Opgaver i geometri

med fokus på indskrivelige firkanter og punkts potens

Opgave 1

Lad OA og OB være to halvlinjer således at $\angle AOB$ er ret. Punkterne M og N ligger på henholdsvis OA og OB, og punkterne P og Q opfylder at $MNPQ$ er et kvadrat samt at P og O ligger på hver sin side af linjen MN. Karakteriser det geometriske sted for centrene af kvadraterne $MNPQ$ for samtlige placeringer af M og N.

Opgave 2

I rektanglet $ABCD$ er P et indre punkt således at $\angle APD + \angle BPC = 180°$. Bestem summen $\angle DAP + \angle BCP$.

Opgave 3

Lad $ABCD$ være et rektangel, og lad P være et punkt på rektanglets omskrevne cirkel forskelligt fra vinkelspidserne. Lad yderligere X, Y, Z og W være projektionerne af P på henholdsvis AB, BC, CD og DA. Vis at et af de fire punkter X, Y, Z og W er højdernes skæringspunkt i trekanten dannet af de tre andre.

Opgave 4

Vis at de fire projektioner af A i trekant ABC på henholdsvis den ydre og indre vinkelhalveringslinje til B og den ydre og den indre vinkelhalveringslinje til C ligger på en ret linje.

Opgave 5

Lad $ABCD$ være en konveks firkant hvor diagonalerne står vinkelret på hinanden, og kald diagonalernes skæringspunkt for P. Vis at spejlingerne af P i henholdsvis AB, BC, CD og AD ligger på en cirkel.

Opgave 6

Lad punktet A være midtpunktet af halvcirkelen med diameter BC, og lad M være et punkt på linjestykket AC. Lad yderligere P og Q være projektionerne af henholdsvis A og C på linjen BM. Vis at $|BP| = |PQ| + |QC|$.

Opgave 7

I en trekant betegner O og R henholdsvis centrum og radius for den omskrevne cirkel, og I og r betegner centrum og radius for den indskrevne cirkel. Vis at $|OI|^2 = R(R - 2r)$.

Opgave 8

Lad l og m være to forskellige halvlinjer med udgangspunkt i punktet O som ikke er parallelle, og lad P være et punkt for hvilket det er muligt at tegne en linje gennem P der skærer linjerne l og m i henholdsvis A og B således at P ligger mellem A og B. Bestem beliggenheden af A så $|AP||BP|$ bliver mindst mulig.

Opgave 9

I rummet er givet en plan $\mathcal{P}$ og to punkter A og B på hver sin side af planen. Bestem beliggenheden af den kugle som indeholder A og B, og som skærer $\mathcal{P}$ i en cirkel med mindst mulig radius.