15. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Torstai, 29. maaliskuuta 2001

Työaikaa 4 tuntia. Maksimipistemäärä joka tehtävästä 5 pistettä. Laskinten ja taulukoiden käyttö ei ole sallittu.

Tehtävä 1. Olkoon A äärellinen kokoelma sellaisia koordinaattitason neliöitä, että jokaisen A:han kuuluvan neliön kärkipisteet ovat muotoa (m, n), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ ja $(m+1, n+1)$ joillain kokonaisluvuilla m ja n. Osoita, että on olemassa sellainen A:n osakokoelma B, että B:hen kuuluu ainakin 25 % A:n neliöistä, mutta millään kahdella B:n neliöllä ei ole yhteistä kärkipistettä.

Tehtävä 2. Olkoon f rajoitettu reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla x ehdon

$$f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{5}{6}\right).$$

Osoita, että f on jaksollinen. (Funktio f on rajoitettu, jos on olemassa luku L siten, että $|f(x)| < L$ kaikilla reaaliluvuilla x. Funktio f on jaksollinen, jos on olemassa positiivinen luku k siten, että $f(x+k) = f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.)

Tehtävä 3. Määritä yhtälön

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$$

reaalisten juurten lukumäärä.

Tehtävä 4. Olkoon $ABCDEF$ kupera kuusikulmio, jossa kukin lävistäjistä AD, BE ja CF jakaa kuusikulmion kahdeksi nelikulmioksi, joiden alat ovat yhtä suuret. Osoita, että AD, BE ja CF leikkaavat toisensa samassa pisteessä.