Torsdag den 8. Juli 2010

Opgave 4. Lad P være et punkt inden i trekant ABC. Linjerne AP, BP og CP skærer trekant ABC's omskrevne cirkel Γ i henholdsvis punkterne $K \neq A$, $L \neq B$ og $M \neq C$. Tangenten til Γ i C skærer linjen AB i S. Antag at $|SC| = |SP|$. Vis at $|MK| = |ML|$.

Opgave 5. I hver af de seks bokse $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ er der i begyndelsen én mønt. Der er to typer af tilladte operationer:

Type 1: Vælg en ikke tom boks B_j hvor $1 \leq j \leq 5$. Fjern én mønt fra B_j og tilføj to mønter til B_{j+1}.

Type 2 Vælg en ikke tom boks B_k hvor $1 \leq k \leq 4$. Fjern én mønt fra B_k og ombyt indholdet i boksene B_{k+1} og B_{k+2} (som muligvis er tomme).

Afgør om der findes en endelig følge af sådanne operationer der resulter i at boksene B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 er tomme og boks B_6 indeholder præcis $2010^{2010^{2010}}$ mønter. (Bemærk at $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Opgave 6. Lad $a_1, a_2, a_3, \ldots$ være en følge af positive reelle tal. Antag at der eksisterer et positivt helt tal s så

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

for alle $n > s$. Vis at der eksisterer positive hele tal ℓ og N, hvor $\ell \leq s$ og sådan at $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ for alle $n \geq N$.

Language: Danish

Tid: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave kan opnå 7 point