnet) som indeholder mindst tre af de 15 punkter.

Opgave 1. *Fire retvinklede trekanter hver med katetelængderne* 1 *og* 2 *samles til en figur som vist. Hvor stor en brøkdel udgør den lille cirkels areal af den stores?*



Løsning. Den lille cirkels og den store cirkels centrum er placeret i det punkt hvor de fire trekanters rette vinkler mødes, da dette punkt har samme afstand til de fire trekanters fjerneste vinkelspidser samt samme afstand til de fire trekanters hypotenuser, som den lille cirkel tangerer. Radius i den store cirkel er derfor længden af trekantens længste katete, dvs. 2, og den store cirkels areal er $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$. Radius i den lille cirkel er lig med højden h på hypotenusen i de retvinklede trekanter (fordi hypotenusen er tangent til cirklen, og tangenten står vinkelret på radius i sit røringspunkt).



Længden af hypotenusen er ifølge Pythagoras' sætning $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, og højden h kan findes ved at udtrykke arealet af en af trekanterne på to måder $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sqrt{5}$, hvoraf $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Den lille cirkels areal er dermed $\pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}\pi$, og den lille cirkels areal udgør derfor $\frac{\frac{4}{5}\pi}{4\pi} = \frac{1}{5}$ af den store cirkels areal.

Opgave 2. *Bevis at der for ethvert helt tal n findes hele tal a, b og c så $n = a^2 + b^2 - c^2$.*

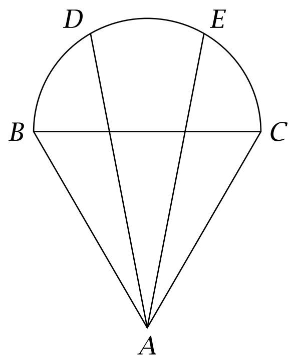
Løsning. Bemærk først at ethvert ulige tal n kan skrives som $n = 2m + 1$, hvor m er et helt tal. Da $(m + 1)^2 - m^2 = m^2 + 2m + 1 - m^2 = 2m + 1$, kan n skrives $n = (m + 1)^2 - m^2$. Dvs. at ethvert ulige tal kan skrives på formen $b^2 - c^2$, hvor b og c er hele tal.

Heraf følger nu at der for alle hele tal n findes hele tal a, b og c så $n = a^2 + b^2 - c^2$. Ethvert ulige tal kan nemlig skrives som $0^2 + b^2 - c^2$, og et ethvert lige tal kan skrives som summen af 1 og et ulige tal, altså som $1^2 + b^2 - c^2$.

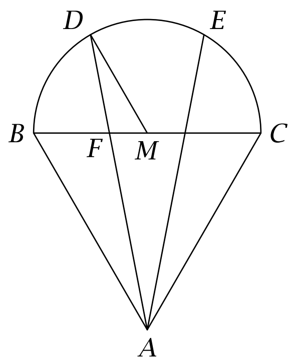
Opgave 3. *Kan* 29 *drenge og* 31 *piger stilles op på række med hinanden i hånden så ingen holder to piger i hånden?*

Løsning. Nej, det er ikke muligt. Lad pigerne og drengene være opstillet på en række. Rækken opdeles i to rækker således at hver anden person, startende med første person fra højre, udgør række A, og hver anden person, startende med anden person fra højre, udgør række B. At der ikke findes en person som holder to piger i hånden i den oprindelige række, svarer netop til at der ikke står to piger ved siden af hinanden hverken i række A eller i række B. Hvis der ikke findes en person der holder to piger i hånden, kan vi derfor slutte at højst 15 af de 30 personer i række A er piger, og højst 15 af de 30 personer i række B er piger, men da der i de to rækker tilsammen er 31 piger, er dette umuligt.

Opgave 4. *En ligesidet trekant ABC er givet. Med BC som diameter tegnes en halvcirkel uden for trekanten. På halvcirklen vælges punkter D og E så buelængderne BD, DE og EC er lige store. Bevis at linjestykkerne AD og AE deler siden BC i tre lige store stykker.*



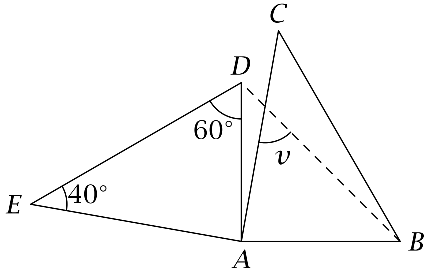
Løsning. Kald midtpunktet af linjestykket BC for M og skæringen mellem BC og AD for F.



Cirkeludsnittet BMD udgør netop en tredjedel af halvcirklen da buestykket BD udgør en tredjedel af halvcirkelbuen, og dermed er $\angle BMD = 60^\circ$. Kald trekantens sidelængde for s. Radius i halvcirklen er da $\frac{s}{2}$, dvs. at $|MD| = \frac{s}{2}$. Trekanterne FDM og FAB er derfor ensvinklede med forholdet $1 : 2$ da $\angle BFA = \angle DFM$, $\angle ABF = 60^\circ = \angle FMD$ og $|AB| = s = 2|DM|$. Af dette følger at $|BF| = 2|FM|$, dvs. $|BF| = \frac{2}{3}|BM| = \frac{1}{3}|BC|$, og altså at BF udgør en tredjedel af BC. Da figuren er symmetrisk omkring aksen AM, viser dette at linjestykkerne AD og AE deler siden BC i tre lige store stykker.

Opgave 5. *Det oplyses at* 2^{2010} *er et* 606*-cifret tal som begynder med* 1*. Hvor mange af tallene* $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2009}$ *begynder med* 4*?*
Løsning. I talrækken $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ er hvert tal efter det første det dobbelte af det foregående. Antallet af tallenes cifre øges derfor højst med et for hvert nyt tal i rækken. Det første tal, 1, begynder med 1. I øvrigt begynder et tal med 1 netop hvis det har et ciffer mere end sin forgænger. Da 2^{2010} begynder med 1 og består af 606 cifre, er de 2010 tal $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2009}$ netop alle dem fra rækken med højst 605 cifre, og der er netop 605 af dem som begynder med 1. De tal i rækken der begynder med 2 eller 3, ligger umiddelbart efter tallene der begynder med 1. Derfor er der også 605 af disse tal blandt $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2009}$. Tallene der begynder med 4, 5, 6 eller 7, ligger umiddelbart efter tallene der begynder med 2 eller 3. Derfor er der også 605 af disse tal blandt $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2009}$. Resten af de 2010 tal, dvs. i alt $2010 - 3 \cdot 605 = 195$, begynder med 8 eller 9. Disse tal og kun disse tal har lige foran sig i rækken et tal der begynder med 4. Derfor begynder 195 tal blandt tallene $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2009}$ med 4.

Opgave 1. *I figuren nedenfor fremkommer trekant ADE af trekant ABC ved en drejning på $90°$ om punktet A. Hvis vinkel D er $60°$, og vinkel E er $40°$, hvor stor er så vinkel v?*



Løsning. Vinkelsummen i en trekant er $180°$, og derfor er

$$\angle DAE = 180° - \angle ADE - \angle AED = 180° - 60° - 40° = 80°.$$

Da trekant ADE fremkommer ved at dreje trekant ABC $90°$ om punktet A, er $|AB| = |AD|$, $\angle BAD = 90°$ og $\angle BAC = \angle DAE = 80°$. Dermed er trekant ABD en retvinklet ligebenet trekant, og altså er $\angle ABD = \angle ADB = 45°$. Lad F være skæringspunktet mellem linjerne AC og BD, og betragt trekant ABF. Da vi nu kender to af vinklerne i trekant ABF, kan vi udregne vinkel v:

$$\begin{aligned} v &= 180° - \angle FAB - \angle FBA \\ &= 180° - \angle CAB - \angle DBA \\ &= 180° - 80° - 45° \\ &= 55°. \end{aligned}$$

Opgave 2. *Løs ligningssystemet*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} + x &= 3 \\ \frac{x}{x+y} &= 2. \end{aligned}$$

Løsning. Bemærk først at ifølge den anden ligning i ligningssystemet er $x = 0$ ikke en løsning. Antag derfor at $x \neq 0$, og gang første ligning i ligningssystemet igennem med x. Dette omformer systemet til

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} + x^2 &= 3x \\ \frac{x}{x+y} &= 2. \end{aligned}$$

Ved at trække ligningerne fra hinanden kan vi eliminere variablen y og opnå en andengradsligning $x^2 = 3x - 2$ i x. Ligningen $x^2 - 3x + 2 = 0$ omskrives til

$(x-1)(x-2)=0$, og vi kan heraf se at de eneste mulige x−værdier som kan løse ligningssystemet, er $x=1$ og $x=2$. Nu finder vi de tilhørende y−værdier. Ved at indsætte $x=1$ i den anden ligning i ligningssystemet får vi $\frac{1}{1+y}=2$, hvoraf $y=-\frac{1}{2}$. For at tjekke at dette også er en løsning til den første ligning, indsættes i denne, og det ses at det er en løsning. Ved indsættelse af $x=2$ i den anden ligning i ligningssystemet fås $\frac{2}{2+y}=2$, hvoraf $y=-1$. Som før tjekker vi at disse værdier af x og y også løser første ligning. De to eneste løsninger (x,y) til ligningssystemet er dermed $(1,-\frac{1}{2})$ og $(2,-1)$.

Opgave 3. *Georg har til en fest købt masser af fyldte chokolader, og da han tæller hvor mange han har, opdager han at antallet er et primtal. Han fordeler så mange af chokoladerne som muligt på* 60 *fade med lige mange på hvert. Han konstaterer derefter at han har mere end ét stykke tilbage, og at antallet af tiloversblevne stykker ikke er et primtal. Hvor mange stykker chokolade har Georg til overs?*

Løsning. Kald antallet af fyldte chokolader for n, antallet af fyldte chokolader på et fad for m og det overskydende antal for r. Da er

$$n = 60 \cdot m + r = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m + r$$

og

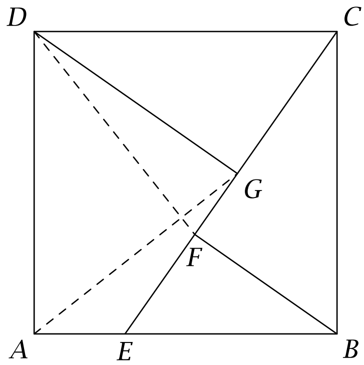
$$2 \leq r < 60.$$

Da n er et primtal, og r ikke er det, må n være større end r. Hvis et af primtallene 2, 3 eller 5 er divisor i r, er det også divisor i summen $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m + r$ da det er divisor i begge led, men dette er umuligt da n er et primtal større end r.

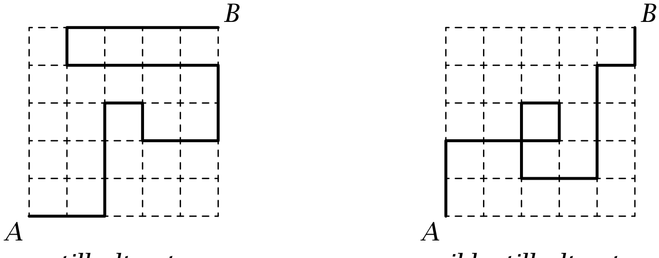
Primtallet 7 er derfor den mindst mulige divisor i r som er større end 1, og dermed er den størst mulige divisor i r som er mindre end r, højst $\frac{r}{7}$. Da $\frac{r}{7} < \frac{60}{7} < 9$, og 2, og dermed også 8, ikke er divisor i r, er 7 også den størst mulige divisor i r som er mindre end r, og eneste mulighed er derfor $r = 7^2 = 49$. Der er altså 49 fyldte chokolader tilovers.

Bemærkning. Mulige værdier af n er $109, 229, 349, 409, 709, 769, 829, 1069, \ldots$.

Opgave 4. *Lad E være et vilkårligt punkt forskelligt fra A og B på siden AB af et kvadrat $ABCD$, og lad F og G være punkter på linjestykket CE så BF og DG står vinkelret på CE. Bevis at $|DF| = |AG|$.*
Løsning. Ved en drejning på $90°$ omkring centrum af kvadratet $ABCD$ i retningen der fører B over i C, vil C føres over i D. Da linjen BF står vinkelret på linjen CG, og linjen CF står vinkelret på linjen DG, vil drejningen føre linjen BF i linjen CG og linjen CF i linjen DG. Dermed føres skæringspunktet F mellem linjerne BF og CF over i skæringspunktet G mellem linjerne CG og DG. Ved drejningen føres F altså i G og D i A, og dermed føres linjestykket DF i linjestykket AG. Da længder bevares ved drejning, er de to linjestykker DF og AG lige lange.

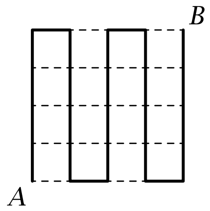


Opgave 5. *Forestil dig et kvadratisk skema der består af $n \times n$ felter med kantlængde 1, hvor n er et vilkårligt positivt helt tal. Hvad er den størst mulige længde af en rute du kan følge langs felternes kanter fra punktet A i nederste venstre hjørne til punktet B i øverste højre hjørne hvis du aldrig må vende tilbage til et punkt hvor du har været før? (Figuren viser for $n = 5$ et eksempel på en tilladt rute og et eksempel på en ikke tilladt rute).*

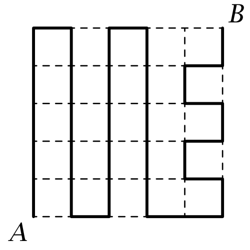


Løsning. Et skema der består af $n \times n$ felter, indeholder $(n+1)^2$ gitterpunkter, og da man starter i et gitterpunkt og for hvert skridt ender i et nyt gitterpunkt, kan en rute ikke være længere end $(n+1)^2 - 1$. Hvis n er lige, er det muligt at konstruere en rute af denne længde på følgende måde: Start i A og gå n skridt op. Gå derefter et skridt til højre, n skridt ned, et skridt til højre, n skridt op, osv.

Da n er lige, skal vi gå et lige antal skridt til højre for at nå B, og vi ender dermed med at gå op efter vores sidste skridt til højre, dvs. vi ender i B efter at have været gennem samtlige gitterpunkter i kvadratet. På figuren er vist et eksempel med $n = 4$. Når n er lige, er den maksimale længde af en tilladt rute dermed $(n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n$.



Når n er ulige, er det ikke muligt at konstruere en rute som går gennem alle gitterpunkter: Farv gitterpunkterne grønne og gule således at gitterpunkter på en lodret linje er skiftevis gule og grønne, og gitterpunkter på en vandret linje også er skiftevis gule og grønne. På denne måde får A og B samme farve, og hvert eneste skridt på ruten går mellem to gitterpunkter af forskellig farve, og dermed vil en rute fra A til B indeholde et lige antal skridt. En rute gennem alle gitterpunkter indeholder $(n + 1)^2 - 1$ skridt, men $(n + 1)^2 - 1$ er ulige når n er ulige, og det er dermed umuligt at gå gennem alle gitterpunkter når n er ulige. Man kan til gengæld konstruere en rute gennem alle på nær ét gitterpunkt på følgende måde: Start i A og gå som før n skridt op. Gå derefter et skridt til højre, n skridt ned, et skridt til højre, n skridt op og så videre, men stop efter at have taget samlet $n - 1$ skridt til højre. Tag herefter endnu et skridt til højre, et skridt op, et skridt til venstre, et skridt op, et skridt til højre, osv. Da n er ulige, vil denne rute ende i B efter et sidste skridt op, og derfor er det eneste gitterpunkt ruten ikke går igennem, gitterpunktet umiddelbart til venstre for B. På figuren er vist et eksempel med $n = 5$. Når n er ulige, er den maksimale længde af en rute dermed $(n + 1)^2 - 2 = n^2 + 2n - 1$.



Løsninger · 2008

Opgave 1. *Danmark har spillet en fodboldlandskamp mod Georgien. Kampen sluttede* 5–5*, og mellem første og sidste mål har kampen på intet tidspunkt stået lige. Intet land har scoret tre mål i træk, og Danmark scorede det sjette mål. Kan man ud fra disse oplysninger afgøre hvilket land der scorede det femte mål?*
Løsning. Georgien scorede det femte mål. For at vise dette antager vi det modsatte og viser at dette er umuligt. Antag at Danmark scorede det femte mål. Da Danmark også scorede det sjette mål, og intet land har scoret tre mål i træk, må Georgien have scoret det fjerde mål. De tre første mål kan ikke være scoret af samme land da ingen har scoret tre mål i træk. Altså har enten Georgien eller Danmark scoret netop et af de tre første mål. Hvis Georgien scorede netop et af de tre første mål, stod det lige efter fjerde mål, hvilket er umuligt. Hvis Danmark scorede netop et af de tre første mål, stod det lige efter sjette mål, hvilket også er umuligt. Antagelsen om at Danmark har scoret det femte mål, er derfor forkert, og eneste mulighed er at Georgien har scoret det femte mål. (Mulige scoringsrækkefølger er DDGDGDGDGG og GGDGGDDGDD).

Opgave 2. *Om tre hele tal p, q og r gælder at $p + q^2 = r^2$. Vis at* 6 *går op i pqr.*
Løsning. Ligningen omformes til

$$p = r^2 - q^2 = (r + q)(r - q).$$

▷ deleligheds-regler

Et tal er deleligt med 6 netop hvis det er deleligt med både 2 og 3. For at vise at produktet pqr er deleligt med 6, kan vi derfor i stedet vise at det er deleligt med både 2 og 3.

Produktet pqr er deleligt med 2 hvis mindst et af tallene er lige. Hvis både r og q er ulige, bliver $r + q$ lige, og dermed vil også $p = (r + q)(r - q)$ være lige. Derfor er mindst et af tallene p, q og r lige, og pqr er delelig med 2.

▷ division med rest

Produktet pqr er deleligt med 3 netop hvis mindst et af tallene p, q og r er deleligt med 3. Antag at hverken q eller r er delelige med 3. Når man dividerer dem med 3, har de dermed en rest på enten 1 eller 2. Hvis q og r har samme rest ved division med 3, er $r - q$ delelig med 3, og hvis de har forskellig rest ved division med 3, dvs. at den ene har rest 1 og den anden rest 2, da er $r + q$ delelig med 3. I begge tilfælde bliver $p = (r + q)(r - q)$ delelig med 3. Derfor må mindst et af tallene p, q og r være deleligt med 3, og dermed er produktet pqr også deleligt med 3.

Samlet har vi vist at pqr er delelig med både 2 og 3 og derfor også med 6.

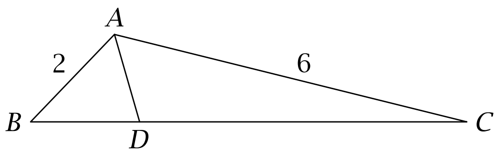
Opgave 3. *Tallene fra* 1 *til* 500 *er skrevet på tavlen. To spillere A og B sletter skiftevis ét tal ad gangen, og A sletter det første tal. Hvis summen af de to sidste tal på tavlen er delelig med* 3*, vinder B, i modsat fald vinder A. Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer denne spiller sejren?*
Løsning. Spiller B har en strategi så B vinder uanset hvordan A spiller. De 500 tal kan opdeles i 250 par således at n parres med $501 - n$ for $n = 1, 2, 3, \ldots, 250$. Med denne parring har hvert par summen 501, og hvert af de 500 tal indgår i

netop et par. Hver gang spiller A sletter et tal fra et par, sletter B umiddelbart efter det andet tal i parret. Hver gang A skal trække, har alle tal på tavlen derfor en makker på tavlen, og det er altså altid muligt for B at følge denne strategi. Når der kun er to tal tilbage på tavlen, danner de derfor et par med sum 501 som er delelig med 3. Dermed vinder spiller B ved at følge denne strategi.

