# 22. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 31. 3. 2008

**1.** Määritä kaikki sellaiset reaaliluvut $A$, $B$ ja $C$, joille on olemassa jokin reaalilukuarvoinen funktio $f$, joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla $x$ ja $y$ yhtälön

$$f(x + f(y)) = Ax + By + C.$$

**2.** Pyöreän pöydän ympärillä istuu $n \geq 3$ erinimistä ihmistä. Sanomme, että mitkä tahansa kaksi näistä, $M$ ja $N$, muodostavat *dominoivan parin*, jos

(1) $M$ ja $N$ eivät istu vierekkäin, ja

(2) ainakin toisella $M$:n ja $N$:n välisellä pöydänympäryksen osalla istuu vain ihmisiä, joiden nimet ovat aakkosjärjestyksessä $M$:n ja $N$:n nimien jäljessä.

Määritä dominoivien parien pienin mahdollinen lukumäärä.

**3.** Olkoon $ABC$ kolmio ja olkoon $D$ sivun $BC$ ja $E$ sivun $CA$ piste niin, että $AD$ ja $BE$ ovat kolmion $ABC$ kulmanpuolittajia. Olkoot $F$ ja $G$ sellaisia kolmion $ABC$ ympäri piirretyn ympyrän pisteitä, että $AF$ ja $DE$ ovat yhdensuuntaisia ja $FG$ ja $BC$ ovat yhdensuuntaisia. Osoita, että

$$\frac{AG}{BG} = \frac{AB + AC}{AB + BC}.$$

**4.** Kahden peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun kuution erotus on neliöluku $n^2$, missä $n$ on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että $n$ on kahden neliöluvun summa.