14. Nordiske Matematikkonkurrence

Torsdag den 30. marts 2000

Dansk version

Tid: 4 timer. Der gives op til 5 point for hver opgave.

Opgave 1. På hvor mange måder kan tallet 2000 skrives som en sum af 3 positive, men ikke nødvendigvis forskellige hele tal?
(summer såsom $1+2+3$ og $3+2+1$ regnes som ens opskrivninger (af 6)).

Opgave 2. Personerne $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sidder omkring et bord i denne rækkefølge og hver har de et antal mønter. I begyndelsen har P_1 præcis én mønt mere end P_2, P_2 har præcis én mønt mere end P_3 osv. op til P_{n-1}, som har præcis én mønt mere end P_n. P_1 giver nu P_2 én mønt, hvorefter P_2 giver P_3 2 mønter osv. op til P_n, som giver P_1 n mønter. Processen fortsætter på denne måde, idet P_1 giver $n+1$ mønter til P_2, som efterfølgende giver $n+2$ mønter til P_3. Således fortsætter processen, indtil en person ikke har nok mønter, dvs. en person ikke kan give én mønt mere videre end det antal, han netop har modtaget. I det øjeblik processen stopper, viser det sig, at der findes 2 naboer ved bordet, så den ene har præcis 5 gange så mange mønter som den anden. Bestem antallet af personer ved bordet og det totale antal mønter, der cirkulerer blandt personerne.

Opgave 3. Lad trekant ABC være givet. Vinkelhalveringslinien fra B skærer AC i D og vinkelhalveringslinien fra C skærer AB i E. Vinkelhalveringslinierne skærer hinanden i O. Endvidere gælder, at $|OD| = |OE|$.
Vis, at trekant ABC er ligebenet eller $\angle BAC = 60°$.

Opgave 4. Funktionen $f(x)$ er defineret for $0 \leq x \leq 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ og

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(x) - f(y)}{f(y) - f(x)} \leq 2$$

gælder for alle x, y og z, der opfylder $0 \leq x < y < z \leq 1$ og $z - x = y - x$.
Vis, at

$$\frac{1}{7} \leq f(\frac{1}{3}) \leq \frac{4}{7}$$