Opgave 4. *I trekant ABC er $|AB| = 2$, $|AC| = 6$ og $\angle A = 120°$. Vinkelhalveringslinjen for vinkel A skærer siden BC i punktet D. Bestem længden af AD. Svaret ønskes angivet som brøk med hele tal i tæller og nævner.*
Løsning. Sæt $d = |AD|$. Arealet af trekant ABC er lig med summen af arealerne af trekant ACD og trekant ABD. Dermed er

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bd\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}cd\sin\frac{A}{2}.$$

Da $\sin v = \sin(180° - v)$ og $\angle A = 120°$, er $\sin A = \sin\frac{A}{2}$. Da vi yderligere ved at $b = 6$ og $c = 2$, kan vi reducere ligningen til $6 \cdot 2 = 6d + 2d$, og dermed $d = \frac{3}{2}$. ▷overgangsformler



Opgave 5. *For hvert positivt helt tal n dannes ud fra tallene 2^n og 5^n et nyt tal t_n som består af cifrene fra 2^n efterfulgt af cifrene fra 5^n. Fx er $t_4 = 16625$. Hvor mange cifre har tallet t_{2008}?*
Løsning. Antallet af cifre i 2^{2008} og 5^{2008} betegnes henholdsvis p og q. Vi ønsker altså at bestemme tallet $p + q$ da det er antallet af cifre i t_{2008}. Tallene p og q er bestemt ved dobbeltulighederne

$$10^{p-1} < 2^{2008} < 10^p \quad \text{og} \quad 10^{q-1} < 5^{2008} < 10^q,$$

hvor første ulighedstegn i begge uligheder ikke kan være lighedstegn da hverken 2^{2008} eller 5^{2008} er en potens af 10. Ved at kombinere ulighederne fås

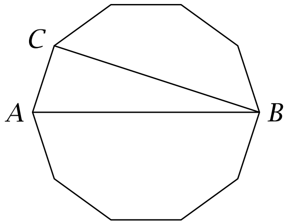
$$10^{p-1} \cdot 10^{q-1} < 2^{2008} \cdot 5^{2008} < 10^p \cdot 10^q$$

og videre

$$10^{p+q-2} < 10^{2008} < 10^{p+q}.$$

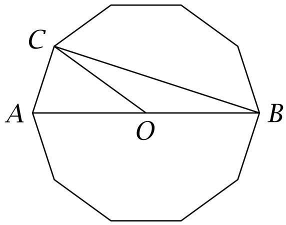
Af denne dobbeltulighed fremgår dels at $p + q < 2010$ (fordi $p + q - 2 < 2008$), dels $2008 < p + q$. Altså er $p + q = 2009$. Antallet af cifre i tallet t_{2008} er således 2009.

Opgave 1. *I en regulær tikant ligger trekant ABC som vist på figuren. Hvor stor en brøkdel udgør trekantens areal af hele tikantens areal? Svaret ønskes opskrevet som en brøk hvor tæller og nævner er hele tal.*



▷kongruente trekanter

Løsning. Lad O være tikantens midtpunkt. Punktet O er midtpunktet af AB, og ved at forbinde O med tikantens hjørner opdeles tikanten i ti kongruente trekanter. Dermed udgør arealet af trekant AOC en tiendedel af tikantens areal. Trekant ABC har dobbelt så stort areal som trekant AOC da grundlinjen AB i trekant ABC er dobbelt så lang som grundlinjen AO i trekant AOC, mens højden fra C er den samme. Trekant ABC udgør altså $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ af tikantens areal.

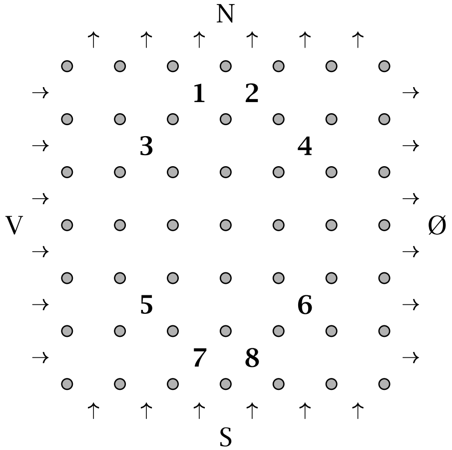


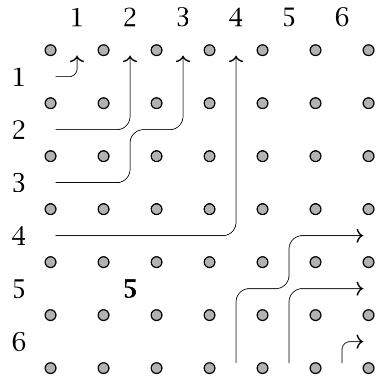
Opgave 2. *Hvad er det sidste ciffer i tallet* 2007^{2007}*?*
Løsning. Sidste ciffer i et produkt afhænger kun af sidste ciffer i de to faktorer. Dette ses ved at skrive faktorerne $10a + b$ og $10c + d$. Produktet af disse to faktorer er

$$\begin{aligned}(10a+b)(10c+d) &= 100ac + 10ad + 10bc + bd \\ &= 10(10ac + ad + bc) + bd,\end{aligned}$$

hvilket viser at sidste ciffer i produktet af $10a + b$ og $10c + d$ er identisk med sidste ciffer i bd. Sidste ciffer i 2007^2 er derfor identisk med sidste ciffer i $7^2 = 49$, dvs. 9. Sidste ciffer i $2007^3 = 2007 \cdot 2007^2$ er identisk med sidste ciffer i $7 \cdot 9 = 63$, dvs. 3. Sidste ciffer i $2007^4 = (2007^2)^2$ er identisk med sidste ciffer i $9^2 = 81$, dvs. 1. Sidste ciffer i $2007^{2007} = (2007^4)^{501} \cdot 2007^3$ er derfor identisk med sidste ciffer i $1^{501} \cdot 3$, dvs. 3.

Opgave 3. *En snedig drage bevogter en prinsesse. For at overvinde dragen og vinde prinsessen skal man løse følgende opgave: Dragen har i nogle af felterne i søjlehallen (se figur) anbragt tallene* 1–8*. Selv må man i resten af felterne anbringe tallene* 9–36*. Tallene* 1–36 *skal stå således at* enhver *tur der starter med at man går ind fra enten syd eller vest, og ender med at man går ud mod enten nord eller øst, går gennem mindst ét tal fra* 5*-tabellen. (På figuren er nord, syd, øst og vest angivet med* N, S, Ø *og* V*). Georg ønsker at vinde prinsessen. Kan det lade sig gøre?*

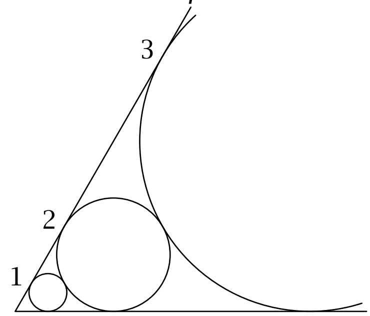




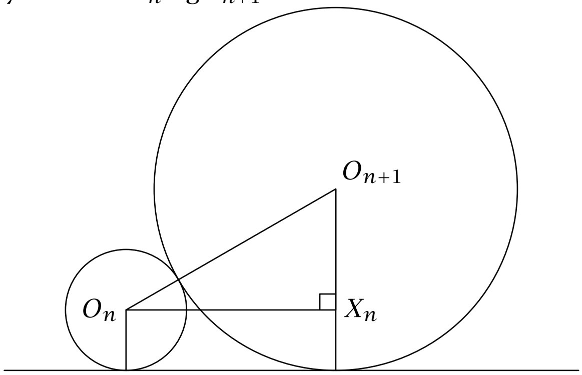
Løsning. Rækkerne af felter i søjlehallen nummereres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ fra nord mod syd, og søjlerne af felter nummereres tilsvarende fra vest mod øst. Feltet i række n og søjle m betegnes (n, m). Blandt tallene 1–36 er der netop syv tal fra femtabellen, hvor det ene allerede er placeret af dragen i feltet $(5, 2)$. Hvis Georg skal vinde prinsessen, skal han placere de resterende seks tal i femtabellen således at hver eneste rute gennem søjlehallen indeholder mindst et af de syv tal fra femtabellen. Betragt først (se figur) følgende tre nordvestlige ruter $(1, 1)$, $(2, 1) \to (2, 2) \to (1, 2)$ og $(3, 1) \to (3, 2) \to (2, 2) \to (2, 3) \to (1, 3)$. Da eneste overlappende felt mellem disse tre ruter er $(2, 2)$, som allerede er optaget af et tal der ikke tilhører femtabellen, skal Georg benytte mindst tre tal fra femtabellen for at klare kravet vedrørende disse tre ruter. Han skal ligeledes bruge yderligere tre tal fra femtabellen hvis han vil klare de tilsvarende tre sydøstlige ruter.

Hvis han også skal klare ruten der starter i $(4, 1)$, forsætter mod øst til $(4, 4)$ og derfra går mod nord og ud gennem $(1, 4)$, kræver det yderligere at et tal fra femtabellen placeres på denne rute da den ikke har nogen felter tilfælles med de seks andre nævnte ruter. For at klare de nævnte syv ruter skal Georg altså bruge mindst syv tal fra femtabellen, men han har kun seks til rådighed, og det syvende, der er sat af dragen, klarer ingen af de nævnte ruter. Derfor er det umuligt for Georg at placere tallene så alle ruter gennem søjlehallen indeholder et tal fra femtabellen, og Georg kan derfor ikke vinde prinsessen.

Opgave 4. *Figuren viser en vinkel på* 60°*, hvori der ligger* 2007 *nummererede cirkler (kun de tre første er vist på figuren). Cirklerne er nummererede efter størrelse. Cirklerne tangerer vinklens ben og hinanden som vist på figuren. Cirkel nummer* 1 *har radius* 1*. Bestem radius af cirkel nummer* 2007*.*



Løsning. Toppunktet i vinklen på 60° betegnes O, og centrum og radius i cirkel nummer n betegnes henholdsvis O_n og r_n. Linjen gennem alle centrene halverer vinklen og danner dermed en vinkel på 30° med hvert vinkelben. For at finde sammenhængen mellem r_n og r_{n+1} konstrueres en retvinklet trekant hvor to af siderne kan udtrykkes ved r_n og r_{n+1}:



Lad X_n være et punkt på linjen gennem O_n parallel med det ene vinkelben således at vinkel $\angle O_nX_nO_{n+1}$ er ret. Da O_nX_n er parallel med det ene vinkelben, er $\angle X_nO_nO_{n+1} = 30^\circ$, og ifølge formlen for sinus i en retvinklet trekant er

▷specielle vinkler

$$\frac{|X_nO_{n+1}|}{|O_nO_{n+1}|} = \sin(\angle X_nO_nO_{n+1}) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Da $O_{n+1}X_n$ står vinkelret på det ene vinkelben, O_nX_n er parallel med det, og afstanden fra henholdsvis O_n og O_{n+1} til vinkelbenet er r_n og r_{n+1}, er $|X_nO_{n+1}| = r_{n+1} - r_n$. Desuden er $|O_nO_{n+1}| = r_n + r_{n+1}$ da de to cirkler tangerer hinanden. Samlet ses at

$$\frac{r_{n+1} - r_n}{r_n + r_{n+1}} = \frac{|X_nO_{n+1}|}{|O_nO_{n+1}|} = \frac{1}{2}.$$

Heraf fås $2r_{n+1} - 2r_n = r_n + r_{n+1}$, og ved at isolere r_{n+1} fås $r_{n+1} = 3r_n$. Radius i cirkel nummer $n+1$ er altså tre gange så stor som radius i cirkel nummer n, og dermed er $r_{2007} = 3^{2006} \cdot r_1 = 3^{2006}$.

Opgave 5. *Tallene* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *er bestemt ved at* $a_0 = 0$*, og*

$$a_n = \begin{cases} 1 + a_{n-1} & \textit{når } n \textit{ er positiv og ulige,} \\ 3a_{n/2} & \textit{når } n \textit{ er positiv og lige.} \end{cases}$$

Hvor mange af disse tal er mindre end 2007*?*

Løsning. Først vises at følgen er voksende, dvs. at $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, ved at vise at det modsatte er umuligt. Antag nemlig at følgen ikke er voksende, dvs. at der findes et n så $a_n \le a_{n-1}$, og lad M være det mindste sådanne n. For ulige n gælder klart $a_n > a_{n-1}$ ifølge definitionen af a_n, så tallet M må være lige. Vi skriver $M = 2k$ og bemærker at $a_M = 3a_k$, $a_{M-1} = 1 + a_{M-2}$ og $a_{M-2} = 3a_{k-1}$. Da M var det mindste tal n med egenskaben $a_n \le a_{n-1}$, og da k er mindre end M, gælder $a_k > a_{k-1}$. Da a_k og a_{k-1} er hele tal, følger at $a_k \ge 1 + a_{k-1}$. Heraf fås videre $3a_k \ge 3 + 3a_{k-1}$ og

$$a_M = 3a_k \ge 3 + 3a_{k-1} = 3 + a_{M-2} = 2 + 1 + a_{M-2} = 2 + a_{M-1} > a_{M-1},$$

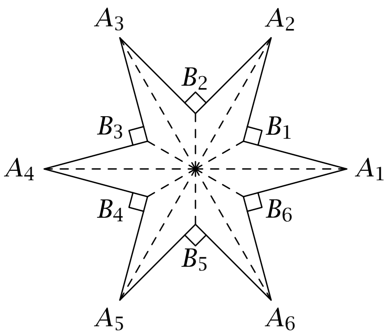
hvilket er i modstrid med $a_M \le a_{M-1}$. Dermed er antagelsen om at der findes et n så $a_n \le a_{n-1}$, forkert, og vi har derfor vist at følgen er voksende.

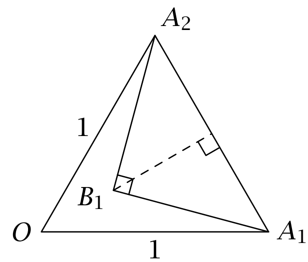
Antallet af tal a_n som er mindre end 2007, kan nu tælles ved at finde det største tal m for hvilket $a_m < 2007$, for da er $a_0, a_1, \ldots, a_m$ mindre end 2007, mens $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ er større. For $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ er $a_n = 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187$ hvor det sidste tal er større end 2007, dvs. at $m < 128$. Tallet a_{127} beregnes:

$$\begin{aligned} a_{127} &= a_{126} + 1 = 3a_{63} + 1 = 3a_{62} + 4 = 9a_{31} + 4 \\ &= 9a_{30} + 13 = 27a_{15} + 13 = 27a_{14} + 40 = 81a_7 + 40 \\ &= 81a_6 + 121 = 243a_3 + 121 = 243a_2 + 364 = 729a_1 + 364 = 1093. \end{aligned}$$

Da dette tal er mindre end 2007, er $m = 127$, dvs. at $a_0, a_1, \ldots, a_{127}$ er mindre end 2007 mens resten er større, og dermed er antallet af a_n mindre end 2007 lig med 128.

Opgave 1. *Den viste stjerne er symmetrisk om hver af de seks viste diagonaler. Alle forbindelseslinjer fra punkterne A_1, A_2, ..., A_6 til stjernens centrum har længden 1, og alle de viste vinkler ved B_1, B_2, ..., B_6 er rette. Bestem stjernens areal.*





Løsning. Stjernens areal er lig med arealet af sekskanten $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ minus arealet af de seks trekanter $A_1B_1A_2, A_2B_2A_3, \ldots, A_6B_6A_1$. Kald stjernens centrum for O. Sekskanten $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ består af seks trekanter $OA_1A_2, OA_2A_3, \ldots,$ OA_6A_1 som alle er ligesidede med sidelængde 1 da vinklen ved centrum O er $\frac{360°}{6} = 60°$, og denne vinkels to hosliggende sider har længde 1. Højden h i en ligesidet trekant med sidelængde 1 kan beregnes ved Pythagoras' sætning:

▷ligesidet trekant

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Arealet af sekskanten $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ er derfor $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. De seks trekanter $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., $A_6B_6A_1$ er ligebenede og retvinklede med hypotenuse 1. Højden på hypotenusen har derfor længden $\frac{1}{2}$. Det samlede areal af disse seks trekanter er dermed $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Arealet af stjernen er dermed $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

Opgave 2. *Bestem alle reelle talsæt (x, y, z) som opfylder*

$$x + y = 2 \quad \textit{og}$$
$$xy - z^2 = 1.$$

Løsning. Antag at (x, y, z) er en løsning til ligningssystemet. Af første ligning følger at $y = 2 - x$, og dette kombineret med anden ligning giver

$$z^2 = xy - 1 = x(2 - x) - 1 = 2x - x^2 - 1 = -(x - 1)^2.$$

Da z^2 er ikke-negativ, og $-(x - 1)^2$ er ikke-positiv, er eneste mulighed at begge er 0, dvs. at $z = 0$, $x = 1$ og yderligere $y = 2 - x = 1$. Hvis der findes en løsning, må den derfor være $(x, y, z) = (1, 1, 0)$, og ved indsættelse i begge ligninger ses at dette faktisk er en løsning.

Opgave 3. *Et naturligt tal n, som højst er* 500*, har den egenskab at når man vælger et tal m tilfældigt blandt tallene* $1, 2, 3, \dots, 499, 500$*, så er sandsynligheden* $\frac{1}{100}$ *for at m går op i n. Bestem den størst mulige værdi af n.*

Løsning. Når sandsynligheden er $\frac{1}{100}$ for at et tilfældigt tal blandt tallene $1, 2, 3, \dots, 500$ går op i det hele positive tal n, og n højst er 500, betyder det at n har netop fem positive divisorer inklusive tallene 1 og n. Lad $1, p, q, r, n$ være de fem divisorer i n således at $1 < p < q < r < n$. Da p er den mindste divisor i n som er større end 1, må p være et primtal. Tallene $\frac{n}{p}$, $\frac{n}{q}$ og $\frac{n}{r}$ er også divisorer i n med

$$1 < \frac{n}{r} < \frac{n}{q} < \frac{n}{p} < n,$$

så vi må have at $n = pr = q^2$. Af dette ses at primtallet p er divisor i q^2 og dermed også i q, og da der ikke er andre divisorer i n end p som er mindre end q, må $q = p^2$ og $n = q^2 = p^4$. Vi leder altså efter det største tal blandt tallene $1, 2, 3, \dots, 500$ som er en fjerdepotens af et primtal. Da $3^4 = 81 < 500 < 625 = 5^4$, er $3^4 = 81$ den størst mulige værdi af n. ▷primtal

Opgave 4. *Af tallene* $1, 2, 3, \dots, 2006$ *skal udtages ti forskellige. Vis at man kan udtage ti forskellige tal med sum større end* 10039 *på flere måder, end man kan udtage ti forskellige tal med sum mindre end* 10030*.*

Løsning. Lad M betegne mængden $\{1, 2, 3, \dots, 2006\}$. Antag at tallene $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ er ti forskellige tal fra mængden M med sum mindre end 10030. Tallene $b_i = 2007 - a_i$, $i = 1, 2, \dots, 10$, er dermed også ti forskellige tal fra mængden M, og om deres sum S ved vi at

$$\begin{aligned} S &= b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} \\ &= (2007 - a_1) + (2007 - a_2) + \cdots + (2007 - a_{10}) \\ &= 10 \cdot 2007 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) \\ &> 20070 - 10030 \\ &= 10040. \end{aligned}$$

Da forskellige valg af $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ giver forskellige valg af $b_1, b_2, \dots, b_{10}$, er antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum større end 10040 mindst lige så stort som antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum mindre end 10030. Når summen er større end 10040, er den også større end 10039. Desuden har de ti tal 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009 sum 10040, og derfor er antallet af måder at udvælge ti forskellige tal fra M med sum større end 10039 større end antallet af måder at vælge ti forskellige tal fra M med sum mindre end 10030.

