13. pohjoismainen kilpailu 15. 4. 1999

1. Ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktio f toteuttaa ehdon

$$f(n) = \begin{cases} f(f(n+11)), & \text{jos } n \le 1999 \\ n-5, & \text{jos } n > 1999. \end{cases}$$

Etsi yhtälön $f(n) = 1999$ kaikki ratkaisut.

2. Ympyrän sisään piirretyn seitsenkulmion kaikki sivut ovat eripituisia. Kuinka monta $120°$:een kulmaa tällaisessa seitsenkulmiossa voi enintään olla?

3. Äärettömän kokonaislukutason $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ muodostavat kaikki pisteparit (x, y), missä x ja y ovat kokonaislukuja. Olkoot a ja b ei-negatiivisia kokonaislukuja. Sanomme (a, b)-ratsun siirroksi siirtymistä pisteestä (x, y) mihin hyvänsä pisteistä $(x \pm a, y \pm b)$ tai $(x \pm b, y \pm a)$. Määritä kaikki luvut a ja b, joilla on mahdollista päästä kiinteästä aloituspisteestä lähtien jokaiseen kokonaislukukoordinaattiseen tason pisteeseen (a, b)-ratsun siirtoja käyttämällä.

4. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivisia reaalilukuja ja $n \ge 1$. Osoita, että

$$n\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \ge \left(\frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}\right)\left(n + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?