Den 35. nordiske matematikkonkurransen

Fredag 16. april 2021

Tillatt tid: 4 timer. Hver oppgave er verdt 7 poeng.
Bare skrive- og tegneredskaper er tillatt.

Oppgave 1. På en tavle er det skrevet et endelig antall positive heltall større enn én. Hvert minutt skriver Nordi i tillegg på tavlen det minste positive heltallet som er større enn alle andre heltall på tavlen, og som ikke er delelig med noe annet tall på tavlen.

Vis at etter en viss tid skriver Nordi bare primtall på tavlen.

Oppgave 2. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er slik at for alle $x \in \mathbb{R}$ er

$$f\big(x(1+|x|)\big) \le x \le f(x)\big(1+|f(x)|\big).$$

Oppgave 3. La n være et positivt heltall. Alice og Bob spiller et spill. Først velger Alice $n+1$ delmengder $A_1, \ldots, A_{n+1}$ av $\{1, \ldots, 2^n\}$, hver av dem av størrelse 2^{n-1}. Deretter velger Bob $n+1$ vilkårlige heltall $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Til slutt velger Alice et heltall t. Bob vinner dersom det finnes et heltall $1 \le i \le n+1$ og $s \in A_i$ slik at $s + a_i \equiv t \pmod{2^n}$. I motsatt fall vinner Alice.

Finn alle verdier av n slik at Alice har en vinnende strategi.

Oppgave 4. La A, B, C og D være punkter på sirkelen ω slik at $ABCD$ er en konveks firkant. Anta at AB og CD skjærer hverandre i et punkt E slik at A ligger mellom B og E, og at BD og AC skjærer hverandre i et punkt F. La $X \neq D$ være det punktet på ω som er slik at DX og EF er parallelle. La Y være speilbildet av D om EF, og anta Y ligger innenfor sirkelen ω.

Vis at A, X og Y ligger på linje.