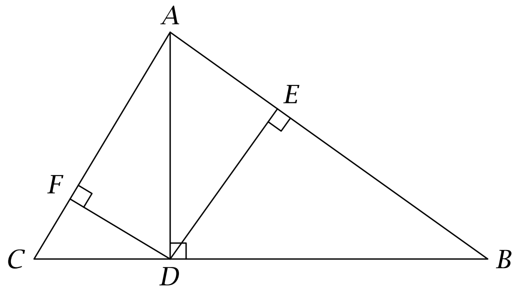
Opgave 5. *Vi ser på en spidsvinklet trekant ABC. Højden fra A er AD, højden fra D i trekant ABD er DE, og højden fra D i trekant ACD er DF.*

(a) *Bevis at trekanterne ABC og AFE er ensvinklede.*

(b) *Bevis at linjestykket EF og de tilsvarende linjestykker dannet med udgangspunkt i hjørnerne B og C alle er lige lange.*

Løsning. Trekant ABD og trekant ADE er ensvinklede da de begge er retvinklede og desuden har vinklen ved A tilfælles. Ifølge formlen for sinus i en retvinklet trekant er $\frac{|AD|}{|AB|} = \sin B$ og $\frac{|AD|}{|AC|} = \sin C$. Trekanterne ADE og ABD er derfor ensvinklede med forholdet $\sin B$, og derfor er $|AE| = |AD| \sin B = |AC| \sin C \sin B$. Tilsvarende fås $|AF| = |AB| \sin B \sin C$. Da trekanterne AFE og ABC har vinkel A fælles, og $\frac{|AF|}{|AB|} = \sin B \sin C = \frac{|AE|}{|AC|}$ er trekanterne ensvinklede med forholdet $\sin B \sin C$.

▷ensvinklede trekanter

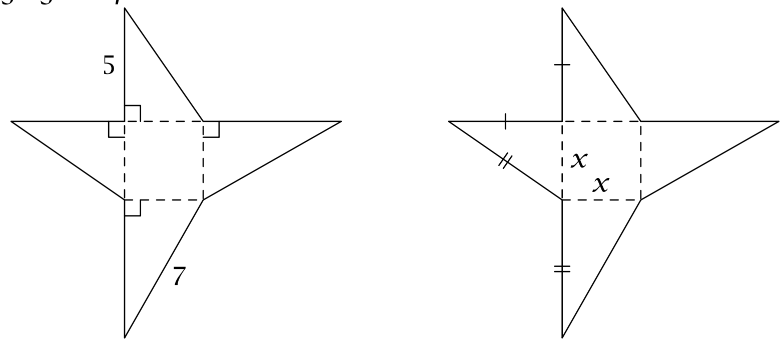


Nu udnytter vi at trekanterne AFE og ABC er ensvinklede med forholdet $\sin B \sin C$, til at bestemme $|EF|$, og får

$$|EF| = |BC| \sin B \sin C = \frac{|BC|}{\sin A} \sin A \sin B \sin C.$$

Længden af de tilsvarende linjestykker dannet med udgangspunkt i hjørnerne B og C kan findes på samme måde, og de er dermed henholdsvis $\frac{|AC|}{\sin B} \sin A \sin B \sin C$ og $\frac{|AB|}{\sin C} \sin A \sin B \sin C$. Ifølge sinusrelationen er $\frac{|BC|}{\sin A} = \frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin C}$. Altså er de tre linjestykker lige lange.

Opgave 1. *Figuren stammer fra et udklipsark. Når sidefladerne foldes op langs de stiplede linjer, fremkommer en (ikke ligesidet) pyramide med kvadratisk grundflade. Beregn grundfladens areal.*



Løsning. Sidelængden i den kvadratiske grundflade kaldes x. Hypotenusen i en retvinklet trekant med kateterne x og 5 danner fælles kant i pyramiden med en katete i en retvinklet trekant hvor den anden katete er x, og hypotenusen er 7. Ifølge Pythagoras gælder så $x^2 + 5^2 = 7^2 - x^2$, og dermed er grundfladens areal $x^2 = \frac{49-25}{2} = 12$.

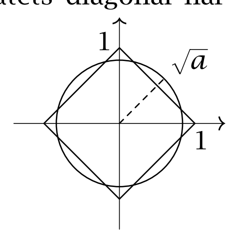
Opgave 2. *Bestem for ethvert positivt reelt tal a antallet af løsninger (x, y) til ligningssystemet*

$$
\begin{aligned}
|x| + |y| &= 1, \\
x^2 + y^2 &= a,
\end{aligned}
$$

hvor x og y er reelle tal.

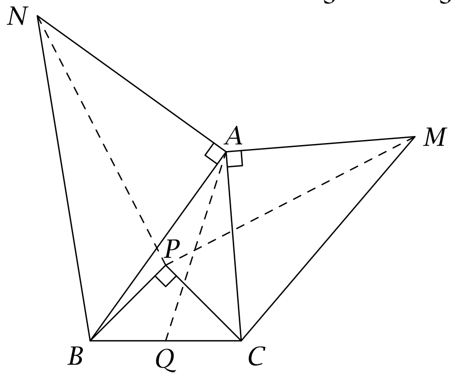
Løsning. Opgaven løses grafisk. Ligningerne $|x| + |y| = 1$ og $x^2 + y^2 = a$ beskriver henholdsvis et kvadrat med centrum i $(0, 0)$ og en cirkel med centrum i $(0, 0)$ og radius $\sqrt{a}$ (se figuren), og løsningerne repræsenteres derfor af skæringspunkterne mellem kvadratet og cirklen. Kvadratets diagonal har længde 2, og med Pythagoras ses at sidelængden er $\sqrt{2}$.

▷cirklens ligning



Afstanden fra $(0, 0)$ til kvadratets side er derfor $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dvs. hvis radius i cirklen er $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hvilket svarer til $a = \frac{1}{2}$, tangerer cirklen dermed kvadratets fire sider. Hvis radius i cirklen er $\sqrt{a} = 1$, dvs. hvis $a = 1$, vil cirklen gå igennem kvadratets fire hjørner. Hvis $\frac{1}{2} < a < 1$, vil cirklen derfor skære hver side netop to gange, og der er dermed otte løsninger til ligningssystemet. Hvis $a = 1$, skærer cirklen kvadratet i de fire hjørner af kvadratet, og hvis $a = \frac{1}{2}$ i midtpunkterne af de fire sider, og der er dermed fire løsninger til ligningssystemet. Hvis $a < \frac{1}{2}$ eller $a > 1$, er der ingen løsninger da cirklen ikke skærer kvadratet.

Opgave 3. *Punktet P ligger inden i $\triangle ABC$ så $\triangle BPC$ er ligebenet, og vinkel P er ret. Desuden er $\triangle BAN$ og $\triangle CAM$ begge ligebenede og med en ret vinkel i A, og begge ligger uden for $\triangle ABC$. Vis at $\triangle MNP$ er ligebenet og retvinklet.*



Løsning. Lad Q være midtpunktet af siden BC. Vi ønsker at vise at trekanterne NBP og ABQ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. Bemærk først at $\angle NBP = 45° + \angle ABP = \angle ABQ$. Ifølge Pythagoras er $|NB| = \sqrt{2}|AB|$ og $|BP| = \sqrt{2}|BQ|$, hvilket viser at trekanterne NBP og ABQ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. På tilsvarende måde ser man at trekant MCP og trekant ACQ er ensvinklede med forholdet $\sqrt{2}$. Dette viser at $|NP| = \sqrt{2}|AQ| = |MP|$. Desuden er $\angle NPM = 360° - (\angle NPB + \angle MPC) - \angle BPC = 360° - (\angle AQB + \angle AQC) - 90° = 360° - 180° - 90° = 90°$. Dermed er trekant MNP ligebenet og retvinklet.

▷ensvinklede trekanter

Opgave 4. *Fjorten elever skriver hver et helt tal på tavlen. Da de sidenhen møder deres matematiklærer Homer Grog, fortæller de ham at uanset hvilket tal de slettede på tavlen, så kunne de resterende tal deles i tre grupper med samme sum. De fortæller ham også at tallene på tavlen var hele tal. Er det nu muligt for Homer Grog at afgøre hvilke tal eleverne skrev på tavlen?*

Løsning. Ja, det er muligt. Først viser vi at alle tallene på tavlen er delelige med 3. Kald de 14 tal for $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{14}$ og deres sum for s. Tallet 3 går op i $s - x_i$ for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, 14$, da de 14 tal kan inddeles i tre grupper med samme sum når man fjerner et tal. Dette betyder at også

$$(s - x_1) + (s - x_2) + \cdots + (s - x_{14}) = 14s - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{14}) = 13s$$

▷primtal

er delelig med 3, og da 3 er et primtal som ikke går op i 13, må 3 gå op i s. Men vi ved også at 3 går op i $s - x_i$ for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, 14$, og dermed må 3 gå op i hvert af de 14 tal. Vi har nu vist at alle tallene på tavlen er delelige med 3. Antag nu at mindst et af tallene er forskelligt fra 0. Der findes dermed et positivt helt tal n så 3^n går op i alle 14 tal, mens 3^{n+1} ikke går op i alle 14 tal. Dividerer vi tallene med 3^n, opnår vi 14 nye tal hvor mindst et tal ikke er deleligt med 3. De 14 nye tal må også have egenskaben at hvis man fjerner et tal, kan de resterende 13 deles i tre grupper med samme sum, men det har vi lige vist medfører at alle tallene er delelige med 3, hvilket ikke er rigtigt. Dermed er antagelsen om at mindst et af tallene er forskelligt fra 0, forkert, og det vil sige at alle tallene på tavlen må være 0. Det er altså muligt for Homer Grog at afgøre hvilke tal eleverne skrev på tavlen.

Opgave 5. *For hvilke reelle tal p har ligningssystemet*

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{1}{x_1^2} &= px_2, \\ x_2^4 + \frac{1}{x_2^2} &= px_3, \\ &\vdots \\ x_{2004}^4 + \frac{1}{x_{2004}^2} &= px_{2005}, \\ x_{2005}^4 + \frac{1}{x_{2005}^2} &= px_1 \end{aligned}$$

netop én løsning $(x_1, x_2, \ldots, x_{2005})$, hvor $x_1, x_2, \ldots, x_{2005}$ er reelle tal?

Løsning. Da ligningssystemets venstresider alle er positive, er der ingen løsninger når $p = 0$. Desuden er $(x_1, x_2, \ldots, x_{2005})$ en løsning for p netop hvis $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_{2005})$ er en løsning for $-p$. Det er derfor tilstrækkeligt at se på tilfældet hvor p er positiv. Først overvejer vi hvad der sker hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2005} = x$. I dette tilfælde er alle ligningerne $x^4 + \frac{1}{x^2} = px$, og hvis denne ligning har mere end en løsning, har det oprindelige ligningssystem også. Ligningen kan omformes til den skjulte andengradsligning $(x^3)^2 - px^3 + 1 = 0$ ved at gange med x^2 på begge sider (bemærk $x \neq 0$), og denne ligning har mere end en løsning hvis diskriminanten $(-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = p^2 - 4$ er positiv, dvs. hvis $p > 2$. Vi kan derfor slutte at $p \leq 2$ hvis det oprindelige ligningssystem skal have højst en løsning.

Hvis $0 < p \leq 2$ og $(x_1, x_2, \ldots, x_{2005})$ er en løsning, er

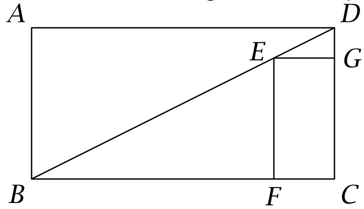
$$px_{i+1} = x_i^4 + \frac{1}{x_i^2} = \left(x_i^2 - \frac{1}{x_i}\right)^2 + 2x_i \geq 2x_i,$$

og dermed

$$x_{i+1} \geq \frac{2}{p} x_i \geq x_i$$

for alle $i = 1, 2, \ldots, 2005$ (bemærk at her opfattes $x_{2005+1} = x_1$). Altså er $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2005} \leq x_1$, og dermed er tallene $x_1, x_2, \ldots, x_{2005}$ alle ens. Faktoren $\frac{2}{p}$ i uligheden ovenfor er dermed 1, så $p = 2$, og tallene $x_1, x_2, \ldots, x_{2005}$ er løsninger til ligningen $(x^3)^2 - 2x^3 + 1 = 0$, dvs. $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2005} = x = 1$. Der er altså netop en løsning til ligningssystemet for $p = 2$. I alt kan vi konkludere at ligningssystemet har præcis en løsning netop når $p = \pm 2$.

Opgave 1. *Rektanglet $ABCD$ er dobbelt så bredt som det er højt, og rektanglet $EFCG$ er dobbelt så højt som det er bredt. Punktet E ligger på diagonalen BD. Hvor stor en brøkdel udgør det lille rektangels areal af det stores?*



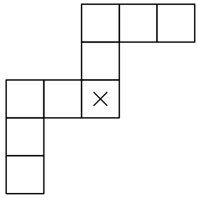
Løsning. Kald længden af linjestykket DG for x. Trekanterne EGD og BCD er ensvinklede da siderne BC og EG er parallelle. Da BC er dobbelt så lang som CD, må EG også være dobbelt så lang som GD, altså $|EG| = 2x$. Yderligere er GC dobbelt så lang som EG, altså $|GC| = 4x$. Det lille rektangel $EFCG$ har derfor sidelængderne $2x$ og $4x$, mens det store rektangel $ABCD$ har sidelængderne $|DC| = |DG| + |GC| = 5x$ og $|BC| = 2|DC| = 10x$. Arealet af det lille rektangel udgør dermed brøkdelen $\frac{2x\cdot 4x}{5x\cdot 10x} = \frac{4}{25}$ af arealet af det store rektangel.

Opgave 2. *Vis at hvis a og b er hele tal, og $a^2 + b^2 + 9ab$ er delelig med 11, så er $a^2 - b^2$ delelig med 11.*

Løsning. Antag at a og b er hele tal så $a^2 + b^2 + 9ab$ er delelig med 11. Da $a^2 + b^2 + 9ab = (a - b)^2 + 11ab$ er delelig med 11, og $11ab$ er delelig med 11, må også $(a - b)^2$ være delelig med 11. Da 11 er et primtal, går det også op i $a - b$, og dermed i $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

▷delelighed
▷primtal

Opgave 3. *Cifrene fra 1 til 9 er placeret i figuren nedenfor med ét ciffer i hvert kvadrat. Summen af tre tal placeret i samme vandrette eller lodrette linje er 13. Vis at der på den markerede plads står 4.*



Løsning. Antag at cifrene fra 1 til 9 er placeret så de fire summer giver 13. Tre af cifrene indgår både i en række og en søjle, dvs. i to summer, og disse tre cifre kaldes for a, b og c. En sammentælling af alle fire summer giver $4 \cdot 13 = 1 + 2 + \cdots + 9 + a + b + c$, altså $52 = 45 + a + b + c$, og dermed $a + b + c = 7$. Den eneste mulighed for at vælge tre forskellige cifre med sum 7 er cifrene 1, 2 og 4, og dermed er a, b og c lig med 1, 2 og 4. Hvis enten 1 eller 2 er placeret på den markerede plads, vil de to cifre 1 og 2 optræde i samme række eller samme søjle, men de skal sammen med et andet ciffer give summen 13, hvilket er umuligt. Dermed må der stå 4 i det markerede felt.

Opgave 4. *Find alle sæt* (x, y, z) *af reelle tal som opfylder*

$$x^3 - y^2 = z^2 - x$$
$$y^3 - z^2 = x^2 - y$$
$$z^3 - x^2 = y^2 - z.$$

Løsning. En omskrivning af den første ligning $x^3 + x = y^2 + z^2 \geq 0$ viser at $x \geq 0$, og hvis $x = 0$, da er også $y = z = 0$. De to øvrige ligninger giver tilsvarende resultater for y og z. Dermed er $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ en løsning, og for øvrige løsninger gælder at x, y og z er positive. Antag derfor at $x, y, z > 0$. Ved at lægge de tre ligninger sammen fås

$$(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2 + y^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z),$$

som omskrives til

$$(x^3 - 2x^2 + x) + (y^3 - 2y^2 + y) + (z^3 - 2z^2 + z) = 0$$

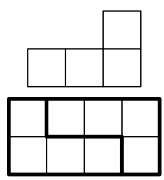
og videre til

$$x(x-1)^2 + y(y-1)^2 + z(z-1)^2 = 0.$$

Alle led på venstresiden må derfor være 0 da de ikke er negative, og dette er kun muligt når $x = y = z = 1$. Det ses ved indsættelse at $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ faktisk også løser ligningssystemet. Dermed er de eneste løsninger $(0, 0, 0)$ og $(1, 1, 1)$.

Opgave 5. *Bestem for hvilke naturlige tal* n *man kan dække et* $2n \times 2n$*-skakbræt med ikke-overlappende* L*-brikker. En* L*-brik dækker fire felter og har udseende som bogstavet* L*. Brikken må roteres og spejles efter behag.*

Løsning. Man kan let dække skakbrættet med L-brikker når n er lige. To L-brikker kan nemlig dække et 4×2-rektangel, og skakbrættet kan dækkes af disse rektangler når n er lige. Nu viser vi omvendt at hvis brættet er dækket af L-brikker, da må n være lige, hvilket viser at det ikke kan lade sig gøre når n er ulige. Antag derfor at vi har et $2n \times 2n$-skakbræt som er dækket af L-brikker. Da brættet består af $4n^2$ felter, og da hver L-brik dækker fire felter, må brættet være dækket af n^2 brikker. Hver anden række af felter på skakbrættet males røde og hver anden grønne, og en L-brik dækker med denne farvning enten et rødt felt og tre grønne eller tre røde felter og et grønt. Da der er lige mange røde og grønne felter på brættet, må der være lige så mange L-brikker der dækker et rødt felt og tre grønne, som der er L-brikker der dækker tre røde felter og et grønt. Dermed er der et lige antal brikker, og n^2 og dermed også n er derfor lige. Det er altså kun muligt at dække brættet med L-brikker når n er lige.



