

Georg Mohr vinderseminar 1999
Løsninger til opgavesæt i diskret matematik

Opgave 2

Antag, at der ikke er tre personer, som taler samme sprog. Da A højst kan tre sprog, er der mindst fem af de andre, han ikke kan tale med. Kald disse B, C, D, E og F. Hver gang man udtager A, B og en af C, D, E og F, må B kunne tale med den sidste, da A ikke kan tale med nogen af dem. Da B kun kan tre sprog, må han have samme sprog tilfælles med to af dem, hvilket er en modstrid.

For otte, er det ikke altid tilfældet:

Opgave 3

Lad (x,y,\dots) betegne fordelingen, hvor E får x guldstykker, D får y guldstykker osv. Hvis kun E er tilbage, får han det hele.

Hvis kun D og E er tilbage, har D intet håb, da E aldrig vil stemme ja til hans forslag.

Hvis kun C, D og E er tilbage, kan C regne med D's støtte, så længe D blot får et guldstykke. Dvs. C vil foreslå $(0,1,999)$.

Hvis kun B, C, D og E er tilbage, kan B regne med, at C vil stemme nej, med mindre han får 1000 guldstykker, hvilket de andre ikke vil godtage. B ved, at hvis han går planken ud, bliver fordelingen $(0,1,999)$. Blot han giver E mindst 1 og D mindst 2 guldstykker, vil de altså stemme ja, ellers ikke. Dvs B foreslår $(1,2,0,997)$, som godkendes.

Når A skal stille et forslag, ved han altså, at hvis det ikke bliver vedtaget, bliver fordelingen $(1,2,0,997)$. For at få E til at stemme ja, skal A give ham mindst 2 guldstykker, for D's vedkommende er det mindst 3, for C's mindst 1 og for B's mindst 998. Den "billigste" løsning for A, som vil blive vedtaget, er dermed $(2,0,1,0,997)$.

Opgave 4

Beviset føres ved induktion. Det er oplagt sandt for $n = 1$.

Opgave 5

Tom har en vindende strategi:

Tom sætter først et ulige tal i midterfeltet. Hver gang Jerry sætter et ulige/(lige) tal i et felt, sætter Tom et lige/(ulige) tal i det tilsvarende felt (se tegning). Den endelige konfiguration bliver de tre første rækker modsat de tre sidste og tilsvarende for søjler. Disse rækker og søjler giver altså uafgjort Den midterste række og midterste søjle bliver derimod lige, så Tom vinder spillet.