Den 32. nordiske matematikkonkurransen

Måndag 9. april 2018

Norsk versjon (nynorsk)

Oppgåvene skal løysast på 4 timar. Du får opptil 7 poeng på kvar oppgåve.
Skrive- og teiknereiskapar er einaste tillatne hjelpemiddel.

Oppgåve 1 Lat k vere eit positivt heiltal og P eit punkt i planet. Vi ynskjer å trekke linjer, ingen av dei gjennom P, på eit slikt vis at kvar stråle frå P skjer minst k av desse linjene. Bestem det minste antal linjer som vi må trekke for å oppnå målet.

Oppgåve 2 Ei følge av primtal p_1, p_2, $\ldots$ er bestemt ved to startprimtal p_1 og p_2, og ved at p_{n+2} er den største primtalsfaktoren i $p_n + p_{n+1} + 2018$ for kvar $n \geq 1$. Vis at følga alltid inneheld kun endeleg mange forskjellige primtal, uansett startverdiane p_1 og p_2.

Oppgåve 3 Lat ABC vere ein trekant med $AB < AC$. Lat D og E vere punkt på linjene CA respektive BA slik at $CD = AB$, $BE = AC$, og A, D og E ligg på same side av linja BC. Lat I vere innsenteret til trekanten ABC, og H vere ortosenteret til trekanten BCI. Vis at D, E og H ligg på éi linje.

Oppgåve 4 Lat $f = f(x, y, z)$ vere eit polynom i dei tre variablane x, y, z slik at

$$f(w, w, w) = 0$$

for alle $w \in \mathbb{R}$. Vis at det finst tre polynom A, B, C i desse same tre variablane slik at $A + B + C = 0$ og

$$f(x, y, z) = A(x, y, z) \cdot (x - y) + B(x, y, z) \cdot (y - z) + C(x, y, z) \cdot (z - x).$$

Finst det eit polynom f slik at desse A, B, C er eintydig bestemt?