36. Norræna stærðfræðikeppnin

Mánudagurinn, 4. apríl 2022

Icelandic version

Tímamörk: 4 klukkustundir. Hvert dæmi er 7 stiga virði.
Leyfileg hjálpargögn eru skriffæri og teikniáhöld.

Dæmi 1

Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að jöfnurnar

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x) \qquad \text{og} \qquad f(f(x)) = 1 - f(x),$$

gildi fyrir allar rauntölur x.

Dæmi 2

Bæirnir í Undralandi eru tengdir með hraðbrautum og ef tveir bæir eru tengdir með hraðbraut, þá er til leið á milli bæjanna sem sneiðir hjá hraðbrautinni milli þeirra. (Það liggur í mesta lagi ein hraðbraut á milli tveggja bæja). Hjartadrotningin skipar spöðunum að útbúa lista yfir öll "slétt" hlutkerfi í vegakerfinu, það er þau kerfi sem samanstanda af hlutmengi af hraðbrautunum þannig að sérhver bær sé tengdur sléttum fjölda hraðbrauta (hugsanlega engum) úr menginu. Fyrir sérhvert slíkt hlutkerfi eiga spaðarnir að gera lista yfir hraðbrautir kerfisins. Ef það eru í heild n hraðbrautir í Undralandi og x hlutkerfi á lista spaðanna, hver er þá samanlagður fjöldi hraðbrauta á listum spaðanna, sé hver hraðbraut talin jafn oft og hún kemur fyrir á listunum?

Dæmi 3

Anton og Bríet spila leik með menginu $M = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ þar sem $n \geq 5$ er oddatala. Í hverri umferð fjarlægir Anton tölu úr M og setur hana í mengið sitt A og Bríet fjarlægir tölu úr M og setur hana í mengið sitt B (mengin A og B eru tóm í upphafi leiks). Þegar M er orðið tómt þá tekur Anton tvær ólíkar tölur x_1, x_2 úr A og sýnir Bríeti. Bríet tekur svo tvær ólíkar tölur y_1, y_2 úr B. Bríet vinnur ef

$$(x_1 x_2 (x_1 - y_1)(x_2 - y_2))^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \mod n,$$

en annars vinnur Anton. Finnið öll n þannig að Bríet hafi örugga vinningsleið.

Dæmi 4

Látum ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með umhring k sem hefur miðju O. Lína sem liggur um O sker hliðarnar AB og AC í D og E, í þessari röð. Látum B' og C' vera speglanir B og C um O, í þessari röð. Sannið að umhringir ODC' og OEB' skerist í punkti sem liggur á k.