Den 15:e Nordiska Matematiktävlingen

Torsdagen den 29 mars 2001

Problem 1. Låt A vara en ändlig uppsättning av kvadrater i ett rätvinkligt koordinatsystem, sådan att varje kvadrat har sina hörn i punkter med koordinater på formen (m, n), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ och $(m+1, n+1)$ för heltal m och n.
Visa att det existerar en deluppsättning B till A, bestående av åtminstone 25% av alla kvadrater i A, sådan att det inte går att finna två kvadrater i B med gemensamma hörn.

Problem 2. Låt f vara en begränsad reellvärd funktion som är definierad för alla reella tal och som är sådan att följande villkor är uppfyllt för varje rellt tal x:

$$f(x + \tfrac{1}{3}) + f(x + \tfrac{1}{2}) = f(x) + f(x + \tfrac{5}{6}).$$

Visa att f är periodisk. (En funktion f sägs vara periodisk, om det existerar ett positivt tal k sådant att $f(x + k) = f(x)$ för varje reellt tal x.)

Problem 3. Bestäm antalet reella rötter till ekvationen

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \tfrac{5}{2} = 0.$$

Problem 4. Låt $ABCDEF$ vara en konvex hexagon i vilken var och en av diagonalerna AD, BE and CF delar upp hexagonen i två fyrhörningar med lika stora areor.
Visa att AD, BE och CF passerar genom en och samma punkt.

Varje problem är värt 5 poäng. Skrivtid: 4 timmar
Miniräknare är inte tillåtna.