Opgave 1. *I en retvinklet trekant er summen $a + b$ af kateternes længder 24, mens højden h_c på hypotenusen c har længden 7. Bestem hypotenusens længde.*
Løsning. Arealet T af trekanten kan udregnes på to måder: $T = \frac{1}{2}ab$ og $T = \frac{1}{2}h_c c$. Dette viser at $ab = h_c c = 7c$, og Pythagoras' sætning giver yderligere at $a^2 + b^2 = c^2$. Samlet er

$$24^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 14c.$$

Dermed er c en positiv løsning til andengradsligningen $c^2 + 14c - 576 = 0$, og ved brug af løsningsformlen fås

$$c = \frac{-14 + \sqrt{14^2 + 4 \cdot 576}}{2} = -7 + \sqrt{7^2 + 576} = -7 + \sqrt{625} = 18.$$

Opgave 2. *Løs inden for de reelle tal ligningen*

$$x^5 + \lfloor x \rfloor = 20,$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal mindre end eller lig x.
Løsning. Funktionen $f(x) = x^5 + \lfloor x \rfloor$ er voksende da x^5 er voksende, og $\lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_2 \rfloor$ for alle x_1 og x_2 hvor $x_1 \leq x_2$. Dermed har ligningen $x^5 + \lfloor x \rfloor = 20$ højst en løsning. Da $f(1) = 1^5 + 1 = 2$ og $f(2) = 2^5 + 2 = 34$, må en mulig løsning ligge i intervallet $]1; 2[$. For $x \in]1; 2[$ er $\lfloor x \rfloor = 1$, altså reduceres ligningen i dette interval til $x^5 = 19$ som har løsningen $x = \sqrt[5]{19}$. Da $1^5 < 19 < 2^5$, må $\sqrt[5]{19} \in]1; 2[$, og dermed er $x = \sqrt[5]{19}$ også løsning til den oprindelige ligning.

Opgave 3. *Bestem de hele tal n hvor*

$$|2n^2 + 9n + 4|$$

er et primtal.
Løsning. Tallet $|2n^2 + 9n + 4|$ kan faktoriseres $|2n^2 + 9n + 4| = |2n + 1||n + 4|$, ▷numerisk værdi
og dermed kan $|2n^2 + 9n + 4|$ kun være et primtal hvis den ene af faktorerne er 1, altså hvis enten $|2n + 1| = 1$ eller $|n + 4| = 1$. Dette er tilfældet netop når $n = 0$, $n = -1$, $n = -3$ eller $n = -5$. Ved indsættelse ses at udtrykket kun er et primtal når $n = -1$ og $n = -3$.

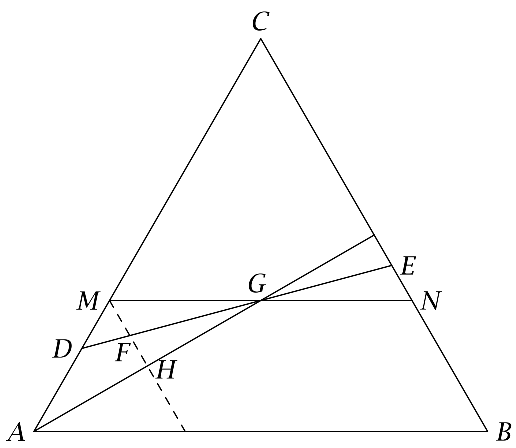
Opgave 4. *Georg og hans mor elsker pizza. De køber en pizza som er formet som en ligesidet trekant. Georg kræver at få lov til at dele pizzaen ved et lige snit og dernæst vælge først. Moren accepterer modvilligt, idet hun dog vil pege på et punkt i pizzaen som snittet skal passere. Bestem den største brøkdel af pizzaen som moren med denne procedure med sikkerhed kan få.*

Løsning. Georgs mor kan sikre sig mindst $\frac{4}{9}$ af pizzaen ved at pege på medianernes skæringspunkt G, og det viser vi ved at hun mindst får $\frac{4}{9}$ når hun peger på G, hvorimod Georg kan sørge for at hun får mindre end $\frac{4}{9}$ hvis hun peger på et andet punkt.

Antag først at Georgs mor peger på medianernes skæringspunkt G. Hvis Georg skærer parallelt med en af siderne gennem dette punkt, deler han pizzaen i et trapez og en ligesidet trekant hvis sidelængde er $\frac{2}{3}$ af pizzaens sidelængde da medianerne deler hinanden i forholdet 2 til 1. Arealet af det trekantede stykke udgør derfor $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ af hele pizzaen, altså får Georgs mor mindst $\frac{4}{9}$ af pizzaen. Hvis Georg skærer pizzaen i en linje som ikke er parallel med nogen af siderne, navngiver vi pizzaens hjørner A, B og C og snittets skæringspunkter med trekantens sider D og E således at D ligger på AC, E ligger på BC, og afstanden fra D til AB er mindre end afstanden fra E til AB. Linjen gennem G parallel med AB skærer AC i M og BC i N.

▷median

▷ensvinklede trekanter



Lad T betegne areal. Vi ønsker at vise at

$$\frac{5}{9}T(\triangle ABC) = T(\square AMNB) > T(\square ADEB) \geq \frac{1}{2}T(\triangle ABC),$$

da dette viser at Georgs mor i dette tilfælde får mere end $\frac{4}{9}$ af pizzaen. Vi har allerede vist det første lighedstegn. Tegn en linje gennem M parallelt med linjen BC, og kald linjens skæringspunkt med DE for F, og linjens skæringspunkt med medianen fra A for H. Da er $\triangle MFG$ og $\triangle NEG$ kongruente da deres sider er parvis parallelle, og G er midtpunktet af MN, altså har de samme areal. Dermed er

▷kongruente trekanter

$$T(\square AMNB) = T(\square ADEB) + T(\triangle DFM) > T(\square ADEB).$$

Tilsvarende er $T(\square AMNB) = \frac{1}{2}T(\triangle ABC) + T(\triangle AHM)$, og heraf fås at

$$\begin{aligned} T(\square ADEB) &= T(\square AMNB) - T(\triangle DMF) \\ &\geq T(\square AMNB) - T(\triangle AHM) \\ &= \frac{1}{2}T(\triangle ABC). \end{aligned}$$

Georgs mor får dermed mere end $\frac{4}{9}$ af pizzaen, når Georg skærer på denne måde.

Antag nu at Georgs mor peger på et punkt P forskelligt fra G. Vi navngiver nu trekantens hjørner A, B og C således at P ligger i det indre af trekant CNM, hvor N og M er defineret som før. Ved et snit gennem P parallelt med NM får moren mindre end $\frac{4}{9}$ af pizzaen.

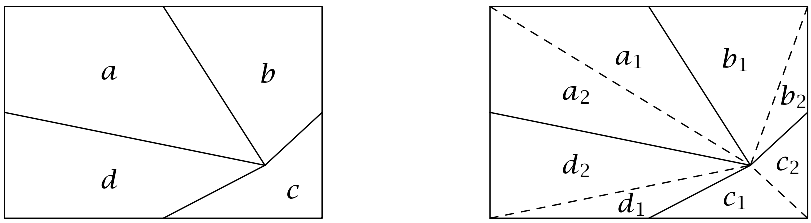
Hermed har vi vist at $\frac{4}{9}$ er den største brøkdel af pizzaen som moren med sikkerhed kan sikre sig.

Opgave 5. *For hvilke naturlige tal $n \geq 2$ kan tallene fra 1 til 16 stilles op i et kvadratisk skema så de fire rækkesummer og de fire søjlesummer alle er indbyrdes forskellige og delelige med n?*

Løsning. Summen af de 16 tal er 136 så summen af de otte summer er 272. Antag at summerne i de fire rækker og fire søjler alle er forskellige og delelige med n. De otte mindste tal der er delelige med n, er $n, 2n, 3n, \dots, 8n$. Altså er $272 \geq n + 2n + \cdots + 8n = 36n$, og derfor $n \leq \frac{272}{36} < 8$. Desuden går n op i $136 = 2^3 \cdot 17$, dvs. de eneste muligheder er $n = 2$ og $n = 4$. Begge disse muligheder kan bruges. I følgende skema er nemlig summen af cifrene i hver række og hver søjle både delelig med 2 og med 4, og de otte summer er desuden forskellige.

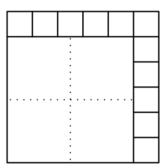
1	3	5	7
2	4	6	8
9	11	13	15
16	14	12	10

Opgave 1. *Fra et indre punkt i et rektangel trækkes forbindelseslinjer til de fire siders midtpunkter. Herved opstår fire områder (polygoner) med arealerne a, b, c og d (se figur). Bevis at $a + c = b + d$.*



Løsning. Opdel som vist områderne ved hjælp af forbindelseslinjer til rektanglets hjørner, og lad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 betegne arealerne af de fremkomne trekanter. Da trekanter med samme højde og grundlinje har samme areal, er $a_1 = b_1$, $b_2 = c_2$, $c_1 = d_1$ og $d_2 = a_2$. Dermed er $a + c = a_1 + a_2 + c_1 + c_2 = b_1 + d_2 + d_1 + b_2 = b + d$.

Opgave 2. *Bevis at for ethvert helt tal n større end 5 kan et kvadrat deles i n kvadrater.*
Løsning. Antag at kvadratet har sidelængde 1. For ethvert helt tal $k > 1$ kan kvadratet deles i et kvadrat med sidelængde $\frac{k-1}{k}$ og $2k - 1$ kvadrater med sidelængde $\frac{1}{k}$, altså i alt $2k$ kvadrater (se figur for $k = 6$).



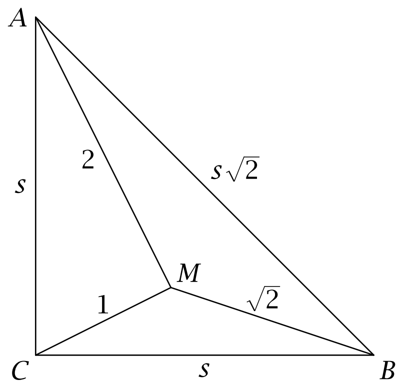
Det største af de $2k$ kvadrater kan yderligere deles i fire kvadrater således at det oprindelige kvadrat bliver inddelt i $2k + 3$ kvadrater. Da alle hele tal n større end 5 kan skrives på formen $2k$ eller $2k + 3$ for et helt tal $k > 1$, har vi hermed vist at et kvadrat kan deles i n kvadrater for $n > 5$.

Opgave 3. *To positive hele tal har summen 2002. Kan 2002 gå op i de to tals produkt?*
Løsning. Svaret er nej, og dette bevises indirekte ved at antage at det er muligt, og herefter vise at dette fører til en modstrid. Antag at der for to positive hele tal a og b gælder at $a + b = 2002$, samt at ab er delelig med 2002. Da $ab = a(2002 - a) = 2002a - a^2$, og både ab og $2002a$ er delelige med 2002, er
▷delelighed også a^2 delelig med 2002. Desuden er $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dvs. at primtallene 2,
▷primtal 7, 11 og 13 vil gå op i a^2 og dermed også i a. Dermed vil $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ også gå op i a, hvilket er umuligt da $a < 2002$.

Opgave 4. *I trekant ABC er* $\angle C = 90°$ *og* $|AC| = |BC|$. *Desuden er* M *et indre punkt i trekanten så* $|MC| = 1$, $|MA| = 2$ *og* $|MB| = \sqrt{2}$. *Beregn* $|AB|$.

Løsning. Kald kateternes længde for s. Ifølge Pythagoras er længden af hypotenusen $\sqrt{2}s$. Siderne i $\triangle AMB$ er $\sqrt{2}$ gange så store som siderne i $\triangle BMC$, og de to trekanter er dermed ensvinklede. Nu kan vi udregne vinklerne ved M: $\angle AMB = 180° - (\angle MAB + \angle MBA) = 180° - (\angle MBC + \angle MBA) = 180° - 45° = 135°$. Dermed er $\angle CMA = 360° - 2\angle AMB = 90°$. Trekant AMC er derfor retvinklet, og Pythagoras giver at $s = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, og $|AB| = \sqrt{2}s = \sqrt{10}$.

▷ensvinklede trekanter

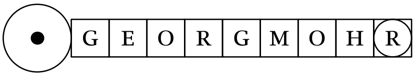


Opgave 5. *Homer Grog har på ti sedler skrevet tallene* 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, *ét tal på hver seddel. Han arrangerer sedlerne i en rundkreds og forsøger at få den største sum* S *af tallene på tre på hinanden følgende sedler til at blive mindst mulig. Hvad er den mindste værdi* S *kan antage?*

Løsning. Summen S er 29 ved rækkefølgen $1 \to 17 \to 9 \to 3 \to 15 \to 7 \to 5 \to 13 \to 11 \to 4$ (cyklisk). Vi viser nu at S ikke kan blive mindre end 29. Betragt for en vilkårlig placering af sedlerne de tre grupper med tre sedler som ligger på plads 1–3, 4–6 og 7–9 efter sedlen med tallet 1. Summen af tallene i de tre grupper er 84, og dermed er gennemsnitssummen for de tre grupper 28. I en af grupperne er der tre ulige tal, og dermed er summen ulige og altså ikke 28. Altså vil mindst en af de tre grupper have en sum som er større end 28. Samlet har vi vist at den mindste værdi S kan antage, er 29.

Løsninger · 2001

Opgave 1. *Til* GEORG MOHR*-spillet bruges en spillebrik, en* GEORG MOHR*-terning (dvs. en terning, hvis seks sider viser bogstaverne* G, E, O, R, M *og* H*) samt en spilleplade:*



startfelt med brik slutfelt

Ved hvert slag rykker man frem til førstkommende felt med det bogstav terningen viser; hvis det ikke er muligt at rykke frem, bliver man stående. Peter spiller GEORG MOHR*-spillet. Bestem sandsynligheden for at han gennemfører spillet i to slag.*

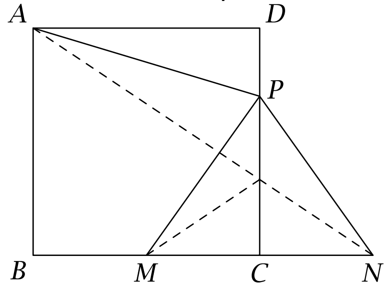
Løsning. Peter gennemfører spillet i præcis to slag netop hvis sidste kast er et R, og han i første kast kommer til det første R på spillepladen eller længere, altså hvis han slår R, M eller H i første kast. Sandsynligheden for at slå R, M eller H er $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, og sandsynligheden for at slå R er $\frac{1}{6}$, dvs. sandsynligheden for at Peter gennemfører spillet i netop to slag, er $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Opgave 2. *Findes der et naturligt tal n så at tallet $n!$ har præcis 11 nuller til slut? (Med $n!$ betegnes tallet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$).*

▷primfaktor-opløsning

Løsning. Antallet af slutnuller i $n!$ afhænger af hvor mange gange 10 går op i $n!$, dvs. det afhænger af eksponenten af 2 og eksponenten af 5 i primfaktoropløsningen af $n!$. Tallet 5! er det mindste tal af formen $n!$ der ender med et nul, og det har primfaktoropløsningen $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Antallet af slutnuller svarer altså til den mindste af eksponenterne af henholdsvis 2 og 5 i primfaktoropløsningen af $n!$. Primfaktoropløsningen af 16! er $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, dvs. at eksponenten af 2 allerede her er større end 11, og da eksponenterne af 2 og 5 i primfaktoropløsningen af $n!$ kun bliver større når n vokser, findes der et n så $n!$ slutter på præcis 11 nuller, netop hvis vi kan finde et n så eksponenten af 5 i primfaktoropløsningen af $n!$ er 11. Tallet 49! ender på 10 nuller da $5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45$ hver bidrager med et 5-tal, og $25 = 5^2$ bidrager med to 5-taller til primfaktoropløsningen af 49!. Tallet 50! ender derimod på 12 nuller da $50 = 2 \cdot 5^2$ bidrager med yderligere to 5-taller til primfaktoropløsningen. Der findes derfor ikke et n så $n!$ ender på netop 11 nuller.

Opgave 3. *I kvadratet $ABCD$ med sidelængde 2 er M midtpunkt af BC og P et punkt på DC. Bestem den mindste værdi af $|AP| + |PM|$.*



Løsning. Punktet M spejles i linjen CD, og spejlbilledet kaldes N. Dermed er $|AP| + |PM|$ lig med længden $|AP| + |PN|$ af den brudte linje fra A til N via P, og denne er kortest når P vælges på linjestykket AN. Med denne placering af P giver Pythagoras' sætning at

$$|AP| + |PM| = |AN| = \sqrt{|AB|^2 + |BN|^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Opgave 4. *Vis at ethvert tal af formen*

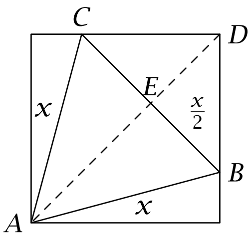
$$4444\ldots 44 - 88\ldots 8,$$

hvor der er dobbelt så mange 4*-taller som* 8*-taller, er et kvadrattal.*
Løsning. Tallet $10^k - 1$ består af k 9-taller. Tallet vi betragter, kan derfor skrives som

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} - 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} &= \frac{4}{9}(10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2) \\ &= \frac{4}{9}(10^n - 1)^2 \\ &= (2 \cdot \frac{10^n - 1}{3})^2. \end{aligned}$$

Tallet i parentesen er et heltal da $10^n - 1$ er delelig med 3. Hermed er det ønskede vist.

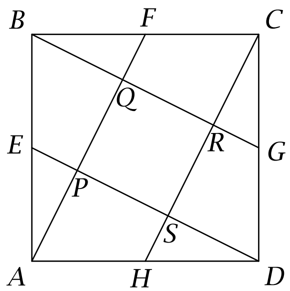
Opgave 5. *Kan der i et kvadrat placeres en ligesidet trekant hvis areal udgør mere end* $\frac{9}{20}$ *af kvadratets areal?*
Løsning. Svaret er ja. Antag at kvadratets sidelængde er 1, og indlæg en ligesidet trekant ABC med sidelængde x som vist på figuren, således at der er symmetri om linjen AD.

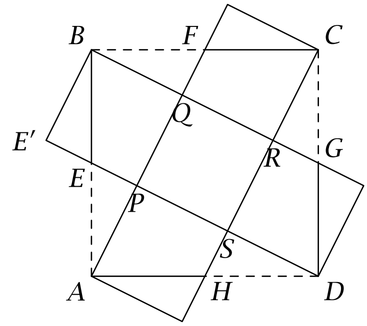


Diagonalen i kvadratet har længde $\sqrt{2}$ ifølge Pythagoras. Kald skæringspunktet mellem BC og AD for E. Trekant DEB er ligebenet da $\angle BED$ er ret, og $\angle EDB = 45°$. Dermed er $\frac{x}{2} = |BE| = |DE|$, og $|AE| = |AD| - |DE| = \sqrt{2} - \frac{x}{2}$. Pythagoras' sætning anvendt på trekant ABE giver nu $x^2 = (\sqrt{2} - \frac{x}{2})^2 + (\frac{x}{2})^2$, altså $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$. Den eneste positive løsning til denne andengradsligning er $x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Arealet af trekant ABC er derfor $\frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot x = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \sqrt{12} - 3$. Og dette areal er faktisk større end $\frac{9}{20}$ da $\sqrt{12} > 3 + \frac{9}{20} = \frac{69}{20}$ hvilket følger af at $12 \cdot 20^2 = 4800$ er større end $69^2 = 4761$.

