18. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag den 1. april 2004

Tid: 4 timer. Der gives 5 point for hver opgave.

Opgave 1

27 bolde nummereret fra 1 til 27 er fordelt i en rød, en blå og en gul skål. Hvad er de mulige værdier for antallet af bolde i den røde skål hvis gennemsnittet af tallene på kuglerne i den røde, blå og gule skål er henholdsvis 15, 3 og 18?

Opgave 2

Lad $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, og $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ for $n = 1, 2, \ldots$, være følgen af Fibonaccital. Vis at der eksisterer en (strengt) voksende differensrække af hele tal og med uendelig mange led som ikke har noget tal fælles med Fibonaccifølgen.

[En følge er en *differensrække* hvis differencen mellem to på hinanden følgende led er konstant.]

Opgave 3

Lad x_{11}, x_{21}, $\ldots$, x_{n1}, $n > 2$, være en følge af hele tal, og antag at tallene x_{i1} ikke alle er ens. Forudsat følgen x_{1k}, x_{2k}, $\ldots$, x_{nk} er defineret, sæt

$$x_{i,k+1} = \frac{1}{2}(x_{ik} + x_{i+1,k}),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad x_{n,k+1} = \frac{1}{2}(x_{nk} + x_{1k}).$$

Vis at hvis n er ulige, er x_{jk} for et vist sæt af j og k ikke et helt tal. Er dette også sandt hvis n er lige?

Opgave 4

Lad a, b og c være sider i en trekant og lad R være radius i trekantens omskrevne cirkel. Vis at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}.$$

Kun skrive- og tegneredskaber er tilladte.