Den 32. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 9. april 2018

Norsk versjon (bokmål)

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 7 poeng på hver oppgave.
Skrive- og tegneredskaper er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1 La k være et positivt heltall og P et punkt i planet. Vi ønsker å trekke linjer, ingen av dem gjennom P, på en slik måte at enhver stråle fra P skjærer minst k av disse linjene. Bestem det minste antall linjer som må trekkes for å oppnå målet.

Oppgave 2 En følge bestående av primtall p_1, p_2, $\ldots$ er bestemt ved to startprimtall p_1 og p_2, samt ved at p_{n+2} er den største primtallsfaktoren i $p_n + p_{n+1} + 2018$ for enhver $n \geq 1$. Vis at følgen alltid inneholder kun et endelig antall forskjellige primtall, uansett startverdiene p_1 og p_2.

Oppgave 3 La ABC være en trekant med $AB < AC$. La D og E være punkter på linjene CA henholdsvis BA slik at $CD = AB$, $BE = AC$, og A, D samt E ligger på samme side av linjen BC. La I være innsenteret til trekanten ABC, og H være ortosenteret til trekanten BCI. Vis at D, E og H ligger på én linje.

Oppgave 4 La $f = f(x, y, z)$ være et polynom i de tre variablene x, y, z slik at

$$f(w, w, w) = 0$$

for alle $w \in \mathbb{R}$. Vis at det finnes tre polynomer A, B, C i disse samme tre variablene slik at $A + B + C = 0$ og

$$f(x, y, z) = A(x, y, z) \cdot (x - y) + B(x, y, z) \cdot (y - z) + C(x, y, z) \cdot (z - x).$$

Finnes det et polynom f slik at disse A, B, C er entydig bestemt?