

## 5. Nordiske Matematikkonkurrence

Onsdag den 10. april 1991

Dansk version

*Til opgavebesvarelsen gives 4 timer.  
For hver opgave gives maksimalt 5 point.*

### Opgave 1

Bestem de to sidste cifre i tallet

$$2^5 + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \dots + 2^{5^{1991}},$$

når det skrives i titalssystemet.

### Opgave 2

I trapezet  $ABCD$  er siden  $AB$  parallel med siden  $CD$ , og  $E$  er et (fastholdt) punkt på siden  $AB$ .

Bestem punktet  $F$  på siden  $CD$  på sådan en måde at arealet af det fælles område som trekantene  $ABF$  og  $CDE$  afgrænser, bliver størst muligt.

### Opgave 3

Vis at

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$$

for alle  $n \geq 2$ .

### Opgave 4

Lad  $f(x)$  være et polynomium med heltallige koefficienter. Antag at der for et eller andet positivt helt tal  $k$  eksisterer  $k$  på hinanden følgende hele tal  $n, n+1, \dots, n+k-1$ , så ingen af tallene  $f(n), f(n+1), \dots, f(n+k-1)$  er delelig med  $k$ .

Vis at  $f(x)$  ikke har heltallige nulpunkter.