19. Nordiske Matematikkonkurrence

Tirsdag den 5. april 2005

Opgave 1

Bestem alle positive hele tal k så produktet af dets cifre i titalssystemet er

$$\frac{25}{8}k - 211.$$

Opgave 2

Lad a, b og c være positive reelle tal.

Vis at

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq a+b+c.$$

Opgave 3

Der sidder 2005 unge mennesker omkring et (stort!) rundt bord. Af disse er højst 668 drenge. Vi siger at en pige G er i en stærk position hvis uanset i hvilken retning og hvor langt man tæller fra G, er antallet af piger altid større end antallet af drenge. (G selv er inkluderet i tællingen).

Vis at lige meget hvordan de unge mennesker er anbragt ved bordet, er der altid en pige i en stærk position.

Opgave 4

Cirklen $\mathcal{C}_1$ ligger inden i cirklen $\mathcal{C}_2$, og cirklerne rører hinanden i A. En linje gennem A skærer desuden $\mathcal{C}_1$ i B og $\mathcal{C}_2$ i C. Tangenten til $\mathcal{C}_1$ i B skærer $\mathcal{C}_2$ i D og E. Tangenterne til $\mathcal{C}_1$ som går gennem C, rører $\mathcal{C}_1$ i F og G.

Vis at D, E, F og G ligger på en cirkel.

Tid: 4 timer.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.
Der gives 5 point for hver opgave.