Den 12. Nordiske Matematikk-Konkurranse

Torsdag 2. april, 1998

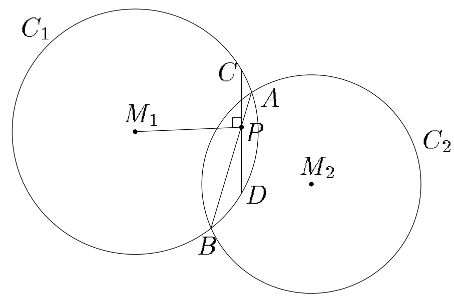
Norsk versjon

Oppgave 1

Finn alle funksjoner f fra de rasjonale tall til de rasjonale tall slik at $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ for alle rasjonale tall x og y.

Oppgave 2

La C_1 of C_2 være to sirkler som skjærer i punktene A og B. La M_1 være sentrum i C_1 og M_2 være sentrum i C_2. La P være et punkt på linjestykket AB forskjellig fra A og B og slik at $AP \neq BP$. Trekk linjen gjennom P som står normalt på M_1P og la C og D være dennes skjæringspunkter med C_1 (se figuren). Tilsvarende (ikke tegnet inn på figuren), trekk linjen gjennom P som står normalt på M_2P og la E og F være dennes skjæringspunkter med C_2. Vis at C, D, E og F danner hjørnene i en rektangel.



Oppgave 3

a) For hvilke positive heltall n finnes det en følge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som inneholder av hvert av tallene $1, 2, \ldots, n$ nøyaktig én gang og slik at k deler $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ for $k = 1, 2, \ldots, n$?

b) Finnes det en uendelig følge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ som inneholder ethvert positivt heltall nøyaktiv én gang og slik at for ethvert positivt heltall k er $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ delelig på k?

Oppgave 4

La n være et positivt heltall. Tell antall $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ slik at $\binom{n}{k}$ er odde. Vis at dette antallet er en potens av to: dvs. at det er 2^p for et ikke-negativt heltall p.