Den 37e Nordiska matematiktävlingen

Torsdagen, den 30 mars 2023

Svensk version

Uppgift 1 Alice och Bianca har ett hundra kulor. Vid spelets början delar de upp dessa kulor i två högar. Därefter består ett drag i att man väljer en hög, sedan väljer ett positivt heltal som inte är större än halva antalet kulor i den högen, och slutligen tar bort det valda antalet kulor från den valda högen. Den första som inte kan ta bort några kulor förlorar. Alice gör det första draget. Bestäm alla sätt att dela upp de hundra kulorna i två högar, för vilka sätt Bianca har en vinnande strategi.

Uppgift 2 Låt $\mathbb{N}_+$ beteckna mängden av alla positiva heltal. Finn alla funktioner $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ sådana att

$$\operatorname{sgd}(f(x), y) f(xy) = f(x) f(y)$$

för alla $x, y \in \mathbb{N}_+$.

Uppgift 3 Finn alla följder av heltal $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sådana att för alla heltal $k, \ell \geq 0$, gäller

$$a_k - a_\ell | k^2 - \ell^2,$$

det vill säga, för varje par av heltal $k, \ell \geq 0$, finns ett heltal z sådant att $(a_k - a_\ell)z = k^2 - \ell^2$.

Uppgift 4 Låt ABC vara en triangel, och låt M vara mittpunkten på sidan BC. Låt E och F vara punkter på sidorna AC respektive AB sådana att $ME = MF$. Låt D vara den andra skärningspunkten för den omskrivna cirkeln till triangel MEF och sidan BC. Betrakta linjerna ℓ_D, ℓ_E och ℓ_F som går genom respektive punkter D, E och F, och är sådana att $\ell_D \perp BC$, $\ell_E \perp CA$ och $\ell_F \perp AB$. Visa att ℓ_D, ℓ_E och ℓ_F skär varandra i en punkt.

Skrivtid 4 timmar.
Varje problem är värt 7 poäng.
Endast skriv- och ritdon är tillåtna.