

## Talteoriopgaver

**Kvadratiske rester** En kvadratisk rest modulo  $n$ , er et helt tal  $r$ ,  $0 \leq r < n$ , for hvilket der findes et helt tal  $a$  så  $a^2 \equiv r \pmod{n}$ .

Fx er de kvadratiske rester modulo 3 netop 0 og 1, da  $0^2 \equiv 0$ ,  $1^1 \equiv 1$  og  $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$ . Bemærk at når vi skal finde samtlige kvadratiske rester modulo 3, så behøver vi blot at vælge en repræsentant for hver af de tre restklasser modulo 3, fx 0, 1 og 2, og derefter se på kvadratet af disse rester modulo 3.

### Divisorer

Et naturligt tal  $n$  større end 1 med primfaktoropløsning

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

har  $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_m)$  forskellige divisorer.

**BEVIS.** Enhver divisor i  $n$  kan skrives entydigt på formen

$$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m},$$

hvor  $\beta_i \in \{0, 1, \dots, \alpha_i\}$ . Dermed har  $n$  i alt  $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_m)$  forskellige divisorer.

### Opgave 1

Bestem de kvadratiske rester modulo 4 og modulo 8.

### Opgave 2

Vis at summen af kvadraterne af  $m$  på hinanden følgende hele tal ikke kan være et kvadrattal for  $m = 3, 4, 5, 6$ .

### Opgave 3

Vis at  $8^n + 2^n + 1$  ikke er et kvadrattal for noget positivt helt tal  $n$ .

### Opgave 4

Et positivt helt tal  $n$ , som højst er 500, har den egenskab at når man vælger et tal  $m$  tilfældigt blandt tallene  $1, 2, 3, \dots, 499, 500$ , så er sandsynligheden  $\frac{1}{100}$  for at  $m$  går op i  $n$ . Bestem den størst mulige værdi af  $n$ . (Georg Mohr-Konkurrencen 2006)

### Opgave 5

Lad  $n$  være produktet af samtlige tal mindre end en million med præcis 9 divisorer. Vis at  $n$  er et kvadrattal.

### Opgave 6

For hvilke ikke-negative hele tal  $n$  går 1599 op i  $46^n + 34^n - 7^n - 5^n$ ? (Vink:  $1599 = 39 \cdot 41$ ).

### Opgave 7

Bestem samtlige positive heltallige løsninger til ligningen  $x^2 - 3y^2 = 17$ .

### Opgave 8

Bestem samtlige heltallige løsninger til ligningen  $15x^2 - 7y^2 = 9$ .

### Opgave 9

Bestem alle hele tal  $x$  og  $y$  som opfylder ligningen  $19x^3 - 84y^2 = 1984$ .

## Løsninger til talteoriopgaver

### Opgave 1

De kvadratiske rester modulo 4 er 0 og 1, og de kvadratiske rester modulo 8 er 0, 1 og 4. (Dette vises ved at bestemme  $a^2$  for samtlige principale rester  $a$ .)

### Opgave 2

Summen af kvadraterne af tre på hinanden følgende tal er kongruent med 2 modulo 3, og da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 3, er denne sum ikke et kvadrattal.

Summen af kvadraterne af fire på hinanden følgende tal er kongruent med 2 modulo 4, og da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 4, er denne sum ikke et kvadrattal.

Summen af kvadraterne af fem på hinanden følgende tal er kongruent med 2 eller 3 modulo 4, og da hverken 2 eller 3 er kvadratiske rester modulo 4, er denne sum ikke et kvadrattal.

Summen af kvadraterne af seks på hinanden følgende tal er kongruent med 3 modulo 4, og da 3 ikke er kvadratisk rest modulo 4, er denne sum ikke et kvadrattal.

### Opgave 3

Hvis  $n$  er ulige, er

$$8^n + 2^n + 1 = 2^{3n} + 2^n + 1 \equiv 2 + 2 + 1 \equiv 2 \pmod{3},$$

Og da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 3, er  $8^n + 2^n + 1$  ikke et kvadrattal for noget positivt ulige tal  $n$ .

Hvis  $n$  er lige, sættes  $n = 2m$ , og  $8^n + 2^n + 1 = 2^{6m} + 2^{2m} + 1$ . Tallet  $2^{6m} + 2^{2m} + 1$  kan ikke være et kvadrattal da det ligger mellem kvadraterne af to på hinanden følgende tal:

$$(2^{3m})^2 < 2^{6m} + 2^{2m} + 1 < (2^{3m} + 1)^2.$$

### Opgave 4

Hvis sandsynligheden er  $\frac{1}{100}$  for at et tilfældigt valgt tal  $m$  blandt tallene  $1, 2, 3, \dots, 499, 500$  går op i  $n$ , må  $n$  have præcis 5 divisorer. Et tal med primfaktoropløsning  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$  har  $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_i)$  divisorer, dvs.  $n = p^4$  for et primtal  $p$ . Det størst mulige  $n$  med den ønskede egenskab er derfor  $n = 3^4 = 81$ , da  $5^4 > 500$ .

### Opgave 5

Tal med netop  $3^2$  divisorer må ifølge sætningen om antallet af divisorer være på formen  $p^8$  eller  $p^2 q^2$  hvor  $p$  og  $q$  er primtal. Et sådant tal er derfor altid et kvadrattal, og produktet af sådanne tal er derfor også et kvadrattal.

### Opgave 6

Et tal er deleligt med  $1599 = 39 \cdot 41$  netop hvis det er deleligt med både 39 og 41.

$$S = 46^n + 34^n - 7^n - 5^n \equiv 7^n + (-5)^n - 7^n - 5^n \equiv ((-1)^n - 1)5^n \pmod{39},$$

dvs. at  $S$  er delelig med 39 netop når  $n$  er lige.

$$S = 46^n + 34^n - 7^n - 5^n \equiv 5^n + (-7)^n - 7^n - 5^n \equiv ((-1)^n - 1)7^n \pmod{41},$$

dvs. at  $S$  er delelig med 41 netop når  $n$  er lige. Dermed er  $S$  delelig med 1599 netop når  $n$  er lige.

**Opgave 8**

Da  $-1$  ikke er kvadratisk rest modulo 3, har ligningen ingen løsninger.

**Opgave 9**

Hvis vi regner modulo 5, får vi  $3y^2 \equiv 4 \pmod{5}$ . Ganger vi med 2 på begge sider, giver dette  $y^2 \equiv 3 \pmod{5}$ , men 3 er ikke kvadratisk rest modulo 5. Ligningen har derfor ingen heltallige løsninger.

**Opgave 7**

Hvis vi regner modulo 7, skal  $x$  opfylde at  $5x^3 \equiv 3 \pmod{7}$ , dvs. at  $x^3 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7}$ , men 2 er ikke kubisk rest modulo 7. Dermed har ligningen ingen heltallige løsninger.