Den 35e Nordiska matematiktävlingen

Fredagen, den 16 april 2021

Uppgift 1. Ett ändligt antal heltal större än 1 står uppskrivna på en tavla. Varje minut skriver Nordi ett nytt tal på tavlan, nämligen det minsta heltalet som är större än alla hittills uppskrivna tal och som inte är delbart med något av talen på tavlan. Visa att Nordi från ett visst ställe och framåt endast skriver primtal på tavlan.

Uppgift 2. Finn alla funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att för varje $x \in \mathbb{R}$, gäller

$$f(x(1+|x|)) \leq x \leq f(x)(1+|f(x)|).$$

Uppgift 3. Låt n vara ett positivt heltal. Alice och Bob spelar följande spel. Först väljer Alice $n+1$ delmängder $A_1, \ldots, A_{n+1}$ av $\{1, \ldots, 2^n\}$, var och en av dem med 2^{n-1} element. Sedan väljer Bob $n+1$ godtyckliga heltal $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Slutligen väljer Alice ett heltal t. Bob vinner om det finns ett heltal $1 \leq i \leq n+1$ och $s \in A_i$ sådana att $s + a_i \equiv t \pmod{2^n}$. Annars vinner Alice.
Finn alla n för vilka Alice har en vinnande strategi.

Uppgift 4. Låt A, B, C och D vara punkter på cirkeln ω sådana att $ABCD$ är en konvex fyrhörning. Antag att AB och CD skär varandra i punkten E som är sådan att A ligger mellan B och E, och att BD och AC skär varandra i punkten F. Låt $X \neq D$ vara den punkt på ω för vilken DX och EF är parallella. Låt Y vara spegelbilden av D i EF och antag att Y ligger inuti cirkeln ω.
Visa att A, X och Y ligger på en rät linje.

Skrivtid 4 timmar.
Varje problem är värt 7 poäng.
Endast skriv- och ritdon är tillåtna.