Den 23. nordiske matematikkonkurransen

Torsdag 2. april 2009

Norsk versjon

Oppgavene skal løses på 4 timer. Du får opptil 5 poeng på hver oppgave. Skrive- og tegnesaker er eneste tillatte hjelpemidler.

Oppgave 1

Et punkt P blir valgt i en vilkårlig trekant. Tre linjer trekkes gjennom P parallelt med sidene i trekanten. Linjene deler trekanten inn i tre mindre trekanter og tre parallellogrammer. La f være forholdet mellom det samlete arealet av de tre mindre trekantene og arealet av den gitte trekanten. Vis at $f \geq \frac{1}{3}$, og bestem hvilke punkter P som gir $f = \frac{1}{3}$.

Oppgave 2

På et falmet papirstykke er det med noe anstrengelse mulig å se følgende:

$$(x^2 + x + a)(x^{15} - \cdots) \;=\; x^{17} + x^{13} + x^5 - 90x^4 + x - 90.$$

Noe har forsvunnet – konstantleddet i første faktor på venstre side, og mesteparten av den andre faktoren. Det ville være mulig å rekonstruere polynomet som utgjør den andre faktoren, men vi nøyer oss med å stille dette spørsmålet: Hva er verdien av konstantleddet a i første faktor? Vi antar at alle polynomene nevnt ovenfor bare har heltallige koeffisienter.

Oppgave 3

Heltallene 1, 2, 3, 4 og 5 er skrevet på ei tavle. Det er lov å stryke ut to heltall a og b og erstatte dem med $a + b$ og ab. Er det ved å gjenta denne prosedyren mulig å få tre av de fem heltallene på tavla til å bli 2009?

Oppgave 4

Det er 32 konkurrenter i en turnering. Alle har forskjellig spillestyrke, og i hver kamp, som er mellom to konkurrenter, vinner alltid den beste. Vis at beste, nest beste og tredje beste spiller kan kåres etter 39 kamper.