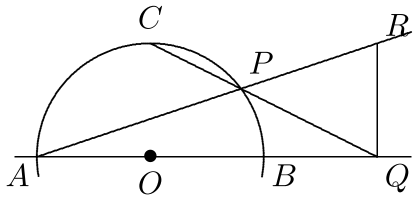
9. pohjoismainen kilpailu 15. 3. 1995



1. Olkoon AB O-keskisen ympyrän halkaisija. Valitaan ympyrän kehältä piste C siten, että OC ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Olkoon P mielivaltainen (lyhemmän) kaaren BC piste ja leikatkoot suorat CP ja AB pisteessä Q. Valitaan R AP:ltä niin, että RQ ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita, että $|BQ| = |QR|$.

2. Viestit koodataan käyttäen vain nollista ja ykkösistä koostuvia jonoja. Vain sellaisia jonoja, joissa esiintyy enintään kaksi peräkkäistä ykköstä tai nollaa saa käyttää. (Esimerkiksi jono 011001 on sallittu, mutta 011101 ei ole.) Määritä kaikkien tasan 12 merkistä koostuvien jonojen lukumäärä.

3. Olkoon $n \geq 2$ ja olkoot $x_1, x_2, \ldots x_n$ reaalilukuja, joille on voimassa $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq 0$ ja $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Olkoon $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Osoita, että

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{1}$$

Selvitä, milloin (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus.

4. Osoita, että on olemassa äärettömän monta keskenään epäyhtenevää kolmiota T, joille pätee

(i) Kolmion T sivujen pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja.

(ii) T:n pinta-ala on kokonaisluku.