Version: Danish

34. Nordiske Matematikkonkurrence

Mandag den 30. marts 2020

1. For et positivt heltal n, lad $g(n)$ være antallet af strengt voksende tripler af tal fra mængden $\{1, 2, \ldots, n\}$. Find det mindste positive heltal n med følgende egenskab: Tallet $g(n)$ kan skrives som et produkt af tre forskellige primtal som er elementer i en aritmetisk progression med differens 336 (de tre primtal er ikke nødvendigvis på hinanden følgende elementer i den aritmetiske progression).

2. Georg har $2n + 1$ kort med ét tal skrevet på hvert kort. På ét af kortene står tallet 0, og på resten af kortene optræder tallene $k = 1, \ldots, n$, hver to gange. Georg vil lægge kortene på en række så 0-kortet ligger i midten, og så for hvert $k = 1, \ldots, n$, har de to kort med tallet k en afstand på k (det vil sige at der er præcis $k - 1$ kort imellem dem).

For hvilke $1 \leq n \leq 10$ er dette muligt?

3. Hver af siderne AB og CD af en konveks firkant $ABCD$ inddeles i tre lige store dele, $|AE| = |EF| = |FB|$, $|DP| = |PQ| = |QC|$. Diagonalerne af $AEPD$ og $FBCQ$ skærer i henholdsvis M og N. Vis at summen af arealerne af $\triangle AMD$ og $\triangle BNC$ er lig summen af arealerne af $\triangle EPM$ og $\triangle FNQ$.

4. Find alle funktioner $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ så

$$f(x)f\left(f\left(\frac{1-y}{1+y}\right)\right) = f\left(\frac{x+y}{xy+1}\right)$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$ der opfylder $(x+1)(y+1)(xy+1) \neq 0$.

Tid: 4 timer.
Hver opgave kan give 5 point.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.