

GEORG MOHR KONKURRENCEN

Vinderseminaret 1999

Geometriopgaver

4. marts

1. To cirkler tangerer linjen t i punkterne A og B , og cirklerne tangerer hinanden i punktet P . Linjen AP skærer den anden cirkel i punktet C . Bevis, at linjen CB står vinkelret på linjen t .
2. På diameteren AB ligger C og D , så $|AC| = |CD| = |DB|$. Endvidere er $|PC| = 6$ og $|PD| = 8$ (se fig.)
Bestem cirkelns radius.

3. Firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med radius r . Skæringspunktet mellem diagonalerne AC og BD kaldes E .
Vis, at hvis AC står vinkelret på BD så gælder

$$|EA|^2 + |EB|^2 + |EC|^2 + |ED|^2 = 4r^2. (*)$$

Gælder det omvendt, at hvis (*) er sandt, så står AC vinkelret på BD ?

4. Vis, at i en ikke-stumpvinklet trekant ABC gælder, at $\sin A + \sin B + \sin C > 2$.
5. Trekant ABC er retvinklet med vinkel C som den rette vinkel. Punktet Q ligger på hypotenusen AB , så $|AQ| = |AC|$, og punktet P på kateten AC er bestemt ved, at trekant APQ har samme areal som firkant $PQBC$.

Vis, at $2|PQ| = |AB|$.

6. Den spidsvinklede trekant ABC er *ikke* ligebenet. På figuren er BF højden på AC , BM er medianen fra B , og $\angle ABF = \angle MBC = \nu$.

Bevis, at $\angle B = 90^\circ$