# 35. Nordiske Matematikkonkurrence

## Fredag d. 16. April 2021

*Tid: 4 timer. Hver opgave kan give op til 7 point.*
*Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.*

**Opgave 1.** På en tavle står der et endeligt antal hele tal større end et. Hvert minut skriver Nordi det mindste positive hele tal som er større end alle andre tal på tavlen og som ikke er deleligt med nogen af tallene på tavlen. Vis at fra et vist trin skriver Nordi kun primtal på tavlen.

**Opgave 2.** Find alle funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der for hvert $x \in \mathbb{R}$ opfylder

$$f(x(1+|x|)) \le x \le f(x)(1+|f(x)|).$$

**Opgave 3.** Lad $n$ være et positivt helt tal. Alice og Bob spiller det følgende spil. Først tager Alice $n+1$ delmængder $A_1, \ldots, A_{n+1}$ af $\{1, \ldots, 2^n\}$ sådan at der er $2^{n-1}$ elementer i hver delmængde. Dernæst vælger Bob frit $n+1$ hele tal $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Endelig vælger Alice et helt tal $t$. Bob vinder hvis der er et helt tal $1 \le i \le n+1$ og et $s \in A_i$ sådan at $s + a_i \equiv t \pmod{2^n}$. Ellers vinder Alice. Find alle værdier af $n$ hvor Alice har en vindende strategi.

**Opgave 4.** Lad $A, B, C$ og $D$ være punkter på cirklen $\omega$ sådan at $ABCD$ er konveks. Antag at $AB$ og $CD$ skærer i et punkt $E$ sådan at $A$ er mellem $B$ og $E$ samt at $BD$ og $AC$ skærer i et punkt $F$. Lad $X \ne D$ være det punkt på $\omega$ sådan at $DX$ og $EF$ er parallelle. Lad $Y$ være spejlingen af $D$ i $EF$ og antag at $Y$ ligger indenfor cirklen $\omega$.
Vis at $A$, $X$, og $Y$ ligger på den samme linje.