Den 29:e Nordiska matematiktävlingen

Tisdag, 24 mars 2015

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 7 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1

Låt ABC vara en triangel och låt Γ vara cirkeln med diameter AB. Bisektriserna till $\angle BAC$ och $\angle ABC$ skär Γ (andra gången) i punkterna D och E, respektive. Den inskrivna cirkeln till triangeln ABC tangerar BC och AC i F och G, respektive. Visa att punkterna D, E, F och G ligger i linje (= är kollineära).

Problem 2

Bestäm primtalen p, q, r, givet att ett av talen pqr och $p + q + r$ är lika med 101 gånger det andra.

Problem 3

Låt $n > 1$, och låt $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ vara ett polynom med n reella nollställen (räknade med multiplicitet). Polynomet q definieras som

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2015} p(x + j).$$

Givet att $p(2015) = 2015$, visa att q har minst 1970 olika nollställen $r_1, \ldots, r_{1970}$, sådana att $|r_j| < 2015$ för alla $j = 1, \ldots, 1970$.

Problem 4

Ett uppslagsverk består av 2000 numrerade band. Banden ligger i en hög i nummerordning med nummer 1 överst och nummer 2000 nederst. Man kan utföra två operationer med högen:

(i) För n jämnt kan man ta de översta n banden och lägga dem längst ner i högen utan att ändra deras inbördes ordning.

(ii) För n udda kan man ta de översta n banden, ordna dem i omvänd ordning och lägga dem högst upp i högen igen.

Hur många olika permutationer av banden kan man uppnå genom att använda dessa två operationer upprepade gånger?