26. Nordiske Matematikkonkurrence

Tirsdag den 27. marts 2012

Dansk version

Tid: 4 timer. Hver opgave kan give 5 point. Tilladte hjælpemidler: Skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1

De reelle tal a, b, c er sådan at $a^2+b^2 = 2c^2$, og desuden sådan at $a \neq b, c \neq -a, c \neq -b$. Vis at

$$\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(a+c)(b+c)}$$

er et helt tal.

Opgave 2

Givet en trekant ABC. Punktet P ligger på trekantens omskrevne cirkel og er midtpunktet på den af buerne BC som ikke indeholder A. Gennem P tegnes en ret linje l parallel med AB. Cirklen k går gennem B og tangerer l i P. Lad Q være det andet skæringspunkt mellem k og linjen AB (hvis der ikke findes et andet skæringspunkt, så vælg $Q = B$). Vis at $|AQ| = |AC|$.

Opgave 3

Bestem det mindste positive hele tal n, for hvilket der findes n hele tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ (ikke nødvendigvis forskellige), sådan at $1 \leq x_k \leq n, k = 1, 2, \dots, n$, og

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \text{og} \qquad x_1 x_2 \cdots x_n = n!,$$

men $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq \{1, 2, \dots, n\}$.

Opgave 4

Tallet 1 er skrevet på tavlen. Herefter skabes en talfølge på følgende måde: ved hvert skridt erstattes alle tal a på tavlen med $a-1$ og $a+1$; hvis tallet 0 fremkommer så slettes det straks, og hvis et tal forekommer flere gange så forbliver alle forekomster af det på tavlen. Det betyder at efter 0 skridt står der 1; efter 1 skridt står der 2; efter 2 skridt står der 1,3; efter 3 skridt står der 2,2,4; osv. Hvor mange tal står der på tavlen efter n skridt?