Version: suomi

34. pohjoismainen matematiikkakilpailu

30. maaliskuuta 2020

1. Kun n on positiivinen kokonaisluku, merkitään symbolilla $g(n)$ joukosta $\{1, 2, \ldots, n\}$ valittavien aidosti kasvavien kolmikoiden lukumäärää. Etsi pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle pätee seuraava: Luvun $g(n)$ voi kirjoittaa kolmen eri alkuluvun tulona, ja nämä alkuluvut ovat jäseniä (mutteivat välttämättä peräkkäisiä) aritmeettisessa jonossa, jossa peräkkäisten jäsenten erotus on 336.

2. Georgilla on $2n+1$ korttia, joista jokaiseen on kirjoitettuna yksi luku. Yhdessä korteista on kokonaisluku 0, ja muissa korteissa esiintyvät luvut $k = 1, \ldots, n$, kukin kahdesti. Georg haluaa asettaa kortit riviin niin, että nollakortti on keskellä, ja jokaista $k = 1, \ldots, n$ kohti korttien, joissa on luku k, etäisyys on k (toisin sanoen niiden välissä on täsmälleen $k-1$ korttia).

Millä luvuilla $1 \leq n \leq 10$ tämä on mahdollista?

3. Kuperan nelikulmion $ABCD$ sivut AB ja CD jaetaan kolmeen osaan: $|AE| = |EF| = |FB|$ ja $|DP| = |PQ| = |QC|$. Nelikulmion $AEPD$ lävistäjät leikkaavat pisteessä M ja nelikulmion $FBCQ$ lävistäjät pisteessä N. Todista, että $\triangle AMD$:n ja $\triangle BNC$:n pinta-alojen summa on sama kuin $\triangle EPM$:n and $\triangle FNQ$:n pinta-alojen summa.

4. Etsi kaikki kuvaukset $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$f(x)f\left(f\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right) = f\left(\frac{x+y}{xy+1}\right),$$

kun $x, y \in \mathbb{R}$ toteuttavat ehdon $(x+1)(y+1)(xy+1) \neq 0$.

Kilpailu kestää 4 tuntia.
Kukin tehtävä on 7 pisteen tehtävä.
Vain kirjoitus- ja piirustusvälineet ovat sallittuja.