18. Pohjoismainen matematiikkakilpailu, 1. 4. 2004

1. 27 palloa, jotka on numeroitu 1:stä 27:ään, on sijoitettu punaiseen, siniseen ja keltaiseen maljaan. Mitkä ovat punaisessa maljassa olevien pallojen mahdolliset lukumäärät, kun tiedetään, että punaisessa, sinisessä ja keltaisessa maljassa olevien pallojen numeroiden keskiarvot ovat 15, 3 ja 18, tässä järjestyksessä?

2. Olkoon $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, ja $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, kun $n = 1, 2, \ldots$, Fibonaccin lukujono. Osoita, että on olemassa aidosti kasvava päättymätön aritmeettinen kokonaislukujono, jonka yksikään luku ei kuulu Fibonaccin jonoon.

[Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.]

3. Olkoon $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}$, $n > 2$, kokonaislukujono. Oletetaan, että luvut x_{i1} eivät kaikki ole samoja. Jos luvut $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$ on määritelty, niin asetetaan

$$x_{i,k+1} = \frac{1}{2}(x_{ik} + x_{i+1,k}),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad x_{n,k+1} = \frac{1}{2}(x_{nk} + x_{1k}).$$

Osoita, että jos n on pariton, niin jollakin j, k, x_{jk} ei ole kokonaisluku. Päteekö tämä myös silloin, kun n on parillinen?

4. Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet ja olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Osoita, että

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}.$$