15. norræna stærðfræðikeppnin

29. mars 2001

Dæmi 1. Látum A vera endanlegt safn af ferningum í plani þannig að sérhver ferningur í A hefur hornpunkta af gerðinni (m, n), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ og $(m+1, n+1)$ fyrir einhverjar heilar tölur m og n. Sýnið að til er hlutsafn B í A sem samanstendur að minnsta kosti af 25% af öllum ferningunum í A og er þannig að engir tveir ferningar í B hafa sameiginlegan hornpunkt.

Dæmi 2. Látum f vera takmarkað raungilt fall skilgreint fyrir allar rauntölurnar, þannig að eftirfarandi skilyrði er uppfyllt fyrir allar rauntölur x:

$$f(x + \tfrac{1}{3}) + f(x + \tfrac{1}{2}) = f(x) + f(x + \tfrac{5}{6}).$$

Sýnið að f er lotubundið. (Fall f er kallað lotubundið ef til er jákvæð tala k, þannig að $f(x + k) = f(x)$ fyrir allar rauntölur x.)

Dæmi 3. Ákvarðið fjölda rauntöluróta á jöfnunni

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \tfrac{5}{2} = 0.$$

Dæmi 4. Látum $ABCDEF$ vera kúptan sexhyrning þannig að sérhver miðstrengjanna AD, BE og CF skiptir sexhyrningnum í tvo ferhyrninga með sama flatarmál. Sýnið að AD, BE og CF fara gegnum sameiginlegan punkt.

Hvert dæmi er 5 punkta virði.

Leyfður tími: 4 tímar.