Den 25. nordiske matematikkonkurransen

Mandag 4. april 2011

Norsk versjon

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 5 poeng på hver oppgave. Skrive- og tegnesaker er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1

La $a_0, a_1, \ldots, a_{1000}$ betegne siffer. Kan summen av de 1001-sifrede tallene $a_0a_1 \ldots a_{1000}$ og $a_{1000}a_{999} \ldots a_0$ ha bare odde sifre?

Oppgave 2

Gitt en trekant ABC. Anta at $AB = AC$, og la D og E være punkter henholdsvis på forlengelsen av linjestykket BA forbi A og på linjestykket BC, slik at linjene CD og AE er parallelle. Vis at $CD \geq \frac{4h}{BC} CE$, der h er høyden fra A i trekanten ABC. Når gjelder likhet?

Oppgave 3

Finn alle funksjoner f som er slik at

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

for alle reelle tall x og y.

Oppgave 4

La $n \geq 2$ være et heltall. Vis at summen av alle brøker $\frac{1}{ab}$, der a og b er relativt primiske positive heltall slik at $a < b \leq n$ og $a + b > n$, er lik $\frac{1}{2}$.
(To heltall a og b er *relativt primiske* hvis største felles divisor for a og b er 1.)