19. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 5. 4. 2005

1. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaisluvut k, joiden kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden tulo on

$$\frac{25}{8}k - 211.$$

2. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq a+b+c.$$

3. 2005 nuorta istuu suuren pyöreän pöydän ymparillä. Nuorista enintään 668 on poikia. Sanomme, että tytön G asema on vahva, jos tarkasteltaessa G:stä alkaen kuinka monen hyvänsä vierekkäin istuvan nuoren joukkoa kumpaan tahansa suuntaan, niin on näissä joukoissa on aina aidosti enemmän tyttöjä kuin poikia (G on itse mukana laskussa). Osoita, että olivat tytöt ja pojat missä järjestyksessä tahansa, joku tyttö on aina vahvassa asemassa.

4. Ympyrä $\mathcal{C}_1$ on ympyrän $\mathcal{C}_2$ sisäpuolella, ja ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä A. A:n kautta kulkeva suora leikkaa $\mathcal{C}_1$:n myös pisteessä B ja $\mathcal{C}_2$:n myös pisteessä C. Ympyrän $\mathcal{C}_1$ pisteeseen B piirretty tangentti leikkaa $\mathcal{C}_2$:n pisteissä D ja E. Pisteen C kautta kulkevat ympyrän $\mathcal{C}_1$ tangentit sivuavat $\mathcal{C}_1$:tä pisteissä F ja G. Osoita, että pisteet D, E, F ja G ovat samalla ympyrällä.