Den 22:a Nordiska Matematiktävlingen

Måndagen den 31 mars 2008
Svensk version

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1

Bestäm alla reella tal A, B och C, sådana att det existerar en reell funktion f som uppfyller

$$f(x + f(y)) = Ax + By + C$$

for alla reella tal x och y.

Problem 2

Antag att $n \geq 3$ personer med olika namn sitter kring ett runt bord. Låt oss säga att varje oordnat par av personer, exempelvis M och N, är *dominant* om
(i) M och N inte sitter bredvid varandra, och
(ii) alla personer längs en (eller längs båda) av bågarna som förenar M och N runt bordskanten, har namn som kommer efter namnen på M och N när de anges i alfabetisk ordning.
Bestäm det minsta möjliga antalet dominanta par.

Problem 3

Låt ABC vara en triangel och låt D och E vara punkter på respektive BC och CA, sådana att AD och BE är bisektriser till vinklar i ABC. Låt F och G vara punkter på den omskrivna cirkeln till ABC, sådana att AF är parallell med DE och FG är parallell med BC. Visa att

$$\frac{AG}{BG} = \frac{AB + AC}{AB + BC}.$$

Problem 4

Differensen mellan kuberna på två på varandra följande positiva heltal är en kvadrat n^2, där n är ett positivt heltal. Visa att n är summan av två kvadrattal.