Løsninger · 2000

Opgave 1. *Firkant $ABCD$ er et kvadrat med sidelængden 1, og punkterne E, F, G og H er sidernes midtpunkter. Bestem arealet af firkant $PQRS$.*



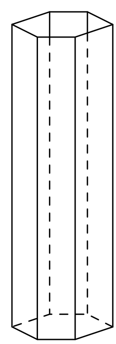


Løsning. Af symmetrigrunde er alle vinkler ved P, Q, R og S rette. Punktet E' afsættes på forlængelsen af DE således at BE' er parallel med AF. Trekant EBE' er da kongruent med trekant EAP (trekanterne har samme vinkler da BE' og AP er parallelle, og EB og EA er lige lange). Da EP er midtpunktstransversal i trekant ABQ, er $|PQ| = |AP|$. Af symmetrigrunde er $|BQ| = |AP|$. Altså er $|BQ| = |PQ|$. Firkant $PQBE'$ er derfor et kvadrat.

▷ kongruente trekanter

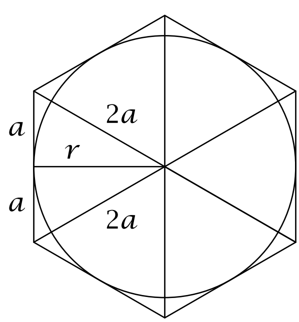
▷ midtpunkts-transversal

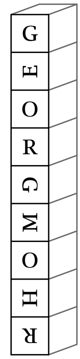
Ved nu at flytte de fire små trekanter som vist på figuren fremkommer en figur med samme areal som kvadratet $ABCD$. Den nye figur består af fem ens kvadrater. Følgelig har kvadratet $PQRS$ arealet $\frac{1}{5}$.



Opgave 2. *I et glas med lodrette rektangulære sideflader og med en regulær sekskant som bund og låg kan der lige netop anbringes tre ens kugler oven på hinanden, således at hver af kuglerne rører alle siderne i glasset. Glassets rumfang er* $108\,\text{cm}^3$*. Hvad er sidelængden i grundfladen?*

Løsning. Kald sidelængden i sekskanten for $2a$. Så er (jf. figur) kuglens radius $r = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ (Pythagoras). Glassets tværsnitsareal er da $6 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{3})$ og dets højde $3 \cdot 2 \cdot a\sqrt{3}$. Om rumfanget gælder så $6 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a\sqrt{3}) \cdot 3 \cdot 2 \cdot a\sqrt{3} = 108$, dvs. $108a^3 = 108$, hvoraf $a = 1$. Den søgte sidelængde er dermed 2 cm.



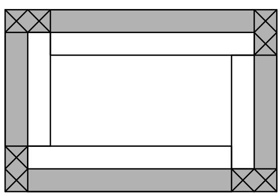


Opgave 3. *En* GEORG MOHR-*terning er en terning på hvis seks sideflader der er trykt henholdsvis* G, E, O, R, M *og* H. *Peter har ni helt ens* GEORG MOHR-*terninger. Kan det lade sig gøre at stable dem oven på hinanden til et tårn der på hver af de fire sider i en eller anden rækkefølge viser bogstaverne* G E O R G M O H R*?*

Løsning. Bemærk først at hvert bogstav har en bestemt »makker«, nemlig det bogstav der står på den modsatte side af terningen. Vi vil vise at svaret på opgaven er nej. Dette gøres indirekte. Antag at det kan lade sig gøre at bygge et tårn med den ønskede egenskab. Hvert af bogstaverne G, O og R forekommer da to gange på forsiden af tårnet. Dermed optræder deres makkere ligeledes hver to gange på bagsiden af tårnet. Altså må disse makkere være bogstaverne G, O og R. Men hvis fx G og O er hinandens makkere, er der ingen makker til R. Herved har vi nået en modstrid og dermed vist at det ikke kan lade sig sig gøre at bygge et tårn med de angivne egenskaber.

Opgave 4. *Et rektangulært gulv er dækket af et antal lige store kvadratiske fliser. Fliserne langs kanten er røde, og resten er hvide. Der er lige mange røde og hvide fliser. Hvor mange fliser kan der være?*

Løsning. Hver af de røde fliser langs kanten parres så vidt muligt med en hvid naboflise. Herved bliver der otte røde fliser tilovers (jf. figur). Altså må der også være otte hvide fliser tilovers. Disse inderste fliser udgør et rektangel, som så må have dimensionerne 1×8 eller 2×4 (eneste mulige faktoriseringer af tallet 8). Det samlede gulv er fire fliser bredere og fire fliser længere end dette inderrektangel og består dermed af enten $5 \cdot 12 = 60$ fliser eller $6 \cdot 8 = 48$ fliser.



Opgave 5. *Bestem samtlige mulige værdier af* $x + \frac{1}{x}$*, hvor det reelle tal* x *tilfredsstiller ligningen*

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

og løs denne ligning.

Løsning. Ved division med x^2 (tilladt da $x = 0$ tydeligvis ikke er en løsning) omskrives ligningen til $x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ og videre til $(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2) - 2 - 4 + 5(x + \frac{1}{x}) = 0$, dvs. $(x + \frac{1}{x})^2 + 5(x + \frac{1}{x}) - 6 = 0$. Dette er en andengradsligning i $x + \frac{1}{x}$, hvilket giver $x + \frac{1}{x} = -6$ eller $x + \frac{1}{x} = 1$. Ved at gange den første af disse ligninger igennem med x fås $x^2 + 6x + 1 = 0$, som har diskriminant $36 - 4 = 32$ og løsninger $x = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$. Den anden ligning giver tilsvarende $x^2 - x + 1 = 0$, som har diskriminant $1 - 4 = -3$ og dermed ingen løsninger. Alt i alt fås at de mulige værdier af $x + \frac{1}{x}$ er -6, og at løsningerne til den oprindelige ligning er $-3 \pm 2\sqrt{2}$.

▷ røddernes sum og produkt

Opgave 1. *I et koordinatsystem er en cirkel med radius 7 og centrum på y-aksen anbragt inden i parablen med ligning $y = x^2$, således at den lige netop rører parablen i to punkter. Bestem koordinatsættet til cirklens centrum.*

▷cirklens ligning

Løsning. Ligningen for cirklen er $x^2+(y-c)^2 = 49$, hvor $(0,c)$ er koordinatsættet for cirklens centrum. De givne oplysninger betyder at ligningssystemet

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x^2 + (y-c)^2 &= 49 \end{aligned}$$

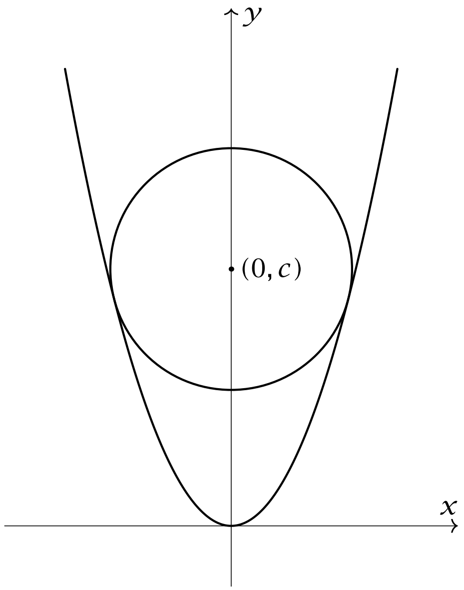
har netop to løsninger. Disse må være på formen $(\pm x, y)$, hvor $y > 0$. Ligningen $y + (y-c)^2 = 49$, der fremkommer ved indsættelse af $y = x^2$ i den nederste ligning, har derfor netop en løsning. Ligningen omskrives til

$$y^2 + (1-2c)y + c^2 - 49 = 0.$$

Denne andengradsligning i y har diskriminanten

$$(1-2c)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (c^2 - 49) = 1 + 4c^2 - 4c - 4c^2 + 196 = -4c + 197.$$

Da andengradsligningen har netop en løsning, er diskriminanten $-4c + 197 = 0$. Altså er $c = \frac{197}{4}$ og det søgte koordinatsæt dermed $(0, \frac{197}{4})$.



Opgave 2. *En fisker har fanget et antal fisk. De tre tungeste udgør tilsammen* 35 % *af fangstens samlede vægt. Dem sælger han. Herefter udgør de tre letteste tilsammen* 5/13 *af vægten af resten. Hvor mange fisk fangede han?*

Løsning. De tre letteste udgør $\frac{5}{13}$ af 65 %, dvs. 25 % af hele fangsten. De mellemste fisk udgør dermed $100\,\% - (35\,\% + 25\,\%) = 40\,\%$ af fangsten. I mellemgruppen må der følgelig være mindst fire fisk (da de tre tungeste kun vejer 35 % tilsammen). På den anden side kan der heller ikke være mere end fire fisk i mellemgruppen: Hver mellemfisk vejer jo nemlig mindst så meget som gennemsnittet af de tre letteste fisk, altså mindst $\frac{1}{3} \cdot 25\,\% = 8\frac{1}{3}\,\%$, og fem mellemfisk ville dermed tilsammen veje over 40 %. Altså er der præcis fire fisk i mellemgruppen, og dermed i alt $3 + 4 + 3 = 10$ fisk.

Opgave 3. *En funktion f opfylder*

$$f(x) + xf(1-x) = x$$

for alle reelle tal x. Bestem tallet $f(2)$. Bestem en forskrift for f.

Løsning. Ligningen $f(x) + xf(1-x) = x$ gælder for alle reelle tal x. Ved i denne ligning at erstatte x med $1 - x$ og efterfølgende multiplicere med x fås ligningen

$$xf(1-x) + x(1-x)f(x) = x(1-x),$$

som ligeledes gælder for alle x. Subtraheres denne ligning fra den oprindelige, fås

$$f(x) - x(1-x)f(x) = x - x(1-x),$$

dvs. $(1 - x + x^2)f(x) = x^2$. Heraf finder vi forskriften

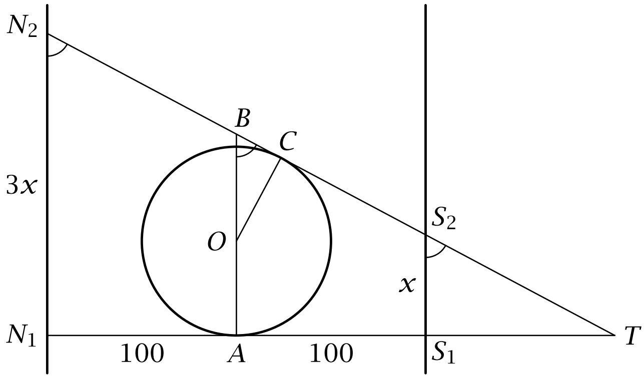
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x + 1},$$

som gælder for alle reelle tal x. Bemærk at diskriminanten $1-4 = -3$ for x^2-x+1 er negativ, så udtrykket i nævneren kan aldrig antage værdien 0. Ved indsættelse fås $f(2) = 4/3$.

Bemærkning. Uden brug af forskriften kunne funktionsværdien $f(2)$ bestemmes således: Indsæt henholdsvis $x = 2$ og $x = -1$ i den givne ligning. Herved fremkommer to ligninger med to ubekendte $f(2)$ og $f(-1)$. Ved løsning af ligningssystemet fås $f(2) = 4/3$.

Opgave 4. *Nanna og Sofie bevæger sig i samme retning ad to parallelle stier, der ligger i afstanden* 200 *meter fra hinanden. Nannas hastighed er* 3 *meter i sekundet, Sofies kun* 1 *meter i sekundet. En høj, cylindrisk bygning med en diameter på* 100 *meter er placeret midt mellem de to stier. Da bygningen første gang bryder sigtelinjen mellem pigerne, er deres indbyrdes afstand* 200 *meter. Hvor lang tid går der før de to piger igen kan se hinanden?*

Løsning. Når pigerne igen kan se hinanden, har Sofie bevæget sig x meter fra S_1 til S_2 og Nanna $3x$ meter fra N_1 til N_2 (se figur).



Linjen S_2N_2 tangerer tårnet i punktet C. Da trekanterne S_1TS_2 og N_1TN_2 er ensvinklede med sideforholdet $1 : 3$, er $|TS_1| = 100$. Da S_1TS_2 og ATB er ensvinklede med sideforholdet $1 : 2$, er $|AB| = 2x$. Videre er åbenbart trekant COB ensvinklet med trekant S_1TS_2 (da de deler en vinkel og begge er retvinklede) med sideforholdet $1 : 2$ (da $|OC| = 50$ og $|S_1T| = 100$). Heraf fås $|OB| = \frac{1}{2}|TS_2|$, og altså

$$2x - 50 = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 100^2}.$$

Ved kvadrering fås

$$4x^2 + 2500 - 200x = \frac{1}{4}(x^2 + 10000)$$

og videre $\frac{15}{4}x^2 = 200x$, hvoraf $x = \frac{160}{3}$. Sofie har altså bevæget sig $53\frac{1}{3}$ meter. Derfor er der gået $53\frac{1}{3}$ sekunder.

Opgave 5. *Findes der et tal hvis cifre er lutter* 1*-taller, og som* 1999 *går op i?*

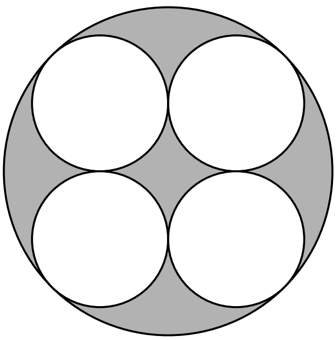
Løsning. Svaret er ja. Betragtes mindst 2000 forskellige tal bestående af lutter 1-taller, vil der være to af disse der giver samme rest ved division med 1999 (da der jo højst kan forekomme 1999 forskellige rester ved division med 1999). Deres differens er derfor delelig med 1999. Denne differens vil være et tal der består af et antal 1-taller efterfulgt af et antal nuller, dvs. have formen $11\ldots1 \cdot 10^n$. Da 1999 ikke har fælles faktorer med 10^n, går 1999 op i det foranstillede tal $11\ldots1$. Hermed er påstanden vist.

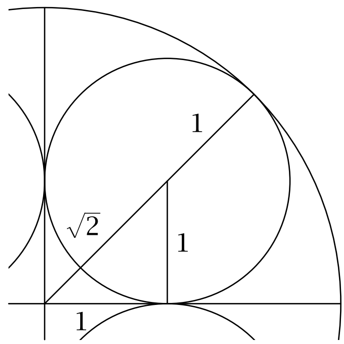
▷division med rest

▷primtal

Løsninger · 1998

Opgave 1. *På den viste figur har de små cirkler radius* 1. *Beregn arealet af den grå del af figuren.*





Løsning. Radius i den store cirkel er åbenbart $1 + \sqrt{2}$ (se figuren), idet $\sqrt{2}$ ifølge Pythagoras er længden af hypotenusen i en retvinklet trekant hvori begge kateter har længden 1. Det søgte areal er arealet af den store cirkel minus arealet af de fire små cirkler, dvs.

$$\begin{aligned} \pi \cdot (1+\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \pi \cdot 1^2 &= \pi(1+2+2\sqrt{2}) - 4\pi \\ &= (2\sqrt{2}-1)\pi. \end{aligned}$$

Opgave 2. *For ethvert reelt tal m har ligningen*

$$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0$$

to løsninger, som betegnes x_1 og x_2. Bestem m således at $x_1^2 + x_2^2$ er mindst mulig.

Løsning. Da x_1 og x_2 er rødder i $x^2 + (m-2)x - (m+3)$, er $x_1 + x_2 = -(m-2)$ og $x_1 x_2 = -(m+3)$, og dermed kan størrelsen ▷røddernes sum og produkt

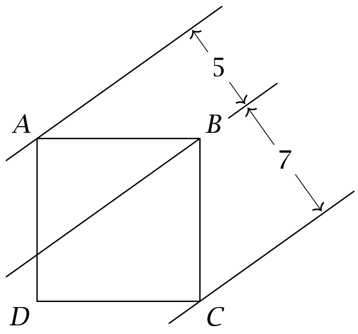
$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$$

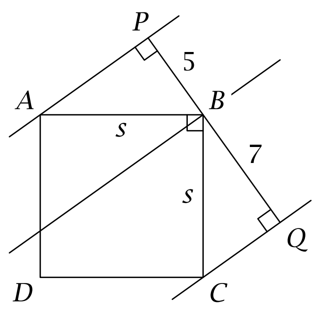
udtrykkes ved koefficienterne i det givne andengradspolynomium:

$$x_1^2 + x_2^2 = (m-2)^2 + 2(m+3) = m^2 - 4m + 4 + 2m + 6 = m^2 - 2m + 10.$$

Dette udtryk er et andengradspolynomium i m. Det bliver mindst muligt når m er førstekoordinaten for toppunktet, dvs. for $m = \frac{2}{2} = 1$.

Opgave 3. *På tre parallelle linjer med afstande som angivet på figuren ligger punkterne A, B og C således at firkant $ABCD$ er et kvadrat. Find arealet af dette kvadrat.*





▷kongruente trekanter

Løsning. De to retvinklede trekanter ABP og BCQ (se figuren) er kongruente. De er nemlig ensvinklede (idet $\angle QBC + 90^\circ + \angle PBA = 180^\circ$), og de har begge kvadratets sidelængde s som hypotenuse. Altså er $|AP| = |BQ| = 7$. Med brug af Pythagoras findes det ønskede areal s^2 som $s^2 = 5^2 + 7^2 = 74$.

Opgave 4. *Lad a og b være positive reelle tal med $a + b = 1$. Vis at*

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Løsning. Bemærk først at $1 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, så $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$. Vi har nu at

$$\begin{aligned}(a + \tfrac{1}{a})^2 + (b + \tfrac{1}{b})^2 &= a^2 + \tfrac{1}{a^2} + 2 + b^2 + \tfrac{1}{b^2} + 2\\ &= a^2 + b^2 + \tfrac{b^2+a^2}{a^2b^2} + 4\\ &= (a^2 + b^2)(1 + \tfrac{1}{a^2b^2}) + 4\\ &= (1 - 2ab)(1 + \tfrac{1}{(ab)^2}) + 4.\end{aligned}$$

Begge faktorer er mindst mulige når ab er størst mulig. Da $ab = a(1-a) = a - a^2 \leq \frac{1}{4}$ (hvor den sidste ulighed følger af at $0 \leq (a - \frac{1}{2})^2$ eller ved brug af toppunktsformlen for parablen), er

$$(1 - 2ab)(1 + \tfrac{1}{(ab)^2}) + 4 \geq (1 - \tfrac{1}{2})(1 + \tfrac{1}{16}) + 4 = \tfrac{25}{2},$$

og heraf følger det ønskede.

