Den 26. nordiske matematikkonkurransen

Tysdag 27. mars 2012

Norsk versjon (nynorsk)

Oppgåvene skal løysast på 4 timar. Du får opptil 5 poeng på kvar oppgåve.
Skrive- og teiknesaker er einaste tillatne hjelpemiddel.

Oppgåve 1. Dei reelle tala a, b, c er slik at $a^2 + b^2 = 2c^2$, og dessutan slik at $a \neq b$, $c \neq -a$, $c \neq -b$. Vis at

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}$$

er eit heiltal.

Oppgåve 2. Ein trekant ABC er gitt. Punktet P ligg på trekanten sin omskrivne sirkel, og er midtpunkt på den av sirkelbogene BC som ikkje inneheld A. Trekk ei rett linje l parallelt med AB gjennom P. Sirkelen k går gjennom B, og tangerer l i punktet P. La Q vere det andre skjeringspunktet mellom k og linja AB (vel $Q = B$ om det ikkje finst eit anna skjeringspunkt). Vis at $AQ = AC$.

Oppgåve 3. Finn det minste positive heiltalet n som er slik at det finst n heiltal x_1, x_2, …, x_n (ikkje nødvendigvis forskjellige) slik at $1 \leq x_k \leq n$ for $1 \leq k \leq n$, og

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{og} \quad x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

men $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Oppgåve 4. Talet 1 vert skrive opp på tavla. Deretter blir ei talfølgje danna slik: ved kvart trinn blir kvart tal a på tavla erstatta med $a-1$ og $a+1$; dersom talet 0 dukkar opp, blir det viska ut med ein gong; om eit tal finst fleire gonger, blir alle eksemplara på tavla ståande. Det betyr at etter 0 trinn står det 1; etter eitt trinn står det 2; etter to trinn står det 1, 3; etter tre trinn står det 2, 2, 4, og så vidare. Kor mange tal står på tavla etter n trinn?