Opgaver i talteori

Husk
For et helt positivt tal n og et helt tal a indbyrdes primisk med n er ordenen af a modulo n det mindste positive hele tal d for hvilket $a^d \equiv 1 \pmod{n}$. Hvis $a^m \equiv 1 \pmod{n}$, da er m et multiplum af d.

Opgave 1
For et positivt helt tal n betegner $p(n)$ produktet af de cifre i n som ikke er 0. Hvis n kun har et ciffer, er $p(n)$ lig dette ciffer. Bestem den største primfaktor i $S = p(1) + p(2) + \cdots + p(999)$.

Opgave 2
Bestem summen af alle tal $\frac{a}{b}$ for hvilke a og b er to indbyrdes primiske positive divisorer i 27000.

Opgave 3
Lad n være et positivt helt tal. Bestem den maksimale værdi af n for hvilken der er netop 666 ordnede tripler (x, y, z) af positive hele tal som opfylder ligningen $x + 8y + 8z = n$.

Opgave 4
Bestem alle positive hele tal n for hvilke tallet $11111_{(n)}$ er et kvadrattal. ((n) angiver at tallet er skrevet i n-tals systemet).

Opgave 5
Bestem antallet af forskellige tal i talfølgen $\lfloor \frac{1^2}{2005} \rfloor, \lfloor \frac{2^2}{2005} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{2005^2}{2005} \rfloor$.

Opgave 6
Hvor mange positive multipla af 1001 kan skrives $10^j - 10^i$, hvor i og j er hele tal og $0 \leq i < j \leq 99$?

Opgave 7
Bestem alle ikke-tomme endelige mængder S som opfylder at $\frac{i+j}{\gcd(i,j)}$ er et element i S for alle (ikke nødvendigvis forskellige) i og j i S.

Opgave 8
Lad p være et ulige primtal, og lad q og r være primtal således at p går op i $q^r + 1$. Vis at enten går $2r$ op i $p - 1$, eller også går p op i $q^2 - 1$.

Opgave 9
Siderne i en trekant har heltallige længer k, m og n hvor $k > m > n$ og $\left\{ \frac{3^k}{10^4} \right\} = \left\{ \frac{3^m}{10^4} \right\} = \left\{ \frac{3^n}{10^4} \right\}$. Bestem den mindst mulige omkreds af trekanten. ($\{n\} = n - \lfloor n \rfloor$).

Opgave 10
Vis at for ethvert helt tal n, $n \geq 2$, findes en mængde S bestående af n hele tal for hvilke $(a - b)^2$ går op i ab for alle forskellige a og b i S.

Opgave 11
Lad $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ være positive hele tal. Vis at

$$\frac{1}{\operatorname{lcm}(a_0, a_1)} + \frac{1}{\operatorname{lcm}(a_1, a_2)} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{lcm}(a_{n-1}, a_n)} \leq 1 - \frac{1}{2^n}.$$

(Her betegner *lcm* mindste fælles multiplum).