Opgave 5. *En nydelig frugtanretning på et stort rundt fad er kantet med jordbær. Der er brugt mellem* 100 *og* 200 *bær til denne kant. Et lækkersultent barn spiser først et af jordbærrene og begynder derpå at gå rundt og rundt om fadet, idet hun spiser jordbær på følgende måde: Når hun har spist et bær, lader hun det næste ligge, derefter spiser hun det næste, lader det næste ligge, osv. Således fortsætter hun indtil der kun er et eneste jordbær tilbage. Dette bær er det der lå lige efter det allerførste hun spiste. Hvor mange bær lå der oprindelig?*

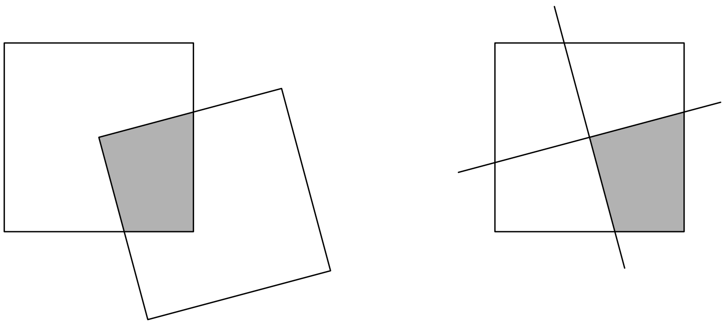
Løsning. Vi nummererer bærrene fra 0 til n (der var således oprindelig $n + 1$ bær) og noterer at bær nummer 0 spises, samt at bær nummer 1 overspringes hver gang. I første tur rundt om fadet må det sidste bær blive spist (for vi ved jo at det næste, nemlig bær nummer 1, ikke bliver spist). Altså må n være et lige tal. Efter første tur resterer $n/2$ bær. I anden runde må det sidste af de $n/2$ bær blive spist (fordi det næste, bær nummer 1, ikke bliver spist). Altså må $n/2$ være et lige tal. Efter anden tur resterer halvdelen af disse, dvs. $n/(2^2)$ bær. Således fortsættes. Efter den k'te tur resterer $n/(2^k)$ bær. Efter sidste tur er $n/(2^k) = 1$. Altså er n af formen 2^k. Da samtidig $100 \leq n + 1 \leq 200$, må det oprindelige antal bær være $n + 1 = 2^7 + 1 = 129$.

Løsninger · 1997

Opgave 1. *Lad $n = 123456789101112\ldots998999$ være det naturlige tal der fremkommer ved at skrive de naturlige tal fra 1 til 999 op efter hinanden. Hvad er ciffer nummer 1997 i n?*

Løsning. Ved optælling fra venstre ses at tallene fra 1 til 9 bidrager med 9 cifre, tallene fra 10 til 99 med $90 \cdot 2 = 180$ cifre, tallene fra 100 til 199 med $100 \cdot 3 = 300$ cifre, tallene 200 til 299 igen med 300 cifre osv. Da $1997 = 1800 + 197 = 6 \cdot 300 + 180 + 9 + 8$, fremkommer det 1997. ciffer otte pladser efter 699: $\ldots69970070170\!\!\mathbf{0}2\ldots$. Det er altså et 0.

Opgave 2. *To kvadrater, begge med sidelængde 1, er anbragt således at det ene har en vinkelspids i det andets midtpunkt. Bestem arealet af det grå område.*



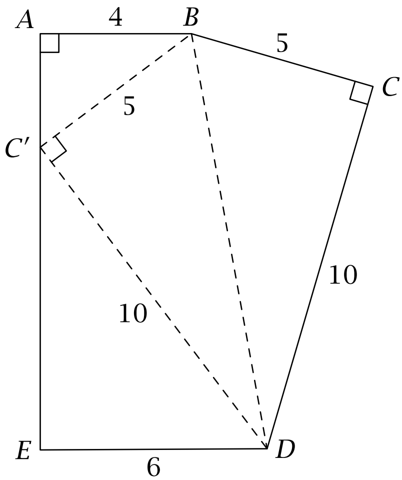
Løsning. Ved indtegning af de viste hjælpelinjer deles kvadratet i fire dele. Da de fire dele føres over i hinanden ved en drejning på 90° om kvadratets midtpunkt, er de kongruente og har dermed alle samme areal. Det søgte areal er derfor $\frac{1}{4}$.

Opgave 3. *Om femkant $ABCDE$ vides at vinkel A og vinkel C er rette, og at siderne $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|CD| = 10$, $|DE| = 6$. Endvidere gælder det at punktet C', der fremkommer ved spejling af C i linjen BD, ligger på linjestykket AE. Find vinkel E.*

Løsning. I den retvinklede trekant ABC' er $|AC'| = 3$ (benyt Pythagoras). Så er $\sin(\angle ABC') = \frac{3}{5}$. Da $\angle EC'D + \angle AC'B = 90^\circ$ (se på vinklerne omkring C') og $\angle ABC' + \angle AC'B = 90^\circ$ (udnyt vinkelsum i trekant ABC'), er $\angle EC'D = \angle ABC'$. Altså er $\sin(\angle EC'D) = \frac{3}{5}$. Sinusrelationen i trekant $EC'D$ siger nu at

$$\frac{\sin(\angle DEC')}{10} = \frac{\sin(\angle EC'D)}{6},$$

hvoraf $\sin(\angle DEC') = \frac{10}{6} \cdot \sin(\angle EC'D) = \frac{10}{6} \cdot \frac{3}{5} = 1$. Altså er $\angle E = 90^\circ$.



Opgave 4. *Find alle par (x, y) af naturlige tal som tilfredsstiller ligningen*

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 1997.$$

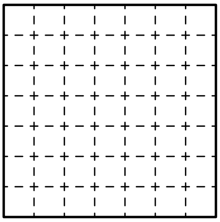
Løsning. Da $xy + 3y = (x+3)y$ og $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, kan den givne ligning omskrives til $(x+3)(x-1) - (x+3)y = 1994$ og videre til

$$(x+3)(x-1-y) = 1994.$$

Tallet 1994 har primfaktorerne 2 og 997. De eneste mulige faktoriseringer af tallet 1994 er så $1994 \cdot 1$ og $997 \cdot 2$. Da $x + 3$ er den største af faktorerne, fås derfor enten $x + 3 = 1994$ og $x - 1 - y = 1$, eller $x + 3 = 997$ og $x - 1 - y = 2$. Heraf fås løsningssættene $(x, y) = (1991, 1989)$ og $(x, y) = (994, 991)$.

Opgave 5. *Et 7 × 7-kvadrat er skåret ud i brikker af følgende typer:*

type (a) *type (b)*

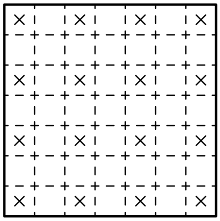


Vis at netop en af brikkerne er af type (b).

Løsning. Lad x og y betegne antallet af brikker af henholdsvis type (a) og type (b). Vi skal vise at $y = 1$. Brikkerne dækker i alt 49 felter, dvs.

$$3x + 4y = 49.$$

Da 49 ikke er delelig med 3, fremgår heraf specielt at y ikke kan være 0.



Brikkerne kan dække et 7 × 7-kvadrat forsynet med krydser som vist. Da hver brik på grund af sin form højst kan dække ét kryds, må der være mindst 16 brikker, dvs. $x + y \geq 16$ og dermed

$$3x + 3y \geq 48.$$

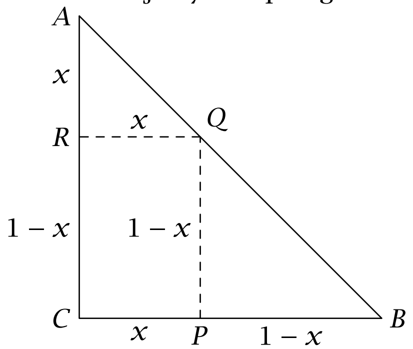
Ved at udnytte disse to oplysninger får vi

$$y = (3x + 4y) - (3x + 3y) \leq 49 - 48 = 1.$$

Da $y \neq 0$, fås $y = 1$ som ønsket.

Opgave 1. *I trekant ABC er vinkel C ret, og de to kateter har begge længden* 1*. For et givet valg af punktet P på kateten BC afsættes punktet Q på hypotenusen og punktet R på den anden katete således at PQ er parallel med AC, og QR er parallel med BC. Derved opdeles trekanten i tre dele. Bestem de beliggenheder af punktet P for hvilke den rektangulære del har større areal end hver af de to andre dele.*

Løsning. Sæt $|PC| = x$. Så er $|PB| = 1 - x$. Da de små trekanter er ligebenede ligesom den store, har de andre linjestykker på figuren de angivne længder.



Betingelsen for at rektanglets areal er større end arealet af trekant ARQ, er at $x(1 - x) > \frac{1}{2}x^2$, hvilket ved division med det positive tal x omskrives til $1 - x > \frac{1}{2}x$ og videre til $x < \frac{2}{3}$. På helt tilsvarede måde findes (ved blot at bytte om på x og $1 - x$) at betingelsen for at rektanglets areal er større end arealet af trekant BPQ, er at $1 - x < \frac{2}{3}$, som er ensbetydende med $x > \frac{1}{3}$. Kravet er altså at $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$, dvs. at punktet P skal ligge på den midterste tredjedel af linjestykket BC.

Opgave 2. *Bestem alle reelle talsæt (x, y, z) som opfylder ligningssystemet*

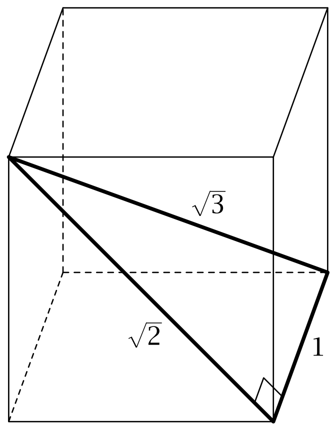
$$xy = z$$
$$xz = y$$
$$yz = x.$$

Løsning. Multiplikation af de tre ligninger med hinanden giver $(xyz)^2 = xyz$. Heraf følger at $xyz = 0$ eller $xyz = 1$. Hvis $xyz = 0$, er mindst et af tallene lig med 0, og det følger så af det oprindelige ligningssystem at de alle er lig med 0.

Hvis $xyz = 1$, er alle tre tal forskellige fra 0, og vi kan gange ligningerne igennem med henholdsvis z, y og x, hvorved ligningssystemet bliver ensbetydende med $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. Så er $(x, y, z) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, hvor det negative fortegn må optræde et lige antal gange på grund af betingelsen $xyz = 1$. Samtlige løsninger til ligningssystemet er altså at finde blandt talsættene $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$. At alle disse faktisk *er* løsninger, ses ved at gøre prøve i det oprindelige ligningssystem. Hermed er den fuldstændige løsning bestemt.

Opgave 3. *Årets gaveidé fra* BabyMath *består af en serie på ni farvede plastikbeholdere af aftagende størrelse, skiftevis af form som en terning og en kugle. Alle beholdere kan åbnes og lukkes med et praktisk hængsel, og hver beholder kan lige netop rumme den næste i rækken. Den største og mindste beholder er begge terninger. Bestem forholdet mellem disse terningers kantlængder.*

Løsning. I en terning med kantlængde 1 har diagonalen i de kvadratiske sideflader længden $\sqrt{2}$. Rumdiagonalen har da længden $\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$ (udnyt Pythagoras i en trekant bestående af en kant, en sidediagonal og en rumdiagonal).

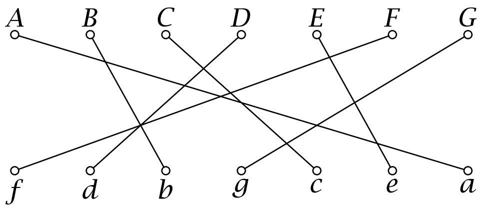


Den omskrevne kugle for en terning med kantlængde 1 har terningens rumdiagonal som diameter. Kuglens diameter er altså $\sqrt{3}$. Men diameteren i en kugle er samtidig kantlængde for kuglens omskrevne terning. Forholdet mellem kantlængderne for en terning og den næste terning i serien er dermed $\sqrt{3}$. Da der er fire terninger i alt, vil $(\sqrt{3})^4 = 3^2 = 9$ være det søgte kantlængdeforhold.

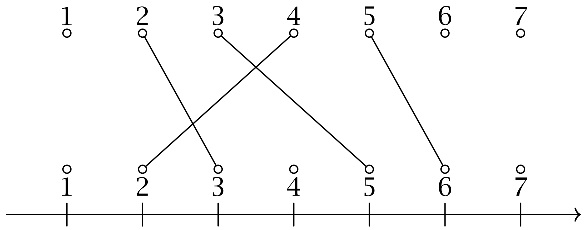
Opgave 4. *Om et naturligt tal n oplyses at tallet n^2 har 7 som næstsidste ciffer. Hvad er sidste ciffer i n^2?*

Løsning. Lad x betegne sidste ciffer i tallet n. Så kan n skrives på formen $n = 10y + x$. Dermed er $n^2 = 100y^2 + 2yx \cdot 10 + x^2$. Leddet $2yx \cdot 10$ bidrager med et lige antal tiere til tallet n^2. Da antallet af tiere i n^2 er syv, altså ulige, må x^2 levere et ulige antal tiere. Men da x^2 er et af tallene $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$, følger heraf at x^2 må være enten 16 eller 36. Tallet x^2 og dermed også tallet n^2 har altså slutcifferet 6.

Opgave 5. *I en balsal sidder syv herrer A, B, C, D, E, F og G lige over for syv damer a, b, c, d, e, f og g i en tilfældig rækkefølge. Da herrerne rejser sig og går over dansegulvet for at bukke for hver deres dame, er der en der bemærker at mindst to af herrerne tilbagelægger lige lange veje. Vil det altid være sådan? Figuren viser et eksempel. I eksemplet er $|Bb| = |Ee|$ og $|Dd| = |Cc|$.*



Løsning. Svaret er ja. Vi indlægger en x-akse parallel med de to stolerækker som vist og identificerer personernes navne med x-værdien for deres placering.



To veje er lige lange netop hvis den numeriske værdi af differensen mellem x-koordinaterne til deres endepunkter er ens. Da såvel $A, B, \ldots, G$ som $a, b, \ldots, g$ er tallene 1 til 7 i en eller anden rækkefølge, er $A + B + \cdots + G = a + b + \cdots + g$ og dermed

$$(A - a) + (B - b) + \cdots + (G - g) = 0.$$

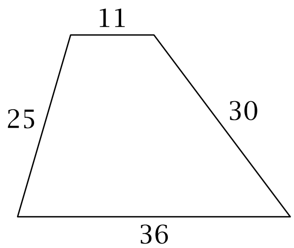
Hvis alle de syv differenser $A - a$, $B - b, \ldots, G - g$ var forskellige numerisk set, måtte alle syv mulige numeriske differenser $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ optræde, og så ville altså summen

$$0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6$$

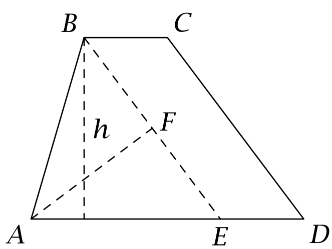
være 0 for en eller anden kombination af fortegnene. Dette er imidlertid umuligt da summen – uanset hvordan fortegnene vælges – indeholder et ulige antal ulige led og derfor ikke kan være lige.

Løsninger · 1995

Opgave 1. *Et trapez har sidelængder som angivet på figuren (siderne med længde* 11 *og* 36 *er parallelle). Beregn trapezets areal.*



Løsning. På figuren er BE tegnet parallel med CD. Så er $BCDE$ et parallelogram, og dermed $|BE| = 30$ og $|ED| = 11$. Videre fås $|AE| = 36 - 11 = 25$. I den ligebenede trekant ABE findes højden AF på grundlinjen BE til 20 (udnyt Pythagoras på den retvinklede trekant AFE, hvor hypotenusen er $|AE| = 25$, og den anden katete er $|EF| = 15$).



Vi kan nu bestemme højden h i trapezet ved at udtrykke arealet af trekant ABE på to måder: $\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30$, hvoraf $h = \frac{20 \cdot 30}{25} = 4 \cdot 6 = 24$. Trapezets

▷arealer

areal er derfor $\frac{1}{2}h(11 + 36) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (11 + 36) = 564$.

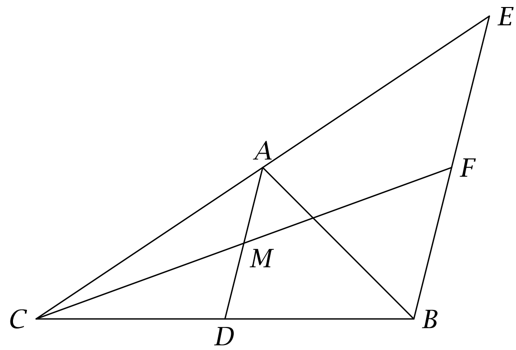
Opgave 2. *Find alle sæt af fem på hinanden følgende hele tal med den egenskab at summen af kvadraterne på de tre første tal er lig med summen af kvadraterne på de to sidste.*

Løsning. Lad n betegne det midterste af de fem tal. Så kan vi opskrive ligningen

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2.$$

Ved udregning fås $n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4$, som omskrives til $n^2 - 12n = 0$, og videre til $n(n - 12) = 0$. Denne ligning har løsningerne $n = 0$ og $n = 12$. De søgte talsæt er dermed $(-2, -1, 0, 1, 2)$ og $(10, 11, 12, 13, 14)$.

Opgave 3. *Fra vinkelspidsen C i trekant ABC tegnes en ret linje der halverer medianen fra A. I hvilket forhold deler denne linje siden AB?*



Løsning. Midtpunktet af BC kaldes D, og midtpunktet af medianen AD kaldes M. Gennem B tegnes en linje parallel med AD. Forlængelsen af CA skærer denne linje i E. Forlængelsen af CM skærer BE i F. Da AD bliver midtpunktstransversal i trekant CEB, er A midtpunkt af CE. Endvidere er $|AM| = |DM|$, hvorfor $|EF| = |BF|$, så F er midtpunkt af BE. Heraf følger at AB og CF er medianer i trekant CEB, hvorfor de deler hinanden i forholdet 1 : 2.

▷midtpunkts-transversal

▷median

Opgave 4. *Løs ligningen*

$$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3,$$

hvor x er et reelt tal.

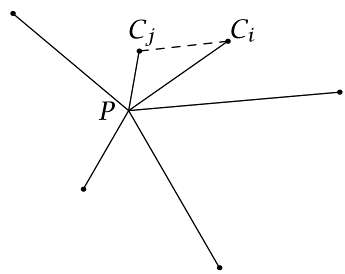
Løsning. Bemærk først at $4^x + 2^x - 6 = (4^x - 2) + (2^x - 4)$. Sætter vi $y = 2^x - 4$ og $z = 4^x - 2$, kan den oprindelige ligning herefter skrives $y^3 + z^3 = (y + z)^3$. Da udtrykket på højre side er lig med $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$, kan ligningen omskrives til $3y^2z + 3yz^2 = 0$ og videre til $yz(y + z) = 0$. Herefter udnyttes nulreglen. Første faktor er 0 for $x = 2$ (idet $y = 0$ betyder $2^x - 4 = 0$), og anden faktor er 0 for $x = \frac{1}{2}$ (idet $z = 0$ er ensbetydende med $4^x = 2$). Ved at sætte den tredje faktor lig med 0 får vi ligningen $4^x + 2^x - 6 = 0$, som kan omskrives til $(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$. Denne andengradsligning i 2^x løses: Diskriminanten er $1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, hvorefter $2^x = \frac{-1 \pm 5}{2}$, dvs. $2^x = 2$ (idet den negative værdi bortfalder) og dermed $x = 1$. Alt i alt har ligningen altså de tre løsninger $\frac{1}{2}$, 1 og 2.

