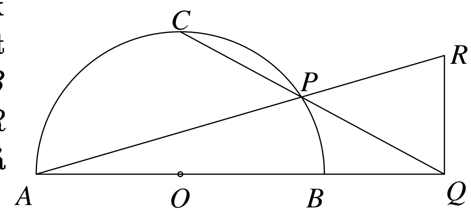
Niende Nordiske Matematikk-konkurranse
Onsdag 15. mars 1994

Tillatt tid: 4 timer

Oppgave 1

La AB være diameter i en sirkel med sentrum i O. Velg et punkt C på sirkelen slik at OC står normalt på AB. La P være et vilkårlig punkt på sirkelen mellom C og B og la linjene CP og AB skjære i Q. Velg R på AP slik at RQ og AB står normalt på hverandre. Vis at $|BQ| = |QR|$.



Oppgave 2

Beskjeder kodes ved hjelp av nuller og enere. Kun sekvenser med maksimalt to på hverandre følgende nuller og enere er tillatt. (For eksempel er sekvensen 011001 tillatt, mens 011101 ikke er.) Hvor mange tillatte sekvenser finnes med nøyaktig 12 sifre.

Oppgave 3

La $n \geq 2$ og la $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være reelle tall slik at $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$ og $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. La $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Vis at

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{1}$$

Avgjør om likhet er mulig i (1).

Oppgave 4

Vis at det finnes uendelig mange ikke-kongurente trekanter T slik at

1. sidelengdene i T er på hverandre følgende heltall.
2. arealet av T er heltallig.