Version: Dansk

45. Internationale Matematikolympiade

2. dag

Tirsdag den 13. juli 2004

Opgave 4. Lad $n \geq 3$ være et helt tal. Lad $t_1, t_2, \ldots, t_n$ være positive reelle tal, som opfylder

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Vis, at t_i, t_j, t_k er sidelængder i en trekant for alle i, j, k, hvor $1 \leq i < j < k \leq n$.

Opgave 5. I en konveks firkant $ABCD$ er diagonalen BD hverken vinkelhalveringslinje for vinkel ABC eller vinkel CDA. Punktet P ligger indeni firkant $ABCD$ og opfylder

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{og} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Vis, at firkant $ABCD$ er indskrivelig, hvis og kun hvis $|AP| = |CP|$.

Opgave 6. Vi kalder et positivt helt tal *alternerende*, hvis to på hinanden følgende cifre i dets opskrivning i 10-talssystemet overalt har forskellig paritet (paritet betyder lige eller ulige).

Bestem alle positive hele tal n, der har et helt multiplum (af n), som er alternerende.

Varighed: 4 timer 30 minutter.

Hver opgave: 7 point.