Opgave 5. *I planen er der givet seks cirkler således at ingen af cirklerne indeholder en andens centrum. Vis at der ikke findes et punkt som ligger i alle cirklerne.*

Løsning. Vi fører beviset ved at vise at hvis der findes et punkt der ligger inden for seks cirkler, så vil en af cirklerne indeholde en andens centrum.

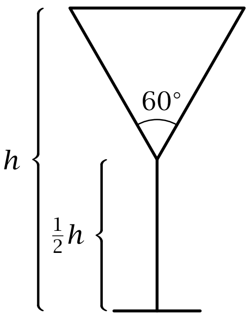
Antag altså at P er et punkt der ligger i alle cirklerne. Tegn linjestykkerne der forbinder P med hvert af centrene $C_1, C_2, \dots, C_6$ i de seks givne cirkler. Herved fremkommer seks vinkler med toppunkt i P. Summen af disse er $360°$; altså må mindst en af vinklerne $\angle C_iPC_j$ være højst $60°$.

Hvis $\angle C_iPC_j = 0°$, ligger C_i på linjestykket PC_j eller C_j på linjestykket PC_i, og dermed ligger C_i i den j'te cirkel eller C_j i den i'te.

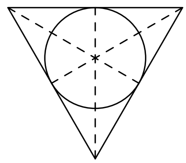


I tilfældet $0° < \angle C_iPC_j \leq 60°$ ses på trekant C_iPC_j. Da vinkelsummen i en trekant er $180°$, er mindst en af de øvrige vinkler PC_iC_j og PC_jC_i i denne trekant mindst $60°$. Men så er C_iC_j mindre end eller lig med mindst et af linjestykkerne PC_j og PC_i. Disse er igen mindre end eller lig med radius i henholdsvis den j'te og den i'te cirkel da P lå i alle cirklerne. Dermed er C_iC_j mindre end eller lig med mindst en af disse radier, hvoraf følger at C_i ligger i den j'te cirkel eller C_j i den i'te. Hermed er beviset ført i alle tilfælde.

Opgave 1. *Et vinglas med et tværsnit som vist har den egenskab at en appelsin af form som en kugle med radius* 3 cm *lige netop kan anbringes i glasset uden at rage op over glasset. Bestem højden h af glasset.*



Løsning. På figuren nedenfor ses et tværsnit af situationen. Højderne i den ligesidede trekant er også vinkelhalveringslinjer og skærer derfor hinanden i den indskrevne cirkels centrum. Endvidere er de medianer og deler derfor hinanden i forholdet 1 : 2. Da den indskrevne cirkel har radius 3 cm, har medianerne dermed længden 9 cm. Glassets samlede højde er altså 18 cm. ▷median



Opgave 2. *Et tog gennemkører en bestemt strækning med en konstant fart. Hvis farten sættes op med* 10 *kilometer i timen, kan turen gøres* 40 *minutter hurtigere. Hvis farten derimod sættes ned med* 10 *kilometer i timen, tager turen* 1 *time længere. Hvor lang er den gennemkørte strækning?*

Løsning. Kaldes farten (målt i kilometer i timen) for v, strækningen (målt i kilometer) for s og tiden (målt i timer) for t, får vi følgende tre relationer:

$$\begin{aligned} s &= tv, \\ s &= (t - \tfrac{2}{3})(v + 10), \\ s &= (t + 1)(v - 10). \end{aligned}$$

Ved at gange parenteserne ud og erstatte s med tv kan vi omskrive de to sidste ligninger til

$$\begin{aligned} 10t - \frac{2}{3}v &= \frac{20}{3}, \\ -10t + v &= 10. \end{aligned}$$

Dette ligningssystem løses: Ved addition af de to ligninger fås $\frac{1}{3}v = \frac{50}{3}$, altså $v = 50$, og derefter findes t vha. den nederste ligning til $t = 4$. Den gennemkørte strækning er dermed $4 \cdot 50 = 200$ kilometer.

Opgave 3. *Tredjegradspolynomiet* $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ *har de tre rødder* a, b *og* c. *Angiv et tredjegradspolynomium med rødderne* $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ *og* $\frac{1}{c}$.

Løsning. Bemærk at a, b og c ikke er 0 da 0 ikke er rod i P. Polynomiet

$$Q(x) = 1 + 2x - 3x^2 - 5x^3$$

opfylder det ønskede. For $x \neq 0$ gælder nemlig

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} = \frac{1}{x^3}(x^3 + 2x^2 - 3x - 5) = \frac{1}{x^3}P(x),$$

og dermed som ønsket

$$Q\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^3}P(r) = 0$$

▷polynomium

for hver af rødderne $r = a$, $r = b$ og $r = c$ i $P(x)$.

Opgave 4. *I en retvinklet trekant hvori alle sidelængder er hele tal, har den ene katete længden* 1994*. Bestem længden af hypotenusen.*

Løsning. Kaldes den ukendte katete a og hypotenusen c, gælder

$$1994^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a).$$

Bemærk at tallene $c + a$ og $c - a$ begge er lige (da deres produkt er lige, er nemlig mindst et af dem lige, og da deres differens $(c + a) - (c - a) = 2a$ er lige, må det andet også være det). Ved division med 2^2 fås

$$997^2 = \frac{c - a}{2} \cdot \frac{c + a}{2},$$

hvor faktorerne på højre side er hele tal, og den første faktor er mindre end den anden. Da 997 er et primtal, er $1 \cdot 997^2$ den eneste mulige opspaltning som et produkt af den ønskede art. Vi får altså

$$\frac{c - a}{2} = 1,$$
$$\frac{c + a}{2} = 997^2,$$

hvoraf ved addition

$$\begin{aligned} c &= 1 + 997^2 \\ &= 1 + (1000 - 3)^2 \\ &= 1 + 1000000 + 9 - 6000 \\ &= 994010. \end{aligned}$$

Opgave 5. *I en retvinklet og ligebenet trekant har de to kateter begge længden* 1*. Find længden af det korteste linjestykke der deler trekanten i to figurer med samme areal, og angiv dette linjestykkes placering.*

Løsning. Længden af det delende linjestykke betegnes d. Ved deling afskæres en trekant med arealet $\frac{1}{4}$. Vi ser først på det tilfælde hvor trekanten indeholder en af de oprindelige vinkler på 45°.

Når siderne betegnes p og q, er arealet $\frac{1}{2}pq\sin(45°) = \frac{1}{4}$, hvoraf det ses at $2pq = \sqrt{2}$ (udnyt at $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Med cosinusrelationen fås nu ▷specielle vinkler

$$\begin{aligned} d^2 &= p^2 + q^2 - 2pq\cos(45°) \\ &= p^2 + q^2 - 1 \\ &= (p-q)^2 + 2pq - 1 \\ &= (p-q)^2 + \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Dette udtryk er minimalt for $p = q$. Den afklippede trekant skal altså være ligebenet, og længden af det delende linjestykke bliver

$$d = \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Vi mangler at vise at denne længde ikke kan gøres mindre i det tilfælde hvor den afskårne trekant indeholder den rette vinkel. I det tilfælde gås frem på tilsvarende måde: Med sidebetegnelserne p og q er den afskårnes trekants areal $\frac{1}{2}pq = \frac{1}{4}$, så at $pq = \frac{1}{2}$, og med Pythagoras fås

$$d^2 = p^2 + q^2 = p^2 + q^2 - 2pq + 2pq = (p-q)^2 + 1.$$

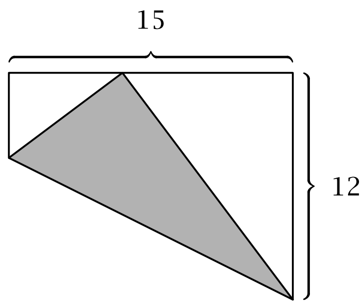
Den minimale værdi af d i det retvinklede tilfælde bliver dermed 1, altså større end den ovenfor fundne værdi.

Løsninger · 1993

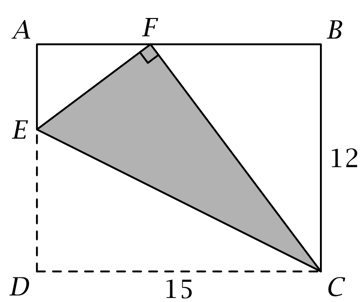
Opgave 1. *Tre kammerater A, B og C har tilsammen* 120 *kroner. Først giver A lige så mange penge til B som B har i forvejen. Dernæst giver B lige så mange penge til C som C har i forvejen. Til sidst giver C lige så mange penge til A som A nu har. Efter disse transaktioner har A, B og C lige mange penge. Hvor mange penge havde hver af de tre kammerater oprindelig?*

Løsning. Oprindelig har A, B og C henholdsvis a, b og c kroner. Fordelingen (a, b, c) ændres først til $(a - b, 2b, c)$, dernæst til $(a - b, 2b - c, 2c)$ og sluttelig til $(2(a - b), 2b - c, 2c - (a - b))$. Til slut har A, B og C lige mange penge, dvs. 40 kroner hver. Altså er $2(a - b) = 40$, $2b - c = 40$ og $2c - (a - b) = 40$, hvoraf $a - b = 20$, $c = \frac{1}{2}(40 + (a - b)) = 30$, $b = \frac{1}{2}(40 + c) = 35$ og $a = b + 20 = 55$.

Opgave 2. *Et rektangulært stykke papir har sidelængderne* 12 *og* 15*. Et hjørne bukkes om som vist på figuren. Bestem arealet af den grå trekant.*



Løsning. Med figurens betegnelser gælder $|FC| = |DC| = 15$. Med Pythagoras udregnes $|FB| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, og dermed bliver $|AF| = 15 - 9 = 6$. De to retvinklede trekanter EFA og FCB er ensvinklede; der gælder nemlig $\angle AFE = 90^\circ - \angle BFC$ (se på vinklerne omkring F) og $\angle FCB = 90^\circ - \angle BFC$ (udnyt vinkelsum i trekant FCB), altså $\angle AFE = \angle FCB$. Da trekanterne EFA og FCB er ensvinklede med sideforholdet $6 : 12 = 1 : 2$, er $|EF| = \frac{1}{2} \cdot 15$. Det søgte areal bliver da $\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot 15 = \frac{225}{4}$.



Opgave 3. *Bestem samtlige reelle løsninger (x, y) til ligningssystemet*

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16}.$$

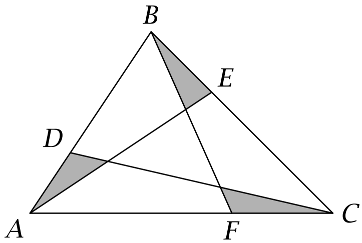
Løsning. Ved indsættelse af $y^2 = 1 - x^2$ i den nederste ligning fås

$$x^6 + (1 - x^2)^3 = \frac{7}{16},$$

som kan omskrives til $x^6 + 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = \frac{7}{16}$. Ved at samle leddene og dividere igennem med 3 fås $x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = 0$. Denne ligning betragtes som en andengradsligning i x^2 med diskriminanten $1-4\cdot 1\cdot\frac{3}{16} = \frac{1}{4}$. Så er $x^2 = \frac{1+\sqrt{1/4}}{2} = \frac{3}{4}$ eller $x^2 = \frac{1-\sqrt{1/4}}{2} = \frac{1}{4}$, hvortil svarer henholdsvis $y^2 = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ og $y^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Dermed fås i alt følgende otte løsninger: ▷nyttige omskrivninger

$$\Big(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \qquad \Big(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Big), \qquad \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\Big), \qquad \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\Big).$$

Opgave 4. *I trekant ABC afskærer punkterne D, E og F en tredjedel af de respektive sider. Vis at summen af arealerne af de tre grå trekanter er lig med arealet af midtertrekanten.*



Løsning. Lad T_1, T_2, T_3, T_M og T betegne arealerne af henholdsvis hver af de grå trekanter, midtertrekanten og hele trekant ABC. Betragt nu trekanterne ABE, BCF og CAD. Hver af disse har et areal på en tredjedel af hele trekantens areal (da deres grundlinje er en tredjedel af hele trekantens grundlinje). Da trekanterne delvis overlapper hinanden, bliver arealet af deres foreningsmængde (dvs. arealet af hele trekant ABC bortset fra midtertrekanten) $3\cdot\frac{1}{3}T - (T_1 + T_2 + T_3)$, altså $T - (T_1 + T_2 + T_3)$. På den anden side har den nævnte foreningsmængde naturligvis arealet $T - T_M$. Altså fås $T_M = T_1 + T_2 + T_3$ som ønsket.

Opgave 5. *I en papkasse ligger et stort antal løse sokker. Nogle af sokkerne er røde; de øvrige er blå. Det oplyses at det samlede antal sokker ikke overstiger* 1993. *Endvidere oplyses det at sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve når man på tilfældig måde udtrækker to sokker fra kassen, er* $\frac{1}{2}$. *Hvad er efter de foreliggende oplysninger det største antal røde sokker der kan befinde sig i kassen?*

▷kombination

Løsning. Med n betegnes det samlede antal sokker, med r antallet af røde sokker. Man kan trække to sokker ud af n på i alt

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

▷multiplikationsprincippet

▷sandsynlighed

måder. Man kan trække to sokker af forskellig farve på i alt $r(n-r)$ måder. Sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve er dermed

$$\frac{r(n-r)}{n(n-1)/2} = \frac{2r(n-r)}{n(n-1)}.$$

Den opgivne betingelse er ensbetydende med at denne sandsynlighed er $\frac{1}{2}$, altså at $\frac{2r(n-r)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$. Dette kan omskrives til $4rn - 4r^2 = n^2 - n$ eller

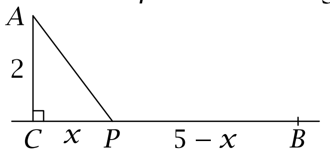
$$4r^2 - 4nr + (n^2 - n) = 0.$$

Denne andengradsligning i r har diskriminanten $16n^2 - 4 \cdot 4(n^2 - n) = 16n$, og dermed er

$$r = \frac{4n \pm 4\sqrt{n}}{8} = \frac{n \pm \sqrt{n}}{2}.$$

Da r er et helt tal, må n være et kvadrattal. Den størst mulige værdi for r fremkommer når kvadrattallet n er så stort som muligt. Da $44^2 = 1936 \leq 1993$, mens $45^2 > 1993$, er $n = 44^2$ den største brugbare værdi, og den søgte størst mulige værdi af r er da $r = \frac{1}{2}(44^2 + 44) = 990$.

Opgave 1. *En mand i en robåd befinder sig i punktet A i 2 kilometers afstand fra en retlinet kyststrækning. Ved først at ro ind til et punkt P og derefter spadsere langs med kysten når han frem til punktet B, som ligger i en afstand 5 kilometer fra C, der er punktet på kysten nærmest A. Mandens ro-hastighed er 3 kilometer i timen, og hans spadsere-hastighed er 5 kilometer i timen. Afgør hvor P skal placeres mellem C og B så at manden på kortest mulig tid kommer fra A til B.*



Løsning. Vi sætter $|CP| = x$. Så er $|AP| = \sqrt{x^2+4}$ (Pythagoras) og $|PB| = 5 - x$. Den samlede turs varighed er da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{5-x}{5} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + 1 - \frac{x}{5}.$$

Vi finder minimum ved at undersøge nulpunkter og fortegn for den afledede funktion

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x + 0 - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5}.$$

Vi ser at $f'(x) = 0$ når $5x = 3\sqrt{x^2+4}$. Ved kvadrering og omskrivning fås $16x^2 = 36$ med løsningen $x = \frac{3}{2}$ i det relevante interval. Da $f'(0)$ er negativ og $f'(5)$ positiv (ses ved indsættelse i udtrykket for $f'(x)$), konkluderes at f har minimum for $x = \frac{3}{2}$. Punktet P skal altså placeres 1,5 kilometer fra C.

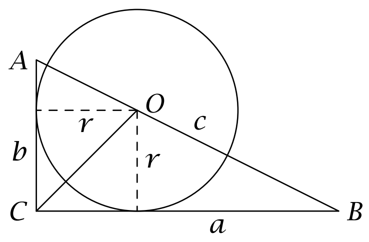
Opgave 2. *I en retvinklet trekant betegner a og b længderne af de to kateter. En cirkel med radius r har centrum på hypotenusen og rører begge kateter. Vis at*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}.$$

Løsning. Cirklens centrum betegnes O. Arealet af trekant ABC er lig med summen af arealerne af trekanterne ACO og BCO. Altså er $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}ra$, og dermed $ab = rb + ra$. Ved division med abr fås

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

som ønsket.



Opgave 3. *Lad x og y være positive tal med $x + y = 1$. Vis at*

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y}) \geq 9.$$

Løsning. Vi viser uligheden ved at påvise at den er ensbetydende med et sandt udsagn. Ved multiplikation med det positive tal xy omskrives den ønskede ulighed til $(x + 1)(y + 1) \geq 9xy$. Med brug af $x + y = 1$ kan venstre side omskrives: $(x+1)(y+1) = x + xy + y + 1 = xy + (x + y) + 1 = xy + 2$. Vi skal altså vise at $xy + 2 \geq 9xy$, dvs.

$$\frac{1}{4} \geq xy.$$

Ved igen at udnytte $x + y = 1$ kan denne ulighed videre omskrives til $\frac{1}{4} \geq x(1-x)$ eller $x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$, dvs. $(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$. Da dette er sandt for alle værdier af x, er den oprindelige ulighed hermed bevist.

Opgave 4. *Lad a, b og c betegne sidelængderne og m_a, m_b og m_c medianernes længder i en vilkårlig trekant. Vis at*

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

Vis endvidere at der ikke findes noget snævrere interval der for enhver trekant indeholder størrelsen

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c}.$$

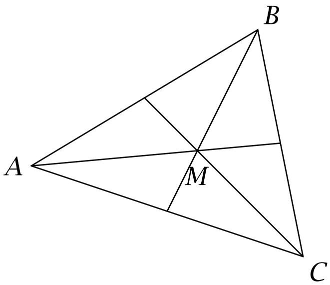
Løsning. Medianerne skærer hinanden i et punkt M, og de deler hinanden i forholdet $2 : 1$. Ved betragtning af trekant BMC fås

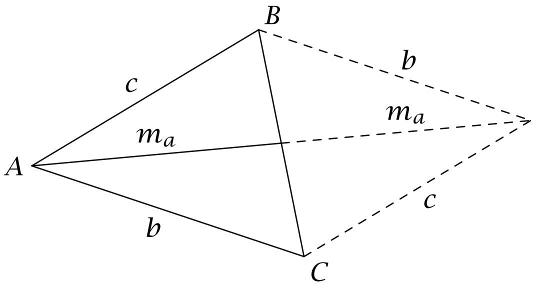
▷median

$$a < \tfrac{2}{3}m_b + \tfrac{2}{3}m_c,$$

idet en side i en trekant altid er mindre end summen af de to øvrige sider. Tilsvarende fås for trekant AMC og trekant AMB

$$b < \tfrac{2}{3}m_a + \tfrac{2}{3}m_c,$$
$$c < \tfrac{2}{3}m_a + \tfrac{2}{3}m_b.$$





Ved addition af de tre uligheder fås

$$a + b + c < \tfrac{4}{3}m_a + \tfrac{4}{3}m_b + \tfrac{4}{3}m_c$$

og dermed

$$\frac{3}{4} < \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c}.$$

Hermed er den ene del af den ønskede dobbeltulighed bevist.

