Den 26:e Nordiska matematiktävlingen

Tisdagen den 27 mars 2012

Svensk version

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1. De reella talen a, b, c är sådana att $a^2 + b^2 = 2c^2$, och dessutom sådana att $a \neq b, c \neq -a, c \neq -b$. Visa att

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}$$

är ett heltal.

Problem 2. Givet är triangeln ABC. Punkten P ligger på triangelns omskrivna cirkel och är mittpunkt på den av bågarna BC som inte innehåller A. Genom P dras en rät linje l, parallell med AB. Cirkeln k går genom B, och tangerar l i punkten P. Låt Q vara den andra skärningspunkten för k och linjen AB (om det inte finns en andra skärningspunkt, välj $Q = B$). Visa att $AQ = AC$.

Problem 3. Bestäm det minsta positiva heltalet n, för vilket det finns n heltal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (inte nödvändigtvis olika), sådana att $1 \leq x_k \leq n,\ 1 \leq k \leq n$, och

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{samt} \quad x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

men $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Problem 4. Talet 1 skrivs på tavlan. Därefter skapas en talföljd på följande sätt: vid varje steg ersätts varje tal a på tavlan av talen $a-1$ och $a+1$; om talet 0 dyker upp, suddas det ut omedelbart; om ett tal förekommer flera gånger, lämnas alla exemplar kvar på tavlan. Det betyder att det efter 0 steg står 1; efter 1 steg står det 2; efter 2 steg står det $1, 3$; efter 3 steg står det det $2, 2, 4$, o.s.v. Hur många tal kommer det att stå på tavlan efter n steg?