NORDISK MATEMATIKKONKURRANSE 2001

29. mars 2001

Oppgave 1. La A være en endelig mengde av kvadrater i koordinatplanet slik at hvert kvadrat i A har hjørner på formen (m, n), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ and $(m+1, n+1)$ der m og n er heltall. Vis at det finnes en delmengde B av A som består av minst 25% av kvadratene i A og slik at to forskjellige kvadrater i B aldri har noe felles hjørne.

Oppgave 2. La f være en begrenset funksjon som tar reelle verdier og som er definert for alle reelle tall. Anta at for hvert reelt tall x gjelder:

$$f(x + \tfrac{1}{3}) + f(x + \tfrac{1}{2}) = f(x) + f(x + \tfrac{5}{6})$$

Vis at f er periodisk. (f kalles begrenset hvis det finnes et tall L slik at $|f(x)| < L$ for alle reelle tall x. f kalles periodisk hvis det finnes et positivt tall k slik at $f(x+k) = f(x)$ for alle reelle tall x).

Oppgave 3. Bestem antall reelle løsninger av likningen

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \tfrac{5}{2} = 0$$

Oppgave 4. La $ABCDEF$ være en konveks sekskant der hver av diagonalene AD, BE og CF deler sekskanten i to firkanter med samme areal. Vis at AD, BE og CF skjærer hverandre i et felles punkt.

Tid: 4 timer.

Hver oppgave gir maksimalt 5 poeng

Kun skrive og tegneredskaper er tillatt