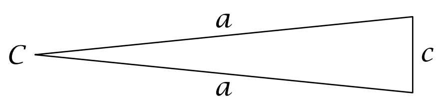
Betragtes nu en passende trekant i det parallelogram der fremkommer ved at dreje trekant ABC 180° om midtpunktet af BC, ses at $2m_a < b + c$. For de øvrige sider fås på tilsvarende måde $2m_b < a + c$ og $2m_c < a + b$. Ved addition fås

$$2(m_a + m_b + m_c) < 2(a + b + c),$$

hvoraf

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} < 1.$$

Hermed er hele dobbeltuligheden bevist.



For at indse at uligheden ikke kan skærpes, betragter vi en ligebenet trekant ABC med $a = b$. Hvis $\angle C$ nærmer sig 0°, vil summen af de tre sider nærme sig $2a$, mens summen af de tre medianer vil nærme sig $a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = 2a$. Forholdet $\frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c}$ kan derved komme vilkårlig tæt på $\frac{2a}{2a} = 1$. Hvis omvendt $\angle C$ nærmer sig 180°, vil summen af siderne nærme sig $a + a + 2a = 4a$, mens summen af medianerne vil nærme sig $0 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}a = 3a$. Forholdet $\frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c}$ kan derved komme vilkårlig tæt på $\frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$. Hermed har vi vist at intervalgrænserne 1 og $\frac{3}{4}$ er de bedst mulige.

Opgave 5. *I en hat ligger* 1992 *sedler med alle numre fra* 1 *til* 1992*. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differensen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel, som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er én seddel tilbage i hatten. Vis at der på denne seddel står et lige tal.*

Løsning. I hvert træk vil antallet af sedler med ulige tal enten reduceres med to (nemlig hvis der fjernes to ulige sedler og dermed lægges en lige) eller være uændret (hvis der fjernes to lige og lægges en lige, eller hvis der fjernes en lige og en ulige og lægges en ulige). Da antallet af sedler med ulige tal fra start af er lige (nemlig $1992/2 = 996$), vil det derfor vedblive med at være lige. Antallet af ulige sedler når der kun er én seddel tilbage, er derfor nul. Den sidste seddel bærer dermed et lige nummer.

Opgave 1. *Beskriv mængden af de punkter* $P(x, y)$ *som har dobbelt så stor afstand til* $A(3, 0)$ *som til* $O(0, 0)$*.*

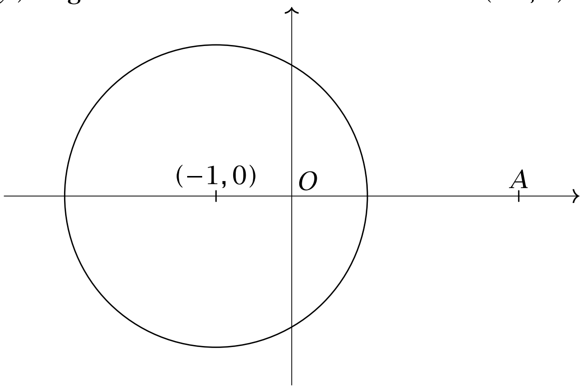
▷afstandsformlen

Løsning. Ifølge afstandsformlen er $|AP| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ og $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Derfor er betingelsen $|AP| = 2|OP|$ ensbetydende med $(x-3)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$. Dette omskrives til $3x^2 + 3y^2 + 6x - 9 = 0$ og videre til

$$(x+1)^2 + y^2 = 4.$$

▷cirklens ligning

Punkterne $P(x, y)$ udgør altså en cirkel med centrum i $(-1, 0)$ og radius 2.



Opgave 2. *Bevis at der for* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *gælder at* $\sin x + \tan x > 2x$*.*
Løsning. Vi viser den ønskede ulighed ved at vise at funktionen

$$f(x) = \sin x + \tan x - 2x$$

er positiv for alle $x \in \,]0; \frac{\pi}{2}[$. Ved differentiation fås

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2.$$

Da $0 < \cos x < 1$ for alle x i intervallet $]0; \frac{\pi}{2}[$, har vi at $\cos x > \cos^2 x$ og $\cos x \neq \frac{1}{\cos x}$ for alle x i dette interval. Derfor er

$$\begin{aligned} f'(x) &> \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \\ &= \left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Da nu f er kontinuert i intervallet $[0; \frac{\pi}{2}[$ og differentiabel med positiv differentialkvotient i $]0; \frac{\pi}{2}[$, er f voksende i $[0; \frac{\pi}{2}[$. Da $f(0) = 0$ (ses ved indsættelse), følger heraf at $f(x) > 0$ i hele intervallet $]0; \frac{\pi}{2}[$ som ønsket.

Opgave 3. *En retvinklet trekant har omkreds* 60*, og højden på hypotenusen har længde* 12*. Bestem sidernes længder.*

Løsning. Lad c være længden af hypotenusen og a og b længden af kateterne. Vi har da $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot c$ (trekantens areal på to måder), dvs. $ab = 12c$, $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagoras) og $a + b + c = 60$ (omkreds). Af de to første ligninger fås $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 24c$. Af den sidste fås $(a+b)^2 = (60-c)^2$. Altså er $c^2 + 24c = (60-c)^2$. Denne ligning løses: $c^2 + 24c = 3600 + c^2 - 120c$ giver $144c = 3600$ og dermed $c = \frac{60^2}{12^2} = 5^2 = 25$. Vi har nu $ab = 300$ og $a + b = 35$. Heraf følger at tallene a og b er 15 og 20 (se røddernes sum og produkt – eller løs ligningssystemet ved at indsætte $b = 35 - a$ i den første ligning, finde løsningerne $a = 15$ og $a = 20$ ved at løse den fremkomne andengradsligning og til slut se at de tilsvarende værdier for b er henholdsvis $b = 20$ og $b = 15$). Sidelængderne er altså 15, 20 og 25.

Opgave 4. *Lad a, b, c og d være vilkårlige reelle tal. Bevis at hvis $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$, så er $a = b = c = d$.*

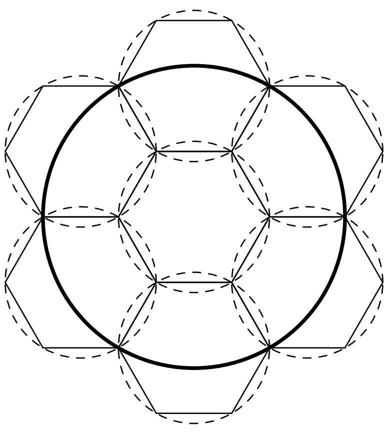
Løsning. Ved multiplikation med 2 fås $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 = 2ab + 2bc + 2cd + 2da$, som videre omskrives til $a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + d^2 - 2cd + d^2 + a^2 - 2ad = 0$, dvs.

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 = 0.$$

Venstre side af ligningen består af fire led som hver især er positive eller 0. Da summen er 0, må alle leddene være lig med 0, dvs. $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = a$ som ønsket.

Opgave 5. *Vis at uanset hvordan* 15 *punkter afsættes inden for en cirkel med radius* 2 *(cirkelranden medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius* 1 *(cirkelranden medregnet) som indeholder mindst tre af de* 15 *punkter.*

Løsning. Den store cirkel kan overdækkes af syv cirkler med radius 1 som vist på figuren. Ifølge skuffeprincippet vil mindst en af disse da indeholde mindst tre punkter (hvis nemlig hver kun indeholdt højst to punkter, kunne der højst være $7 \cdot 2 = 14$ punkter i alt). ▷skuffe-princippet



Begreber og definitioner

På de følgende sider gives en oversigt over de matematiske forudsætninger som har været benyttet i opgaver og løsninger i årenes løb. Oversigten er opdelt i hovedkategorierne algebra, geometri, kombinatorik og talteori. Inden for hvert emne er begreber, definitioner og sætninger opregnet i en nogenlunde naturlig rækkefølge.

Listen er ment som en hjælp til elever der måtte gå i stå i læsningen af en løsning. I tidens løb har gymnasiets pensum nemlig ændret sig, og derfor kan der rundt omkring i løsningerne være brugt begreber og sætninger som ikke længere hører til kernepensum. I disse tilfælde har vi i løsningerne anført en henvisning til dette afsnit. Ordlisterne gør det dog ikke ud for en matematikbog. Der er således hverken eksempler eller beviser, og elever der er interesserede i at sætte sig mere ind i emnerne, vil have brug for en lærebog eller hjælp fra en lærer.

Listen er bagudrettet og udgør således ikke en udtømmende liste over hvad der kan tænkes at indgå som forudsætninger i fremtidige Georg Mohr-opgaver.

Algebra og funktioner

Nyttige omskrivninger For alle reelle tal a og b gælder:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Nulreglen Hvis et produkt er lig med 0, så er mindst en af faktorerne lig med 0.

Polynomium Et polynomium p af grad n er en funktion med en forskrift af typen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, hvor $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ er reelle tal og $a_n \neq 0$. Tallene $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ kaldes polynomiets koefficienter. Et tal r kaldes rod i polynomiet p hvis $p(r) = 0$. Hvis r er rod i p, kan p faktoriseres $p(x) = (x-r)q(x)$, hvor q er et polynomium af grad $n-1$.

Andengradspolynomium Et andengradspolynomium er en funktion med en forskrift af typen $p(x) = ax^2 + bx + c$, hvor a, b og c er reelle tal og $a \neq 0$. Tallet $d = b^2 - 4ac$ kaldes andengradspolynomiets diskriminant. Hvis d

er negativ, har polynomiet ingen reelle rødder, hvis $d = 0$, har polynomiet én reel rod, og hvis d er positiv, har polynomiet to reelle rødder $\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$ og $\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$. Hvis polynomiet har to reelle rødder r_1 og r_2, kan det faktoriseres $p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Røddernes sum og produkt Hvis et normeret andengradspolynomium $p(x) = x^2 + bx + c$ (dvs. et andengradspolynomium med andengradskoefficient 1) har rødderne r_1 og r_2, er røddernes sum $r_1 + r_2$ lig med $-b$ og røddernes produkt $r_1 r_2$ lig med c. Hvis omvendt r_1 og r_2 er tal der opfylder $r_1 + r_2 = -b$ og $r_1 r_2 = c$, så er r_1 og r_2 rødder i polynomiet.

Parabel Grafen for et andengradspolynomium $p(x) = ax^2 + bx + c$ er en parabel. Parablens grene vender opad hvis a er positiv, og nedad hvis a er negativ. Koordinatsættet til parablens toppunkt er $(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a})$, hvor d er diskriminanten.

Monotoni En funktion f siges at være voksende i et interval I hvis der for alle tal x_1 og x_2 i intervallet I gælder at hvis $x_1 < x_2$, så er $f(x_1) < f(x_2)$. En funktion f siges at være aftagende i et interval I hvis der for alle tal x_1 og x_2 i intervallet I gælder at hvis $x_1 < x_2$, så er $f(x_1) > f(x_2)$. En funktion siges at være monoton i et interval I hvis den er enten voksende eller aftagende i I.

Numerisk værdi Den numeriske værdi (eller absolutte værdi) $|x|$ af et reelt tal x er $|x| = x$ hvis $x \geq 0$, og $|x| = -x$ hvis $x < 0$. For alle reelle tal x og y gælder $|xy| = |x||y|$.

Kontinuitet og differentiabilitet Emnet er for omfattende til denne korte oversigt. Kendskab hertil har kun været nødvendigt i enkelte meget tidlige opgaver.

Geometri

Højde En højde i en trekant er en linje der går fra en vinkelspids vinkelret ned på den modstående side. De tre højder skærer hinanden i samme punkt.

Vinkelhalveringslinje En vinkelhalveringslinje i en trekant er en linje der går fra en vinkelspids og deler vinklen i to lige store vinkler. De tre vinkelhalveringslinjer skærer hinanden i samme punkt. Dette punkt er centrum for trekantens indskrevne cirkel.

Midtnormal En midtnormal i en trekant er en linje der går gennem midtpunktet af en side og står vinkelret på denne side. De tre midtnormaler skærer hinanden i samme punkt. Dette punkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel.

Median En median i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til midtpunktet af den modstående side. De tre medianer skærer hinanden i samme punkt, og de deler hinanden i forholdet 2 : 1, regnet fra vinkelspidserne.

Midtpunktstransversal En midtpunktstranversal i en trekant er en linje der forbinder midtpunkterne på to af siderne. Den er parallel med den tredje side. Hvis omvendt en linje går gennem midtpunktet af en side og er parallel med en anden side, er den en midtpunktstransversal.

Ensvinklede trekanter To trekanter kaldes ensvinklede hvis de har de samme vinkler. For ensvinklede trekanter er forholdet mellem alle tre par af tilsvarende sider ens. Hvis omvendt forholdet mellem to par af sider for to trekanter er ens, og den mellemliggende vinkel mellem disse sider er den samme i de to trekanter, så er trekanterne ensvinklede. Forholdet mellem arealerne af to ensvinklede trekanter er kvadratet på sideforholdet.

Kongruente trekanter To trekanter kaldes kongruente hvis de er ensvinklede, og forholdet mellem tilsvarende sider er 1. Hvis to trekanter har to ens sider og den mellemliggende vinkel mellem disse to sider er den samme i de to trekanter, så er de kongruente.

Ligebenet trekant En ligebenet trekant er en trekant hvori to af siderne er lige lange. De to vinkler ved den tredje side er lige store.

Ligesidet trekant En ligesidet trekant er en trekant hvori alle tre sider er lige lange. Alle tre vinkler er $60°$.

Regulær polygon En regulær polygon er en polygon hvori alle sider har samme længde og alle vinkler er lige store.

Retvinklet trekant En retvinklet trekant er en trekant hvori en af vinklerne er ret. I en retvinklet trekant kaldes den side der ligger over for den rette vinkel, for hypotenusen, og de to andre sider kaldes kateter.

Pythagoras' sætning For retvinklede trekanter gælder Pythagoras' sætning: Summen af kvadraterne på kateterne er lig med kvadratet på hypotenusen. Hvis omvendt summen af kvadraterne på to af siderne i en trekant er lig med kvadratet på den tredje side, er trekanten retvinklet.

Trigonometri i retvinklede trekanter For en spids vinkel v i en retvinklet trekant gælder

$$\cos v = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} \qquad \sin v = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}} \qquad \tan v = \frac{\text{mod}}{\text{hos}}$$

hvor hos, mod og hyp betegner henholdsvis den hosliggende katete til v, den modstående katete til v og hypotenusen.

Specielle vinkler Om vinklerne 30°, 45° og 60° gælder

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45^\circ = 1$$
$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Cosinusrelationerne I en vilkårlig trekant ABC gælder cosinusrelationen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

og tilsvarende for de andre sider.

Sinusrelationen I en vilkårlig trekant ABC gælder sinusrelationen

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Overgangsformler For enhver vinkel v gælder overgangsformlerne

$$\sin(180^\circ - v) = \sin v \qquad \cos(180^\circ - v) = -\cos v$$
$$\sin(90^\circ - v) = \cos v \qquad \cos(90^\circ - v) = \sin v$$

Arealer Arealet af

- en trekant med højde h og grundlinje g er $\frac{1}{2}hg$
- en trekant ABC er $\frac{1}{2}ab\sin C$
- et parallelogram med højde h og grundlinje g er hg
- et trapez med to parallelle sider a og c og højden h på disse er $h \cdot \frac{a+c}{2}$
- en cirkel med radius r er πr^2

Afstandsformlen Afstanden mellem to punkter med koordinatsæt (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Cirklens ligning Ligningen for en cirkel med centrum (x_0, y_0) og radius r er

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Kombinatorik

Multiplikationsprincippet Ved et valg der består af k uafhængige delvalg med henholdsvis $n_1, n_2, \ldots, n_k$ valgmuligheder, er der i alt $n_1 n_2 \cdots n_k$ valgmuligheder.

Fakultet For et positivt helt tal n defineres symbolet $n!$ (læses: »n fakultet«) ved $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Endvidere defineres $0! = 1$.

Kombination Antallet af måder hvorpå man kan udtage r elementer ud af n elementer uden hensyntagen til rækkefølgen, betegnes $\binom{n}{r}$ (eller $K(n,r)$). Her er n og r positive hele tal eller 0, og $r \leq n$. Der gælder at $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Sandsynlighed I en situation hvor der foreligger et antal lige sandsynlige muligheder, hvoraf nogle betegnes som gunstige, kan sandsynligheden for at et gunstigt udfald indtræffer, beregnes som $\frac{\text{antal gunstige udfald}}{\text{antal mulige udfald}}$.

Skuffeprincippet Skuffeprincippet siger at hvis flere end n ting skal fordeles i n skuffer, så vil mindst en skuffe indeholde mindst to ting. Her er n et positivt helt tal.

Talteori

Naturlige tal og hele tal De naturlige tal er tallene $1, 2, 3, 4, \ldots$. De hele tal er tallene $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Lige og ulige tal De lige tal er tallene $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$. De ulige tal er tallene $\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$. To tal siges at have samme paritet hvis de enten begge er lige eller begge er ulige.

Kvadrattal Et kvadrattal er et tal der kan skrives som et helt tal i anden potens. De første kvadrattal er $0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$. At opløfte et tal i anden potens kaldes at kvadrere tallet. Anden potens af et tal kaldes tallets kvadrat. Et tal og dets kvadrat har samme paritet.

Delelighed Et helt tal n er deleligt med et helt tal d hvis der findes et helt tal q så $n = q \cdot d$. Man siger i så fald at d går op i n, at d er divisor i n, og at n er et multiplum af d. Hvis et helt tal d går op i to hele tal n og m, går d også op i summen $n + m$ og differensen $n - m$.

Division med rest Når n er et helt tal, og d er et positivt helt tal, kan n skrives på formen $n = q \cdot d + r$, hvor r og q er hele tal, og $r = 0, 1, 2, \ldots, d - 1$. Man siger at n har resten r ved division med d. Resten er 0 netop hvis d er divisor i n. I så fald siges divisionen at gå op.

Primtal Et primtal er et helt tal større end 1 hvis eneste positive divisorer er 1 og tallet selv. De første primtal er $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$. Hvis et primtal p går op i et produkt $a \cdot b$, da går p op i mindst en af faktorerne a og b. Produktet pq af to forskellige primtal p og q går op i et helt tal n netop hvis både p og q går op i n.

Primfaktor Et primtal p siges at være primfaktor i et positivt helt tal n hvis p går op i n.

Primfaktoropløsning Ethvert helt tal n større end 1 kan opløses i primfaktorer, dvs. skrives som et produkt af primtal. Opløsningen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, hvor $p_1, p_2, \ldots, p_r$ er forskellige primtal, er entydig (på nær faktorernes rækkefølge).

Tværsum Summen af cifrene i et positivt helt tal kaldes tallets tværsum.

Delelighedsregler Et positivt helt tal er deleligt med 3 netop hvis 3 går op i tallets tværsum. Et positivt helt tal er deleligt med 9 netop hvis 9 går op i tallets tværsum.

MATEMATIK
LÆRERFORENINGEN
2 0 1 1